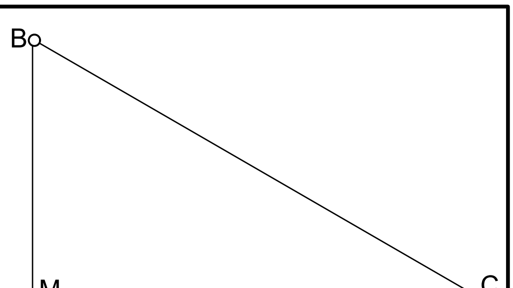
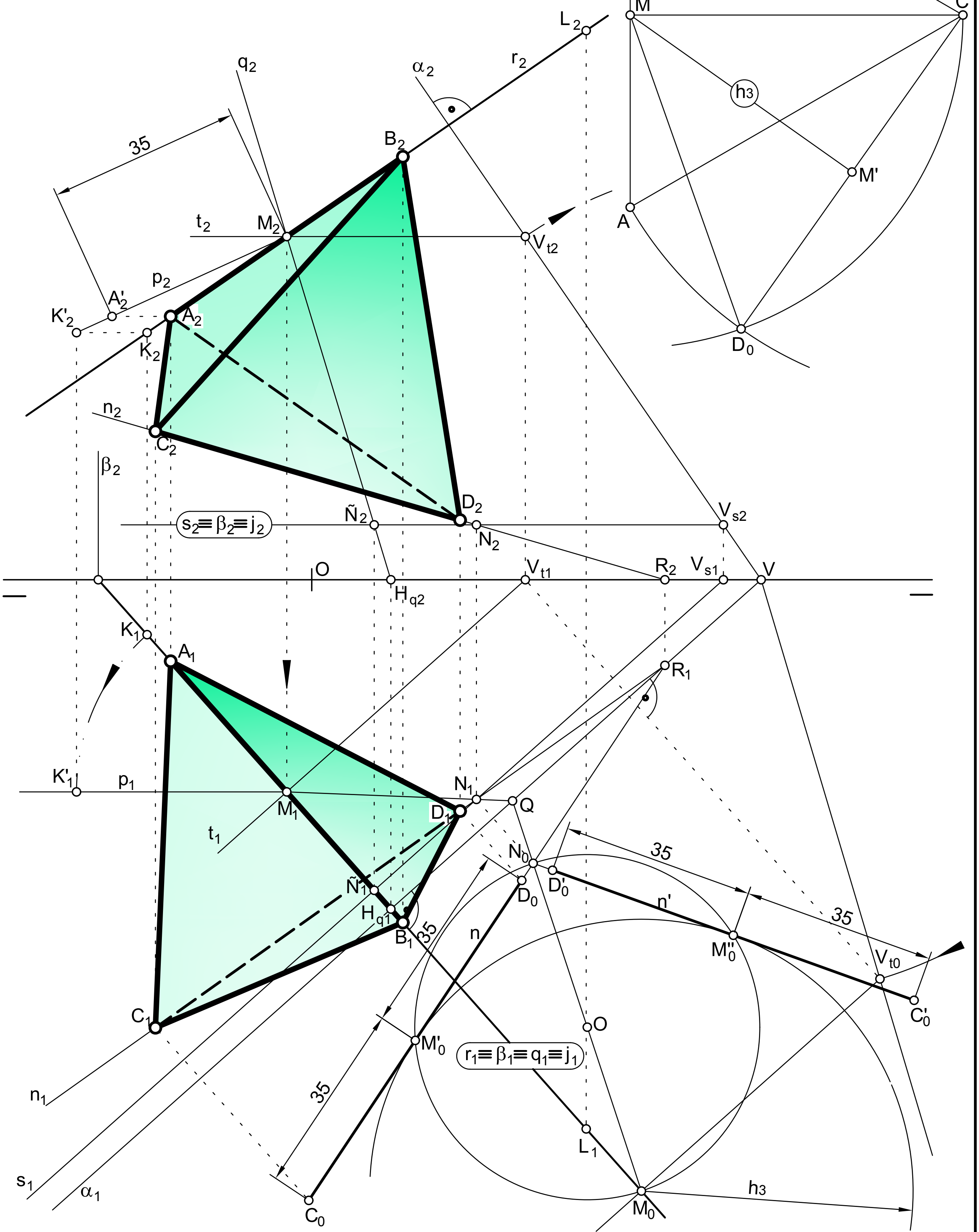
Dibujar el tetraedro macizo ABCD, cuya arista mide 70 mm, que cumple las siguientes condiciones:

1. Una de sus aristas, la $\overline{AB}$, esta en la recta r[K(-30,10,45),L(50,100,100)].
2. La otra arista, la $\overline{CD}$, opuesta a la $\overline{AB}$, esta en una recta, s, que contine el punto N(30,40,10).
3. De las posibles soluciones, elegir aquella en que la diferencia de cota entre los vértices, C y D es menor.



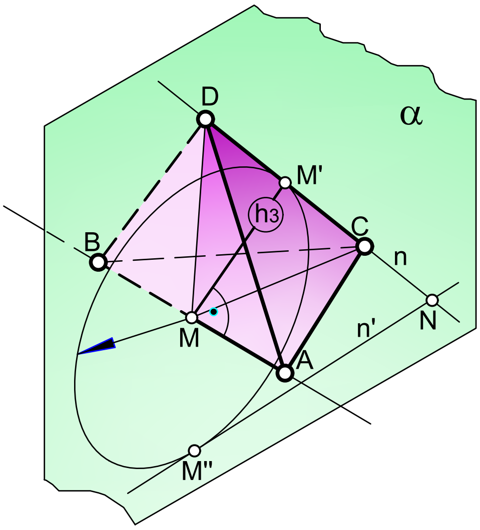


2009-2010

Tetraedro Especial

CURSO

BT 2.42



Este problema, no ejercicio, es de los que después de una primera lectura rápida, nos deja casi igual que al comienzo, pues, salvo honrosas excepciones, no sabemos por donde empezar. Esto es normal, pues se requiere una reflexión más profunda de la que necesitan los ejercicios, que hemos hecho hasta ahora. Este análisis tiene que partir de una figura inicial, como la mostrada a la izquierda, que nos sirva de apoyo para desgranar, con los datos dados, los pasos que nos van a llevar a la resolución; pasos que son, de los que ya hemos hecho en otras láminas y cuya combinación nos permiten abordar, estos problemas, aparentemente enigmáticos e irresolubles. Pero nada más lejos de la realidad, como vamos a comprobar a continuación.

Pasemos a analizar la figura, teniendo en cuenta la introducción teórica, de la lámina del tetraedro (2.17):

- El tetraedro tiene las aristas dos a dos relacionadas, por cruzarse, las opuestas, perpendicularmente y distar la altura h3. Según el enunciado, las dos aristas dadas de manera indirecta, cumplen lo de cruzarse perpendicularmente: la $\overline{AB}$ está en la recta r[K,L] y la $\overline{CD}$ en la recta, n, que contiene el punto N. Luego la recta, n, está en un plano, α, perpendicular a la recta, r. Siendo el punto de corte, M, entre el plano y la recta, el medio de la arista $\overline{AB}$. Parece que no, pero ya tenemos por donde empezar.
- La recta, n, dista de la, r o lo que es lo mismo del punto M, la altura, h_3, luego las posibles, n, tiene que ser tangentes a la circunferencia de centro, M, y radio, h_3. Esto último lo podemos decir de otra manera: "*EL LG de todas las rectas, que distan de un punto, él M, una determinada distancia, la h_3, es una circunferencia de centro el punto, M, y radio la distancia, h_3.*"
- Pero estas son muchas, n, para ser más exacto infinitas, luego hay que disminuir las posibilidades, para ello se ha dado el dato de que estas, n, contengan el punto N, con lo que hemos conseguido reducirlas a dos: las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto, N. Ya hemos avanzado bastante, casi estamos al final del análisis.
- La última parte de la resolución, que nos dará la solución única, no podemos hacerla con nuestra figura preliminar, tenemos que esperar, no seamos ansiosos, a la resolución en el Sistema Diédrico.

