DIARIO DE MATEMÁTICA DESNUDA

O AVENTURAS POR LOS PAISAJES DEL UNIVERSO MATEMÁTICO

PEDRO BUENDÍA ABRIL

Pedro Buendía Abril nació en Mula (Murcia), en 1958.

Actualmente es maestro en el Centro Comarcal de Educación de Adultos «Río Mula». Durante sus veinte años de maestro de Matemáticas, aunque de manera más intensa en la última década ha luchado por un aprendizaje que «nos llevara a confeccionar en grupo el tejido matemático entramando los hilos de nuestro pensamiento».

Desde el curso 1996-97 participa como «animador matemático» en cursos y actividades de formación del profesorado, relacionados con los procesos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas: «El Taller de la Fiesta de los números», «Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático», «Las Matemáticas y la Creatividad», «Grupo de Tertulia Matemática», «Democracia Matemática»...

Ha publicado artículos sobre Didáctica de Matemáticas en DOCUMENTOS CEPS: «La Fiesta de los Números» en el Centro de Profesores y Recursos Murcia I, en octubre de 1998; y «Democracia Matemática» en el Centro de Profesores y Recursos de Lorca, en mayo de 1999.

El libro «DIARIO DE MATEMÁTICA DESNUDA O AVENTURAS POR LOS PAISAJES DEL UNIVERSO MATEMÁTICO», que ahora sale a la luz, es fruto de un proyecto que fue seleccionado en el concurso de elaboración de materiales curriculares de Educación de Adultos, convocado por la Consejería de Cultura y Educación de Murcia en el año 1998.

El libro que tienes en tus manos es una encrucijada. Los caminos que llevan a él transcurren por el descubrir que la enseñanza de fórmulas matemáticas conduce a callejones sin salida y por el esforzarse incesantemente por roturar nuevas sendas. Así ha sido la práctica docente de Pedro estos últimos años en Educación de Personas Adultas. Desandando caminos que no llevaban a ninguna parte (al fracaso escolar del sistema -no de las personas-) y esforzándose por encontrar, por reinventar, por allanar, nuevas sendas. Y digo sendas y no caminos porque su trabajo de construcción ha sido humilde en la recuperación de lo que todos sabíamos de las matemáticas al nacer y fuimos olvidando con el paso por la escuela.

Pero de una encrucijada hay que saber los caminos que llegan y los que parten. La aventura del libro de Pedro se abre y se expande en el júbilo compartido por hacer del acto educativo un acto verdaderamente sabio y natural. No erudito, no elitista, no complicado, no falseado con fórmulas y palabras raras, no patrimonio de unos pocos que lo administran -gota a gota- a los demás. Del libro de Pedro salen caminos hacia la extrañeza y la perplejidad al descubrir que todo lo que no sabíamos sí lo sabíamos en realidad, sólo que con otras palabras. También rutas maravillosas hacia nuevos paisajes donde combinamos esos elementos matemáticos que, nombrados por nosotros, son verdaderamente nuestros. Y, por supuesto, un sendero muy humano y muy solidario en el que nos sentimos protagonistas de nuestra propia biografía y actores de nuestra historia.

Francisco Palazón Romero
(Del prólogo)

DIARIO DE MATEMÁTICA DESNUDA

O AVENTURAS POR LOS PAISAJES DEL
UNIVERSO MATEMÁTICO

PEDRO BUENDÍA ABRIL

Edita: Consejería de Educación y Cultura

I.S.B.N.: *84-699-1606-8*
Depósito legal: *MU-2374-99*
Prólogo: *Francisco Palazón Romero*
Dibujo de Portada e Ilustraciones: *Felipe Buendía Ortín*
Imprime: *Boluda y Cía, s.r.c.-Murcia*

«Al matemático que llevamos dentro»

Página

PRÓLOGO:
LA CUENTA QUE NO VENÍA A CUENTO

Me pide mi compañero y amigo Pedro que, a modo de Introducción de su Libro de Matemáticas (o su Novela-Diario en donde cuenta cómo pasear y tener aventuras en los paisajes matemáticos), narre lo que ocurrió hace ya unos cuantos años, una mañana de lluvias en la que traté de explicar matemáticas.

Lo voy a hacer. No podría negarle nada al compañero con el que tantas cosas he aprendido. Pero, antes de contar la historia de «La cuenta que no venía a cuento», me parece más interesante hablar del texto que viene a continuación y que sólo deja ver una parte de la humanidad del autor, del camino que ha recorrido hasta llegar a convertirse en ese «maestro tonto» que reivindica, de los resultados asombrosos que produce cuando se lleva a la práctica una y otra vez con atónitos y desconfiados alumnos y alumnas, listos o tontos, con títulos o sin ellos, en búsqueda siempre de entender qué pasa con las matemáticas.

El libro que tienes en tus manos es una encrucijada. Los caminos que llevan a él transcurren por el descubrir que la enseñanza de fórmulas matemáticas conduce a callejones sin salida y por el esforzarse incesantemente por roturar nuevas sendas. Así ha sido la práctica docente de Pedro estos últimos años en Educación de Personas Adultas. Desandando caminos que no llevaban a ninguna parte (al fracaso escolar del sistema -no de las personas-) y esforzándose por encontrar, por reinventar, por allanar, nuevas sendas. Y digo sendas y no caminos porque su trabajo de construcción ha sido humilde en la recuperación de lo que todos sabíamos de las matemáticas al nacer y fuimos olvidando con el paso por la escuela.