Resumiendo todo lo dicho, los pasos a seguir son:

1. Dibujar el plano, α, perpendicular a la recta, r, y que contenga el punto N. Veamos el proceso en Diédrico:

- Se dibuja un recta horizontal, s(s_1,s_2), que contenga el punto, N, de tal manera que su proyección horizontal, s_1, sea perpendicular a la, r_1.
- Por la proyección vertical de la traza vertical, V_{s2}, de la recta, s, se dibuja la traza vertical, α_2, perpendicular a la proyección vertical, r_2, cortando a la LT en el vértice, V, del plano, α.
- Por el vértice, V, se dibuja la traza horizontal, α_1, paralela a la proyección horizontal, s_1, o lo que es equivalente, perpendicular a la, r_1.

De esta manera tenemos el plano, α, perpendicular a la recta, r, por el punto, N.

2. Intersección del plano, α, con la recta, r.

- Se ha utilizado como plano auxiliar, el proyectante horizontal, β. Las trazas horizontales, α_1 y β_1, se cortan en la traza horizontal H_q(H_{q1},H_{q2}) de la recta, q. Tenemos el problema de que las trazas verticales, α_2 y β_2, no se cortan dentro del papel. Esto último se ha resuelto, aprovechando la recta horizontal, s, por medio de un plano horizontal, δ, que la contiene, coincidiendo su traza vertical, δ_2, con la proyección vertical, s_2, de esta manera la intersección entre el plano, δ y el α, es precisamente la recta, s.
- El plano, δ, corta al β, según la recta, j(j_1,j_2) de tal manera que la proyección horizontal, j_1, coincide con la traza horizontal, β_1.
- Las proyecciones horizontales, s_1 y j_1, se cortan en, $Ñ_1$, proyección horizontal del punto, Ñ, que unido con la traza horizontal, H_q, da la recta, q.
- La proyección vertical, q_2, corta a la, r_2, en la proyección vertical, M_2, del punto M, que como se ha dicho en el análisis, es el medio de la arista $\overline{AB}$.
- En construcción aparte, se ha determinado la altura $h_3 = \overline{MM'}$, siguiendo los pasos vistos en la parte teórica de la lámina 2.17. Por razones de espacio, se ha dibujado la construcción auxiliar con otra orientación.

2009-2010

ARG	Tetraedro Especial	CURSO
BT 2.42		

3. Abatimiento del plano, α, junto con los puntos, N y M.

- El proceso seguido en este caso, ha sido el de las rectas horizontales, pero utilizando, la recta, t, que contiene el punto, M. Esto se ha hecho así, por que al tener su traza vertical, V_{t2}, más cota, en el abatimiento tenemos más precisión, que si lo hubiéramos hecho con la recta, s.
- El abatimiento del punto, N, se ha hecho por afinidad del segmento M_1N_1, que al prolongarse ha cortado a la traza horizontal, a1, en el punto. Q.
- La línea QM_0, corta a la perpendicular a la traza, α_1, desde N_1, en el abatimiento, N_0.

4. Determinación de la arista, CD, en el abatimiento.

- Con centro en M_0, se dibuja un arco de radio, h_3.
- Desde N_0 se dibujan las rectas tangentes, n y n', cuyos puntos de tangencia, M'_0 y M''_0, son los posibles medios de la arista, CD o C'D', buscada.
- ¿Cual de las dos elegimos?, la que cumple la condición del enunciado; en este caso, la CD, pues su diferencia de cotas es menor. Esto se comprueba, dibujando las perpendiculares, desde los puntos extremos de las aristas, a la traza horizontal, α_1, y restando las distancias entre los extremos de las mismas aristas. !Ojo¡ estas distancias no son las cotas de los puntos, pero por la proporcionalidad de los triángulos rectángulos, a menor hipotenusa, menor cateto.

5. Desabatimiento de los extremos C y D.

- En este caso en vez de utilizar rectas horizontales, lo vamos a hacer por afinidad. Se prolonga la línea C_0D_0, hasta cortar a la LT en la proyección R_1.
- R_1 se une con N_1, prolongando la línea.
- Por C_0 y D_0 se dibujan líneas perpendiculares a la traza horizontal, α_1, hasta cortar a la línea R_1N_1 en las proyecciones horizontales, C_1 y D_1, de los vértices, C y D.
- Se determina la proyección vertical, R_2, que está en la LT, pues el punto R está en la traza horizontal, α_1, o lo es lo mismo, está en el PH.
- Se une R_2 con N_2, prolongando la línea.
- Desde C_1 y D_1 se dibujan las líneas de proyección, que cortan a la línea R_2N_2, en las proyecciones verticales, C_2 y D_2.

NOTA: en estos últimos pasos, vemos que aparte de los procesos a seguir, según el tipo de ejercicio, se pueden seguir otros caminos, igualmente validos, para la obtención de las soluciones. Todo es cuestión de tener capacidad de improvisación, para resolver los problemas en este caso y en otros, incluida la vida.

6. Obtención de las proyecciones de los vértices A y B.

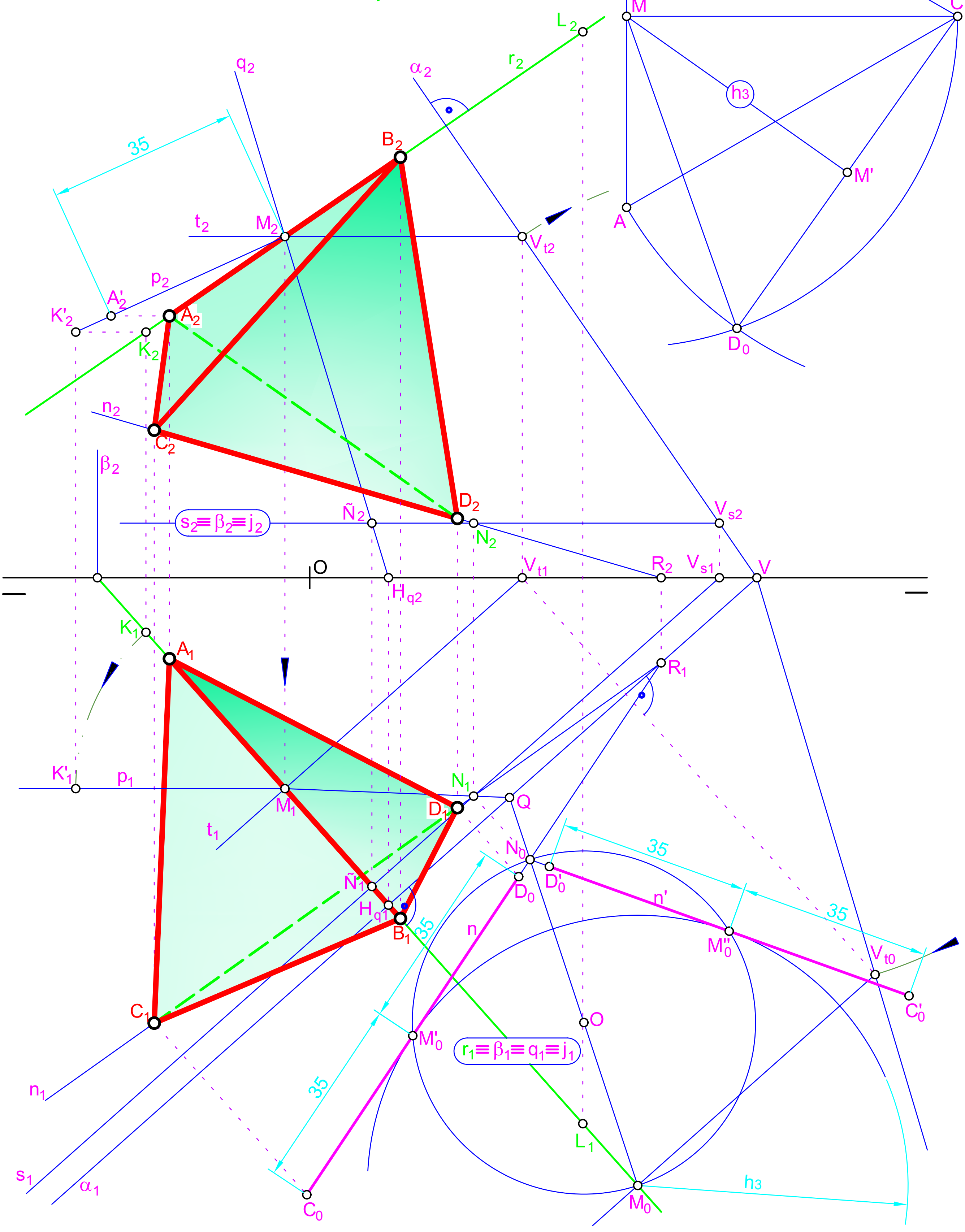
- Como estos vértices están en la recta, r, y equidistan de su centro, M, vamos a utilizar el procedimiento visto en láminas anteriores, para llevar una determinada distancia, sobre una recta oblicua.
- Aprovechando el punto K, se a girado la recta, r, hasta convertirla en una frontal, sobre la que se lleva a partir del punto medio, M la mitad de la arista, es decir 35 mm. Obteniendo el vértice, $A(A_1,A_2)$. (Para el proceso ver la lámina 2.11 ejercicio 3).
- Teniendo en cuenta la proporcionalidad entre magnitudes que se da en el Sistema Diédrico, obtenemos las proyecciones del vértice, $B(B_1,B_2)$, haciendo que $A_1M_1 = M_1B_1$ y $A_2M_2 = M_2B_2$.
- Obtenidas las proyecciones de los vértices, solo queda unirlos convenientemente, dibujando las líneas vistas y ocultas.