Pero de una encrucijada hay que saber los caminos que llegan y los que parten. La aventura del libro de Pedro se abre y se expande en el júbilo compartido por hacer del acto educativo un acto verdaderamente sabio y natural. No erudito, no elitista, no complicado, no falseado con fórmulas y palabras raras, no patrimonio de unos pocos que lo administran -gota a gota- a los demás. Del libro de Pedro salen caminos hacia la extrañeza y la perplejidad al descubrir que todo lo que no sabíamos sí lo sabíamos en realidad, sólo que con otras palabras. También rutas maravillosas hacia nuevos paisajes donde combinamos esos elementos matemáticos que, nombrados por nosotros, son verdaderamente nuestros. Y, por supuesto, un sendero muy humano y muy solidario en el que nos sentimos protagonistas de nuestra propia biografía y actores de nuestra historia.

Y para terminar con la presentación de esta encrucijada-libro-novela-diario, tengo que reconocer que muchos otros caminos conducen a ella y muchos otros parten de ella. En el punto de encuentro, la escritura. La escritura de Pedro es potente como su palabra. Insistente e incansable levanta estalagmitas con el goteo de su pasión. Al final nos ha dado una (otra) lección a todos y todas (perezosos frente a la escritura que dejamos a los «constructores de teorías alejados de las prácticas»): ha escrito un libro que nos ofrece como un regalo vivo. Por ello, gracias.

«Érase una vez, allá por el año 1987, un profesor de adultos que trabajaba en un programa experimental de educación de adultos y alfabetización, en el municipio de Mula. Comenzaba sus clases por la mañana temprano, muy temprano. Aquello era algo extraño en el Centro Comarcal. Habitualmente las personas adultas suelen venir por la tarde, una vez terminada su jornada laboral o tras haber dejado en el cole a los niños y niñas. Sin embargo, y ésta es la clave del horario matinal, los hombres que acudían al programa experimental, no estudiaban «fuera» de su horario de trabajo, sino «dentro».

La historia fue inverosímil y sin embargo cierta como el sol que sale cada mañana. Ocurrió cuando el grupo de peones albañiles y peones agrícolas del Ayuntamiento de Mula quiso saber las veces que el pantano del Cenajo podía contener al pantano de la Cierva.

Recuerdo que ese día también amaneció negro, negro, con densos nubarrones llenos de agua. Con tanta agua que la gente salía a las calles preguntándose donde podían encontrar las nubes el agua después de una semana de intensas lluvias. Los puentes se quebraron y en Albudeite la catástrofe separó El Laero del...

Aquel programa estaba coordinado por Pedro y por mí. Estaba dirigido a los trabajadores del Ayuntamiento de Mula que, mediante convenio con el INEM, había «sacado del paro» por unos cuantos meses. La idea era que, aquellos que voluntariamente así lo decidiesen, podían pasar la primera hora de la mañana en el Centro de Educación de Personas Adultas aprendiendo cosas.

Detrás de este relato, entre tramoyas y bambalinas, sigue estando Pedro. Con los años ha crecido intelectual y personalmente. Ha experimentado -con las matemáticas y con la vida-. Y ahora nos presenta su libro. Un extraño libro de matemáticas. O quizás sea un libro de la vida en el centro y de cómo, sin teorizar en las nubes, uno puede llegar a poner en práctica las enseñanzas de

Freire y tantos otros pedagogos de la liberación sobre aquello de aprender unos de otros y no caer en el estúpido vicio de tratar de enseñar y enseñar siempre. ¡Qué diferencia con los profesores de universidad que enseñan la Pedagogía liberadora a golpes de clases magistrales!

Amasar números. Lo he aprendido después. Cuando ocurrió lo que ocurrió aún no sabía nombrarlo. Ahora sí: amasar números. Con Pedro he aprendido a nombrar cosas sorprendentes. He desaprendido las matemáticas que me enseñaron en la escuela y he aprendido que un metro por un metro no puede ser nunca, nunca, nunca, un metro cuadrado. Pero en aquel entonces...

Llovía. Llovía. Se había puesto de moda la famosa gota fría. Tan terrible como antes fue la «pertinaz» sequía. El agua bajaba en torrentes, rajando la tierra y dejándola sembrada de cárcavas y esterilidad. Los hombres maldecían lo que hubiese debido ser un don del cielo y esperaban. Los niños, contentos sin escuelas, escribían poemas sinfónicos en el vaho de los cristales de las ventanas. Yo, ignorante como el más ignorante de los maestros, preparaba fotocopias de la construcción de los pantanos de la Región de Murcia. Me decía que, puesto que la lluvia era el protagonista principal de los medios de comunicación y de los corros de vecinas y vecinos en las últimas semanas, debía utilizar ese «material» como «material didáctico» para la preparación de mis clases con los obreros del Ayuntamiento. Me tenía bien aprendida la lección de motivar a los participantes y partir de sus intereses y de sus conocimientos previos.

Hablaron de las lluvias, claro está. Repartí una fotocopia. Varias columnas. En la primera, el nombre de los embalses de la Región. En la segunda, el año de construcción de los mismos. En la tercera, su capacidad en hectómetros cúbicos. Ese día tocaba matemáticas. Repaso de las cuatro reglas. Propuse que descubrieran cuantas veces cabría el pantano de la Cierva -el suyo, el de Mula-, en el del Cenajo. Quedaron sorprendidos y perplejos. Les pregunté si sabían dividir. Por supuesto, respondieron. Les ayudé diciéndoles que se trataba de una división. Y dividieron.

Dividieron amontonando números, amasando números. Dividieron el año de construcción del Cenajo entre su capacidad. Y ¡era una división difícil! ¡De tres cifras! Y la hicieron bien. Y me la mostraron orgullosos. Para que su maestro comprobase que sí, que ellos sí sabían dividir, que los que no sabían dividir eran los otros, los analfabetos.

Y entonces me dí cuenta de que tenía que buscar otra forma de «enseñar matemáticas».

Francisco Palazón Romero.

INTRODUCCIÓN

De siempre he amado las matemáticas, como todos, cuando de pequeños descubrimos los paisajes de las formas, aprendemos a contar las cosas de nuestro pequeño mundo, y empezamos a medir las distancias gateando y tropezando.

Pero también he sufrido y he odiado las Matemáticas, como tantos escolares, cuando se pierde el pensamiento en el laberinto de las fórmulas no bien comprendidas, y se pierde el gusto por el puro placer de saber de números.

Ya de maestro, primero con escolares de 6 a 14 años, y después en Educación de Adultos, me he concienciado de lo importante que es respetar las formas de pensar de la gente. Por eso pienso y siento que los maestros de Matemáticas tenemos que hacer mucho por fomentar la «democracia matemática» en las clases.

La tensión odio - cariño hacia las Matemáticas me ha movido a buscar alternativas en el proceso de enseñanza - aprendizaje y a practicar sencillas experiencias para encontrar la esencia del saber matemático. Durante casi veinte años de maestro de Matemáticas, y de forma más intensa y apasionada en los últimos cinco o seis, he luchado por un aprendizaje que nos llevara a confeccionar en grupo el tejido matemático, entramando los hilos de nuestros pensamientos.

Así estuve practicando y practicando, pero sin dejar ninguna huella escrita, hasta que un buen día regresó de tierras africanas un antiguo compañero y amigo, Francisco Palazón Romero, que al conocer de cerca esta metodología, me comprometió con su maestría de animador a contar por escrito estas experiencias, estas intuiciones y estas aventuras.

Durante unos meses estuvieron madurando en mi mente algunas ideas, y fue una tarde de diciembre de 1996 cuando relampagueó el título de «Matemática Salvaje», en el sentido natural, intenso, vivo, hermoso y libre del término. Me dije: ¡Sobre esto quiero escribir! En ese preciso instante, cargado de energía y de ganas, tomé la decisión de ponerme manos a la obra, de sacar a la luz todo lo que estaba haciendo en la práctica. Después transformé el título, pero sin perder su esencia, en «Diario de Matemática Desnuda o Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático». Es «Diario» porque recoge las vivencias del día a día, ocurridas en los grupos de Educación de Adultos con los que he compartido el saber matemático en estos últimos años. Es «Matemática Desnuda» porque defiende una idea de trabajar las cosas matemáticas desnudándolas de ropajes demasiado rígidos hechos de esquemas artificiales, y de corsés que te cortan la buena circulación de las venas del pensamiento. Es «Aventura por los Paisajes del Universo Matemático» porque compromete a la creatividad a los participantes en las clases, dándoles la oportunidad de jugar a los dioses de las Matemáticas construyendo un universo matemático cercano, un sistema solar con «planetas», «satélites» y «cometas», girando en torno a la estrella de su propio pensamiento creativo.

Los personajes de esta historia son: los participantes, el maestro y el espíritu matemático. Los participantes son Antonio, Fina, Pepe, María y tantos otros, que han colaborado en la construcción de los edificios de las medidas, de las formas y de los números, y que han disfrutado descubriendo relaciones entre ellos. No era posible recoger los nombres de los cientos de alumnos participantes a lo largo de varios cursos, pero a través de los nombres que aparecen en el libro están representados todos. El maestro, responsable de agitar el pensamiento matemático en las mentes de sus alumnos, es el que anima, el que ofrece propuestas, el que facilita recursos y el que acompaña a sus alumnos en la investigación y en la lucha constante para descubrir la belleza y el encanto de la cosa matemática. El espíritu matemático es el personaje etéreo, ese que corresponde al matemático que cada cual lleva dentro, es el personaje que en esta historia está a la que salta, siempre pendiente de la crítica constructiva.

En muchas partes de este libro, directa o indirectamente, se hace referencia a la «caja de herramientas» (metro, hilo, cartulina, clips, tijeras, vasos, botellas, bolsas de plástico, una escoba, un sombrero, garbanzos, frutos secos, patatas, naranjas, una balanza, perchas, cintas de música y otros cachivaches). Ésta es imprescindible para transformar la clase de Matemáticas en un Taller de Números, o mejor todavía en el Taller de la Fiesta de los Números, lugar de juego, de trabajo, y de pensamiento, donde se cree un ambiente propicio para enlazar lo concreto con lo abstracto, para vivir la matemática de forma creativa, atractiva, interesante y divertida.

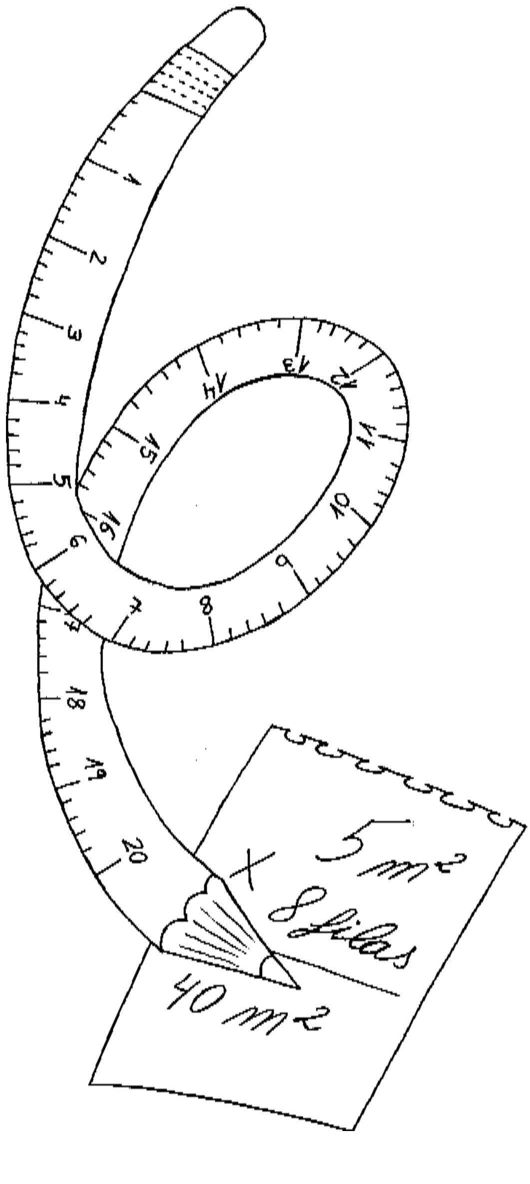
Al escribir cada página de esta aventura, lo he hecho con toda la fuerza posible para contribuir a la difusión del saber matemático entre más y más gente, para evitar sufrimientos e injusticias con enseñanzas en conserva que pierden el frescor de lo natural, para hacer realidad el sueño de la fiesta de los números, la democracia matemática, la creatividad y el fomento de los valores humanos.