Parecía que no, pero ya se acabo el problema, que si recapitulamos, se resuelve por combinación de las construcciones, que se han visto en las láminas anteriores: perpendicularidad entre plano y recta, abatimiento y desabatimiento.

Como se ve es más largo de contar que de hacer.

Dibujar el tetraedro macizo ABCD, cuya arista mide 70 mm, que cumple las siguientes condiciones:

1. Una de sus aristas, la $\overline{AB}$, esta en la recta r[K(-30,10,45),L(50,100,100)].
2. La otra arista, la $\overline{CD}$, opuesta a la $\overline{AB}$, esta en una recta, s, que contine el punto N(30,40,10).
3. De las posibles soluciones, elegir aquella en que la diferencia de cota entre los vértices, C y D es menor.

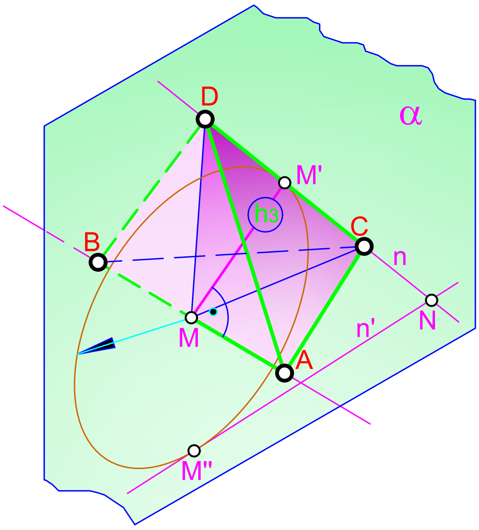


2009-2010

Tetraedro Especial

CURSO

BT 2.42



Este problema, no ejercicio, es de los que después de una primera lectura rápida, nos deja casi igual que al comienzo, pues, salvo honrosas excepciones, no sabemos por donde empezar. Esto es normal, pues se requiere una reflexión más profunda de la que necesitan los ejercicios, que hemos hecho hasta ahora. Este análisis tiene que partir de una figura inicial, como la mostrada a la izquierda, que nos sirva de apoyo para desgranar, con los datos dados, los pasos que nos van a llevar a la resolución; pasos que son, de los que ya hemos hecho en otras láminas y cuya combinación nos permiten abordar, estos problemas, aparentemente enigmáticos e irresolubles. Pero nada más lejos de la realidad, como vamos a comprobar a continuación.