Mula, mayo de 1999.

El autor.

METE EL LÁPIZ Y SACA EL METRO

(PLANETA DE LA MEDIDA)



- **EL MAESTRO:** Buenos días y buenos números, hoy empezamos el curso de Matemáticas, mejor dicho, el cultivo de nuestro saber sobre ellas, porque en realidad sabemos más matemáticas de las que nos han enseñado, porque nacemos preparados para tantear, contar, juntar, diferenciar, comparar, igualar, mezclar, separar, repartir..., que al fin y al cabo es la esencia del saber matemático.

- **EL GRUPO:**

  - ¡A mí se me dan muy mal!

  - ¡Vengo porque no me queda más remedio, para sacarme un título!

  - ¡Odio los números!

  - ¡A mí me gustan mucho, disfruto cantidad!

  - ¡Nunca las he entendido!

  - ¡Siempre me han suspendido!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: A algunos genios matemáticos también los suspendieron en la escuela.

- **ANTONIO:** Yo hago los números a mi manera, por la cuenta de la vieja, y me entiendo bien; lo que no comprendo son las fórmulas, me hago un lío.

- **EL MAESTRO:** Bien, vamos a intentar sintonizar entre todos. ¿En qué consistirá el saber matemático?

- **FINA:** En aprender bien el libro.

- **JOAQUÍN:** En saber de números para defenderse en la vida.

- **PEPE:** En prepararse para aprobar el examen.

- **EL MAESTRO:** Esos objetivos son comprensibles, válidos, necesarios a veces; pero yo me refería a otra cosa, a cómo entendemos qué son las matemáticas por dentro, en sus entrañas, como si les hiciéramos una radiografía, a ese saber que hunde sus raíces en cada una de nuestras mentes.

El grupo mantuvo una discusión al respecto bastante viva, rica, interesante, de esas que sirven para coger onda, como se refleja en palabras de Paca.

- **PACA:** ¡Ese saber lo disfrutaremos conforme despierte el matemático que llevamos dentro!

- **EL MAESTRO:** Una vez hechas estas reflexiones previas, podemos pasar tranquilamente a la acción. ¿Tenéis lápiz y libreta?

Las personas del grupo respondieron que sí, por supuesto.

- **EL MAESTRO:** Pues no hace falta; bajo mi punto de vista es aconsejable que guardéis, que metáis el lápiz en el bolsillo de momento, y que saquemos el metro. Aquí está, en esta caja de herramientas. Pienso que es más sensato hacer las cosas como en el mundo del trabajo, como en la vida misma, igual que los albañiles, los fontaneros, los sastres, los médicos, los carpinteros, los mecánicos, los ingenieros, los ganaderos, los arquitectos, los agricultores..., las mujeres y los hombres, que para empezar, toman medidas y datos de la realidad en primer lugar, para poder hacer sus cuentas con el lápiz o con lo que haga falta, pero en segundo lugar. Según la medida que haya que tomar, sacaremos el metro para medir el suelo, la pared o la puerta por ejemplo; el litro para el aceite o el agua; la báscula para pesarnos, etc, o simplemente tantearemos a través de los sentidos. Aquí tenemos un metro en el que va enrollada una cinta de dos metros, que he comprado esta mañana en la ferretería. A ver, a ver, os propongo tantear la medida de un metro; para eso iré sacando cinta metálica con las marcas de los centímetros vueltas hacia mi vista, hasta que me digáis que pare, sin decir los centímetros que hay en cada momento. ¡Preparados, empiezo ya!

- **MARÍA:** ¡Vale, vale! (En ese instante marcaba 67 cm).

- **ALGUNOS:** ¡Sigue, sigue, sigue...!

- **JUAN:** ¡Para! (Ya tenemos 85 cm).

- **OTROS:** ¡Sigue, sigue...!

- **CASI TODOS:** ¡Para, para, para...! (94 cm).

- **TERE:** Sigue un poco más. ¡Para!

En ese momento el maestro le dio la vuelta, mostrando los 99 cm de cinta desenrollada.

- **MARÍA:** ¿Qué oficio tienes Tere, si no es indiscreción?

- **TERE:** Hago Corte y Confección.

- **CASI TODOS:** ¡Claro, claro, así cualquiera!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Eso demuestra que Tere ha aprendido a tantear con bastante exactitud con la práctica; y en general nos puede hacer pensar que las matemáticas se «maman» muchas veces en la vida.

A continuación hicimos unos tanteos sobre el largo y el ancho de la clase, de la habitación donde estábamos. En el largo las respuestas oscilaron entre 5 y 8 metros. Al medirla comprobamos que medía 7 metros. En la estimación de la anchura ocurrió tres cuartos de lo mismo (es una expresión y una fracción).

- **EL MAESTRO:** Ahora es el momento justo, y no antes, de sacar el lápiz para tomar las dimensiones de la sala, calcular su superficie, repartirla entre los ocupantes para ver si se nos queda pequeña o grande, solicitar otro local a la Administración educativa en caso de que proceda, etc.

Ya estamos un poco sensibilizados para hacer las cosas matemáticas de la medida al completo, utilizando el metro y el lápiz. Hablando del metro os informo que es un invento reciente en la historia de las medidas, de cuando la Revolución francesa, de hace unos doscientos años. Pero ¿sentiría la gente la necesidad de medir antes de que se inventara el metro, el litro y el gramo, o bien otras como el segundo, la peseta, ...?, ¿cómo se las ingeniarían para tomar medidas?

- **CARLOS:** ¡Claro que sí!, medían por palmos, por pies, por pasos, ...

- **SUSANA:** Y por codos y brazas.

- **LUIS:** Y el tiempo por lunas, como en el servicio militar, cuando te faltan 15, 9, 7, ..., lunas para la licencia.

- **PACO:** Y por varas.

En ese preciso instante sacamos de la caja de herramientas de las Matemáticas, la vara de medida que se usaba en Murcia, de 83'5 cm. Nos pasamos dicha vara de uno en uno para palparla, para notar su longitud en nuestras propias manos, viviendo un poco la historia de la medida antigua.

- **PACO:** Cuando los comerciantes murcianos iban a Castilla, donde medían las cosas con otra vara diferente, debían tener cuidado para no perder en sus negocios. Antes no se medía con la misma vara en todas partes. Ahora tampoco se mide a todas las personas con la misma vara. Volviendo a la medida, podemos imaginar los problemas que conllevaría la utilización de diferentes unidades, solucionados con el establecimiento de un sistema organizado de medida.

Fue el momento de repartir una hoja con medidas antiguas y una regla de papel para que cada uno pudiera compararlas con sus medidas: su pulgada, su palmo, su pie, etc. Hicimos prácticas de la medida con nuestro propio cuerpo. Resultó interesante y divertido.

- **EL MAESTRO:** Para comprender mejor la medida de una legua -distancia de 5'5 km. aproximadamente-, deberíamos practicar una caminata de una hora más o menos, que dicho sea de paso sería muy sana para el cuerpo, pero aunque no lo hagamos ahora, podemos recordar alguna.

- **PEPE:** En una ocasión tuve que ir andando de Mula a Pliego -os recuerdo que hay una distancia de 5'5 km. aproximadamente-, y así viví bajo las plantas de mis pies la distancia de una legua, como antaño hicieran los carreteros.

Otra persona del grupo nos contó que tenía un amigo en la Media Legua, justo a medio camino entre Murcia y Alcantarilla, que están separadas por una legua.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las matemáticas pueden entrar en el cuerpo a través de una caminata y se pueden conservar en el nombre de un pueblo a través del tiempo.

- **MARÍA:** Me parece muy bien que recordemos las medidas antiguas, pero creo que ya no se utilizan.

- **LUIS:** No creas, yo sí utilizo algunas. Por ejemplo, cuando tengo que poner una manguera para el riego por goteo y el rollo de donde tengo que cortarla está en la otra punta del huerto, primero mido por pasos la distancia donde tengo que instalar la manguera, después me voy al rollo, repito el mismo número de pasos sobre la manguera desliada y corto; por último la llevo a su sitio y efectivamente me coincide con bastante aproximación.

- **JUAN:** Yo te puedo poner otro ejemplo reciente, la semana pasada estuve viendo un solar, tenía curiosidad por saber su extensión y no llevaba cinta métrica, pero eso no fue un obstáculo para mí porque conozco mi paso, lo medí por pasos y supe que tenía entre 130 y 140 metros cuadrados.

- **SUSANA:** Yo me disponía a salir a comprar una mesa camilla para mi sala de estar, del mismo tamaño que la de la cocina y como no tenía cinta métrica a mano, comprobé que medía 4 palmos. Así pude elegir en la tienda de muebles una de 80 centímetros.

¿Tendrá Susana un palmo más pequeño, o más grande que el lector?

- **EL MAESTRO:** Hoy os propongo empezar la sesión midiéndonos nuestro paso.

El grupo aceptó, sin embargo era una experiencia de la que yo particularmente como maestro no esperaba casi nada. Pero al contrario de mis previsiones, dio mucho jugo. Decidí olvidar la programación de ese día sobre la marcha -no pasó nada malo sino todo lo contrario-, sufriendo y disfrutando con el riesgo de la espontaneidad. Nos dejamos llevar por un río de imaginación. Increíble, hay que vivirlo para saber lo que allí pasó con el paso. Salió José, empezó a andar, congeló «un paso», Carlos se lo midió con el metro, desde la punta del pie derecho hasta la punta del izquierdo y medía 84 centímetros. Por el paso se puede conocer un poco al caminante. ¿Cómo tendrá José las piernas? ¿Cuántos pasos tendrá que dar José para ir andando a su casa que dista 1 km. del Centro? Nota: Si alguien por despiste reparte alegremente 1000 metros entre 84 centímetros, así, 1000:84, se le puede explicar que no tiene gracia ni sentido comparar estas dos cantidades expresadas en distintas unidades; de la misma forma que no es justo que un mayor utilice su fuerza física contra un menor por ejemplo.

Juana, bajita y rubia, y Luisa, alta y delgada, morenaaa saladaaa, que eran buenas amigas nos plantearon un problema que suponía comparar sus pasos.

- **JUANA:** Yo camino 400 pasos del Centro a mi casa.

- **LUISA:** Y yo 300 pasos. ¿Viviré más cerca del Centro que tú?