Pasemos a analizar la figura, teniendo en cuenta la introducción teórica, de la lámina del tetraedro (2.17):

- El tetraedro tiene las aristas dos a dos relacionadas, por cruzarse, las opuestas, perpendicularmente y distar la altura h3. Según el enunciado, las dos aristas dadas de manera indirecta, cumplen lo de cruzarse perpendicularmente: la $\overline{AB}$ está en la recta r[K,L] y la $\overline{CD}$ en la recta, n, que contiene el punto N. Luego la recta, n, está en un plano, α, perpendicular a la recta, r. Siendo el punto de corte, M, entre el plano y la recta, el medio de la arista $\overline{AB}$. Parece que no, pero ya tenemos por donde empezar.
-
- La recta, n, dista de la, r o lo que es lo mismo del punto M, la altura, h_3, luego las posibles, n, tiene que ser tangentes a la circunferencia de centro, M, y radio, h_3. Esto último lo podemos decir de otra manera: "*EL LG de todas las rectas, que distan de un punto, él M, una determinada distancia, la h_3, es una circunferencia de centro el punto, M, y radio la distancia, h_3.*"
- Pero estas son muchas, n, para ser más exacto infinitas, luego hay que disminuir las posibilidades, para ello se ha dado el dato de que estas, n, contengan el punto N, con lo que hemos conseguido reducirlas a dos: las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto, N. Ya hemos avanzado bastante, casi estamos al final del análisis.
- La última parte de la resolución, que nos dará la solución única, no podemos hacerla con nuestra figura preliminar, tenemos que esperar, no seamos ansiosos, a la resolución en el Sistema Diédrico.

Resumiendo todo lo dicho, los pasos a seguir son:

1. Dibujar el plano, α, perpendicular a la recta, r, y que contenga el punto N. Veamos el proceso en Diédrico:

- Se dibuja un recta horizontal, s(s1,s2), que contenga el punto, N, de tal manera que su proyección horizontal, s_1, sea perpendicular a la, r_1.
- Por la proyección vertical de la traza vertical, V_{s2}, de la recta, s, se dibuja la traza vertical, α_2, perpendicular a la proyección vertical, r_2, cortando a la LT en el vértice, V, del plano, α.
- Por el vértice, V, se dibuja la traza horizontal, α_1, paralela a la proyección horizontal, s_1, o lo que es equivalente, perpendicular a la, r_1.

De esta manera tenemos el plano, α, perpendicular a la recta, r, por el punto, N.

2. Intersección del plano, α, con la recta, r.

- Se ha utilizado como plano auxiliar, el proyectante horizontal, β. Las trazas horizontales, α_1 y β_1, se cortan en la traza horizontal H_q(H_{q1},H_{q2}) de la recta, q. Tenemos el problema de que las trazas verticales, α_2 y β_2, no se cortan dentro del papel. Esto último se ha resuelto, aprovechando la recta horizontal, s, por medio de un plano horizontal, δ, que la contiene, coincidiendo su traza vertical, δ_2, con la proyección vertical, s_2, de esta manera la intersección entre el plano, δ y el α, es precisamente la recta, s.
- El plano, δ, corta al β, según la recta, j(j_1,j_2) de tal manera que la proyección horizontal, j_1, coincide con la traza horizontal, β_1.
- Las proyecciones horizontales, s_1 y j_1, se cortan en, $Ñ_1$, proyección horizontal del punto, Ñ, que unido con la traza horizontal, H_q, da la recta, q.
- La proyección vertical, q_2, corta a la, r_2, en la proyección vertical, M_2, del punto M, que como se ha dicho en el análisis, es el medio de la arista $\overline{AB}$.
- En construcción aparte, se ha determinado la altura $h_3 = \overline{MM'}$, siguiendo los pasos vistos en la parte teórica de la lámina 2.17. Por razones de espacio, se ha dibujado la construcción auxiliar con otra orientación.

3. Abatimiento del plano, α, junto con los puntos, N y M.

- El proceso seguido en este caso, ha sido el de las rectas horizontales, pero utilizando, la recta, t, que contiene el punto, M. Esto se ha hecho así, por que al tener su traza vertical, V_{t2}, más cota, en el abatimiento tenemos más precisión, que si lo hubiéramos hecho con la recta, s.
- El abatimiento del punto, N, se ha hecho por afinidad del segmento M_1N_1, que al prolongarse ha cortado a la traza horizontal, a1, en el punto. Q.
- La línea QM_0, corta a la perpendicular a la traza, α_1, desde N_1, en el abatimiento, N_0.

4. Determinación de la arista, CD, en el abatimiento.

- Con centro en M_0, se dibuja un arco de radio, h_3.
- Desde N_0 se dibujan las rectas tangentes, n y n', cuyos puntos de tangencia, M'_0 y M''_0, son los posibles medios de la arista, CD o C'D', buscada.
- ¿Cual de las dos elegimos?, la que cumple la condición del enunciado; en este caso, la CD, pues su diferencia de cotas es menor. Esto se comprueba, dibujando las perpendiculares, desde los puntos extremos de las aristas, a la traza horizontal, α_1, y restando las distancias entre los extremos de las mismas aristas. !Ojo¡ estas distancias no son las cotas de los puntos, pero por la proporcionalidad de los triángulos rectángulos, a menor hipotenusa, menor cateto.

5. Desabatimiento de los extremos C y D.

- En este caso en vez de utilizar rectas horizontales, lo vamos a hacer por afinidad. Se prolonga la línea C_0D_0, hasta cortar a la LT en la proyección R_1.
- R_1 se une con N_1, prolongando la línea.
- Por C_0 y D_0 se dibujan líneas perpendiculares a la traza horizontal, α_1, hasta cortar a la línea R_1N_1 en las proyecciones horizontales, C_1 y D_1, de los vértices, C y D.
- Se determina la proyección vertical, R_2, que está en la LT, pues el punto R está en la traza horizontal, α_1, o lo es lo mismo, está en el PH.
- Se une R_2 con N_2, prolongando la línea.
- Desde C_1 y D_1 se dibujan las líneas de proyección, que cortan a la línea R_2N_2, en las proyecciones verticales, C_2 y D_2.

NOTA: en estos últimos pasos, vemos que aparte de los procesos a seguir, según el tipo de ejercicio, se pueden seguir otros caminos, igualmente validos, para la obtención de las soluciones. Todo es cuestión de tener capacidad de improvisación, para resolver los problemas en este caso y en otros, incluida la vida.

6. Obtención de las proyecciones de los vértices A y B.

- Como estos vértices están en la recta, r, y equidistan de su centro, M, vamos a utilizar el procedimiento visto en láminas anteriores, para llevar una determinada distancia, sobre una recta oblicua.
- Aprovechando el punto K, se a girado la recta, r, hasta convertirla en una frontal, sobre la que se lleva a partir del punto medio, M la mitad de la arista, es decir 35 mm. Obteniendo el vértice, $A(A_1,A_2)$. (Para el proceso ver la lámina 2.11 ejercicio 3).
- Teniendo en cuenta la proporcionalidad entre magnitudes que se da en el Sistema Diédrico, obtenemos las proyecciones del vértice, $B(B_1,B_2)$, haciendo que $A_1M_1 = M_1B_1$ y $A_2M_2 = M_2B_2$.
- Obtenidas las proyecciones de los vértices, solo queda unirlos convenientemente, dibujando las líneas vistas y ocultas.

Parecía que no, pero ya se acabo el problema, que si recapitulamos, se resuelve por combinación de las construcciones, que se han visto en las láminas anteriores: perpendicularidad entre plano y recta, abatimiento y desabatimiento.

Como se ve es más largo de contar que de hacer.