Se congelaron los pasos de ambas, se tomaron medidas, y resultó que Luisa vivía más lejos aunque probablemente se cansara menos en llegar. Hasta nuestros pasos son relativos.

- ANTONIO: Pienso que en este momento lo más interesante es salir a dar un paseo en la calle para practicar la medida del paso.

Como a todos nos pareció bien, por grupos practicamos diversas experiencias. Cabe destacar la del grupo de Antonio precisamente. Tomaron la medida del paso de Antonio, 80 centímetros, y mientras éste hacía el recorrido a pie por una calle cercana, relativamente larga, que acordaron previamente, los otros dos miembros del grupo calcularon la longitud de ésta gracias a un plano callejero a escala, e hicieron la cuenta del número de pasos que tendría que dar su compañero en la ida y vuelta, en la que tardó unos diez minutos aproximadamente con un paso normal. La diferencia entre los números y la realidad fue abismal, de uno a cien para ser exactos. Según el resultado de la cuenta, que no estaba equivocada, el caminante era poco menos que el «gato con botas». Pero eso no podía ser porque no se trataba de un cuento, sino de una cuenta. ¿Qué datos le meterían a la cuenta estos chicos? ¿Por qué sufrirían los números un rechazo de incompatibilidad con la realidad? ¿Acaso meterían datos expresados en distintas unidades de medida?

Después de todo esto, a alguien se le ocurrió hacer un planteamiento que parecía tonto: «Luisa y Pepe tienen el mismo paso y llevan el mismo ritmo al andar. Luisa parte del mismo sitio que Pepe y en el mismo sentido, una media hora después que éste; cuando lleva andando unos cinco minutos vuelve la cabeza y ve a Pepe detrás de ella» -¡hola Pepe!-. No sé si el lector se sorprenderá de que Luisa llevara a Pepe detrás, como ocurrió en el grupo. Esta posible sorpresa y otras semejantes demuestran que algunas o muchas veces, de manera más o menos intuitiva, despistada o a la ligera, pensamos en sólo una posibilidad, en una sola dirección. En el ejemplo, casi seguro que lo primero que nos pasa por la mente es la imagen de un camino más o menos recto y abierto, menos los que hayan pensado otra cosa por inteligencia, concentración o casualidad. Estas cosas ocurren así en las Matemáticas y en la vida.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Es recomendable habituarse a pensar en varias posibilidades ante una situación dada, unas más familiares, más normales, más corrientes, más rutinarias; y también otras más raras, menos probables, más rebuscadas, más originales, más atrevidas, más creativas, que a veces suelen ser las más interesantes. Podríamos decir para concluir que es aconsejable pensar y actuar en varias direcciones, en diversos sentidos e incluso en círculo, como en el caso de la caminata de la pareja en cuestión.

El problema curioso del cabrero que llevaba un lobo, una cabra y un manojo de alfalfa; y que tenía que cruzar por un puente endeble por el que sólo podía pasar una de las cosas cada vez, cuidando que la cabra no se comiera la alfalfa ni que el lobo se comiera la cabra, exige un razonamiento que no es tan sencillo como se piensa en un principio sino más complejo, más lioso, más raro, más atípico, más de llevar y traer, más de tener en cuenta más y más posibilidades.

- EL MAESTRO: Ya hemos visto, recordado y practicado algunas medidas antiguas. Ahora vamos a descubrir unos «personajes» muy a la medida. El primero, que ya se ha echado un pulso con el lápiz, ha sido el metro, tan delgado y tan necesario para ayudar a conocer con bastante exactitud las distancias, las longitudes de las cosas. ¿De qué cosas?

- **ENCARNA:** Lo que mide la hebra de lana con la que he tejido mi jersey.

- **JESÚS:** El cable eléctrico que hay que tender para iluminar mi casa.

- PEPE: El largo y el ancho de un solar.

- **FINA:** La anchura de la puerta para comprobar si entra el coche sin rozar los espejos.

- **ANTONIO:** El diámetro de las tuberías de agua.

- **EL GRUPO:**

  - La estatura.
  - Los caminos.
  - Lo que avanza un vehículo en una hora.
  - La distancia de la Tierra a la Luna y al Sol.
  - ...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El metro es el «uno de la medida», que está de moda desde la Revolución Francesa.

- **EL MAESTRO:** Pero no todo se puede medir con el metro o con las unidades de longitud, ¿verdad?

En busca de otro personaje de la medida, deslicé la suela de la bota un poco por el suelo, como queriendo dar una pista con el pie. No todo va a ser palabras ni lenguaje verbal.

- **MARIANA** (que ha cogido onda)**:** Si queremos medir el suelo de esta sala, por ejemplo, lo tendremos que hacer en metros cuadrados.

Esta frase de Mariana, a modo de palabras mágicas, sirvió para que una cartulina de forma cuadrada, que medía un metro para un lado y un metro para el otro lado, entiéndase un metro de larga por un metro de ancha, se desplegara a la vista de todo el grupo. El personaje metro cuadrado, un tanto animado, vestido de verde para la ocasión, hizo su aparición en público, entrándonos por los ojos, por el tacto, por los sentidos, para dejar de ser sólo una eme con un dos pequeño arriba y un poco a la derecha.

- **EL MAESTRO:** Sigamos buscando más personajes. ¿Qué os parece si transformamos esta sala, con la imaginación, claro, en piscina climatizada? ¿Podemos expresar su volumen en metros a secas o en metros cuadrados?

- **JUANFRAN:** Evidentemente, no.

Surgió la necesidad de un nuevo personaje, de cuerpo rechoncho, en tres dimensiones, cúbico, pariente de los dos anteriores, nieto de metros e hijo de metro cuadrado, que arropamos con papel de embalaje, después de montar el esqueleto de varillas articuladas por tacos de madera, que nos había enviado nuestro Ministerio como material didáctico. Pero no conformándonos sólo con la percepción, nos atrevimos a sentir el metro cúbico, mediante una vivencia dramatizada por Loli, Ángeles, Juanfran y Pedro. Nos sentamos sobre cada una de las cuatro sillas, colocadas como asientos en la noria de la feria, que ocupaban un metro cuadrado de suelo, y entrelazamos nuestros brazos a la altura de los hombros, abrazando y generando un metro cúbico humano, «el señor de la eme con un tres pequeño arriba», notándolo en vivo y en directo, entre nosotros.

- **EL MAESTRO:** Ya hemos conocido a tres personajes, el metro, el metro cuadrado y el metro cúbico, que en esencia han sido generados por el mismo metro. Lo que los diferencia, y mucho, es el apellido; cuando mide una distancia, no se apellida nada, es metro a secas; cuando se ponen en juego dos dimensiones, largo y ancho, se apellida cuadrado, utilizamos como unidad de referencia el metro cuadrado; si lo que tenemos que calcular es un volumen, el patrón que necesitamos se apellida cúbico, cuya existencia es posible gracias a la combinación de un metro a lo largo, un metro a lo ancho y un metro a lo alto, que delimitan la unidad principal de volumen, el metro cúbico. Sin embargo no todo se puede medir con estas tres clases de metros.

- **PEPE:** El agua, el aceite, el zumo, ... se miden por litros.

- **EL MAESTRO:** He aquí una botella de un litro.

Al colocarla sobre la mesa hizo un poco de ruido ayudando a concentrar la atención.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esta botella, al entrar por la vista, le echa un cable óptico a la mente para remarcar el concepto de litro. Lo concreto y lo abstracto son buenos amigos.

- **EL MAESTRO:** Ya conocemos el metro y sus parientes, así como el litro. Con estos podemos medir muchas cosas. Intentemos descubrir ahora algunas que no.

- **ANGEL:** El peso de las cosas y nuestro propio peso.

- **EL MAESTRO:** ¿Cuál es la unidad de peso?

- **ANGEL:** El gramo.

- **JUAN:** Y el kilogramo.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué cosa puede pesar un gramo?

- **JUANA** (que estaba despistada)**:** Un bocadillo.

- **EL GRUPO:**

- ¡Calla exagerada!

- ¡Si que te alimentas tú con poco!

- ¡Ni que fueras un insecto!

- ...

- **ANDRÉS:** Una bolsita de infusión de poleo menta pesa 1’5 gramos neto. Nos sirve para darnos una ligera idea.

- **JUANA:** Una abeja puede ser aproximadamente un gramo de vida que se dedica a sacarle miel a las flores.

- **PEPE:** Un gramo muy rico puede ser una pepita de almendra.

- **EL MAESTRO:** Muy bien, Juana, muy bien, Pepe, por esa conexión de la cosa matemática con la vida. Ahora os propongo notar el peso de un gramo en la mano. Aquí tenemos un paquete de DIN A4, con un letrero: «500 hojas, 80 gramos / metro cuadrado». Es la oportunidad para recortar un gramo de papel. Cada cual que se lo ingenie a su manera.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Un ambiente así es propicio para disfrutar practicando la democracia matemática. Cada cual terminó la experiencia notando el leve peso de una canica de papel sobre la palma de su mano.

- **EL MAESTRO:** Ya podemos medir muchas cosas, pero algo faltará. Por cierto, ¿qué hora es?

- **TOÑI:** Ya lo tengo, el paso del tiempo no se puede medir en metros, ni en litros ni en gramos, sino en segundos que marca el reloj.

Efectivamente, el reloj mide el paso del tiempo al ritmo de tic-tac, como haciéndole eco al corazón. Por eso practicamos la experiencia de tomarnos el pulso para sentir en nuestra arteria radial el latido del tiempo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Y es que los números también nos salen del corazón a un ritmo normal entre 60 y 80 latidos por minuto.

- **EL MAESTRO:** Con los «personajes de la medida», que tenemos aquí podemos medir casi todo: la longitud de una calle, la superficie de un solar, el volumen de agua de un embalse, la capacidad pulmonar, el agujero de la capa de ozono, la Gran Muralla China, el peso de una naranja, el tiempo de cocción de un huevo ...

- **ANGEL:** ¿Y los gastos para la paz y la cultura por ejemplo?, ¿con qué metro se miden?

Se nos había pasado la unidad monetaria, peseta en la actualidad y euro en el futuro, que manda tanta romana y a veces mucho más que el resto de las medidas.

- **EL MAESTRO:** Además debemos saber que hay otras unidades de medida como los grados, minutos y segundos de grado, para medir ángulos,

ángulos de sombra cuando los rayos de sol tropiezan en los objetos, el ángulo de la visión, el ángulo de inclinación de la torre de Pisa, la inclinación de una escalera, los ángulos de los codos de las tuberías, ángulos en los giros, ángulos en las extremidades de nuestro cuerpo al movernos y cuando estamos quietos, etc. Y otras para medir fenómenos físicos como la temperatura, la electricidad, etc, pero eso es harina de otro costal, que no amasaremos en este curso.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En el mundo de las medidas, sus personajes, sus individuos, que acabamos de ver, como el metro, el metro cuadrado, el metro cúbico, el litro, el gramo, la unidad monetaria y el segundo de tiempo, tienen un comportamiento social, podríamos decir, porque se pueden asociar entre ellos generando otras unidades de medida compuestas.

- **EL MAESTRO:** Estos personajes de la medida, como los de la vida real, así como los fenómenos físicos y asuntos sociales, interactúan entre sí, dando lugar a otras muchas unidades. Por poner algunos ejemplos:

- Los litros de agua de lluvia que caen en un metro cuadrado.
- Los kilómetros que avanza una bicicleta en una hora.

- **EL GRUPO:**

- Los gramos de sal que contiene un litro de agua de mar.
- Los kilómetros cuadrados de bosque que se queman en España en un verano.
- Las pesetas que se dedican en un año a gastos de Cultura y Educación.
- ...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Estas asociaciones de los unos de la medida, como estamos viendo, tienen su campo de acción en el medio socionatural.

- **EL MAESTRO:** El otro día conocimos los personajes de la medida de una manera informal, estiramos el metro, desplegamos el metro cuadrado, abrazamos el metro cúbico, vimos el litro en una botella, hicimos una canica de papel de un gramo, nos dimos cuenta que hay cosas que se miden en pesetas, y reflexionamos sobre la sociedad de los unos de la medida.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Los seres humanos sintieron la necesidad de la medida desde los tiempos prehistóricos. Y midieron y midieron buscándose sus mañas, sus estrategias, para sobrevivir y para vivir. Con el paso de la historia había que medir más y más hasta que llegó un momento, coincidiendo con la Revolución Francesa, en el que se tomó la decisión de establecer un sistema ordenado de medidas, para evitar confusiones.

- **EL MAESTRO:** Hoy empezaremos a construir una parte muy importante del edificio de la medida, utilizando los planos del Sistema Métrico Decimal, el S.M.D. El metro es la primera piedra.

- PACA: ¿No será por casualidad eso de la escalera? No me trae muy buenos recuerdos que digamos. Ya no me acuerdo si subir era multiplicar por cien y bajar era dividir entre diez o era al revés, ¡qué lío más liado!

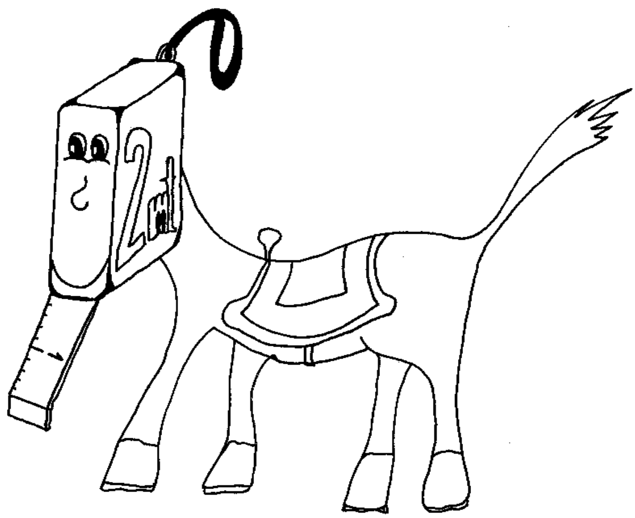
El resto del grupo recordaba y sentía más o menos lo que Paca.

- EL MAESTRO: Si es por lo de la escalera no os preocupéis en absoluto, podemos construir un edificio sin escaleras, vamos a comprobarlo haciendo algunas experiencias y divirtiéndonos si nos apetece con otras vivencias. La historia cuenta que fue en Francia a finales del siglo XVIII cuando se tomó la decisión de sistematizar casi todas las medidas básicas, de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso, bajo la lógica de los dedos de las manos, fijando como primera unidad patrón el metro, y con referencia a este el litro y el gramo. Pero antes de seguir vamos a recordar o a aprender un poco de griego y latín, que no nos vendrá nada mal.

MÁS GRANDE	VECES	MÁS PEQUEÑO
deca	10	deci
hecto	100	centi
kilo	1000	mili
miria	10000	

Este poco griego y latín, estos prefijos, nos ayudarán a romper palabras referidas a unidades de medida, en busca de su significado. Ejemplo, cuando te tomas una manzanilla, lo que haces es beberte aproximadamente la décima parte de un litro de ésta, es decir un decilitro, o un Decilitro, o un DECILITRO. Aquí viene a cuento el dicho de «te conozco bacalao aunque vengas disfrazao».

UN PASEO EN UNA DIMENSIÓN:
LAS DISTANCIAS
(SATÉLITE DE LA MEDIDA)



Ahora os propongo dar unos paseos por el paisaje matemático de las medidas. En primer lugar podemos entrar en las longitudes, las distancias, apunta Paco, porque se entiende mejor, midiendo aquí y midiendo allá, lo normal, lo largo, lo muy largo, lo corto, lo muy corto; en la realidad y en el papel. La unidad principal es el metro, este que tenemos aquí, en la caja de herramientas. ¿Qué podríamos medir con él?

- **EL GRUPO**:

  - La longitud de esta mesa.
  - La altura de esa puerta.
  - El largo, el ancho y el alto de esta sala.
  - Mi estatura.
  - ...

Se tomaron medidas, se hicieron estimaciones, se conectó la práctica con la teoría, evitando que ésta se desplomara en el vacío. Midiendo, midiendo cosas, nos dimos cuenta que el metro era demasiado grande para medir un alfiler por ejemplo, y demasiado pequeño para decirle a un viajero la distancia que hay de Murcia a Madrid, o expresar la distancia de la Tierra a la Luna, aunque se pueda hacer. Con nuestros *conocimientos de griego y latín resultó fácil y divertido ponerles nombres a las unidades de medida más grandes y más pequeñas que el metro. Al tiempo que les poníamos nombres, confeccionamos un cuadro de doble entrada, que rellenamos entre todos, vertebrado en tres planteamientos básicos:*

1. Significado por definición.

2. Prácticas y recuerdos para comprenderlas mejor

3. Algunas aplicaciones adecuadas.

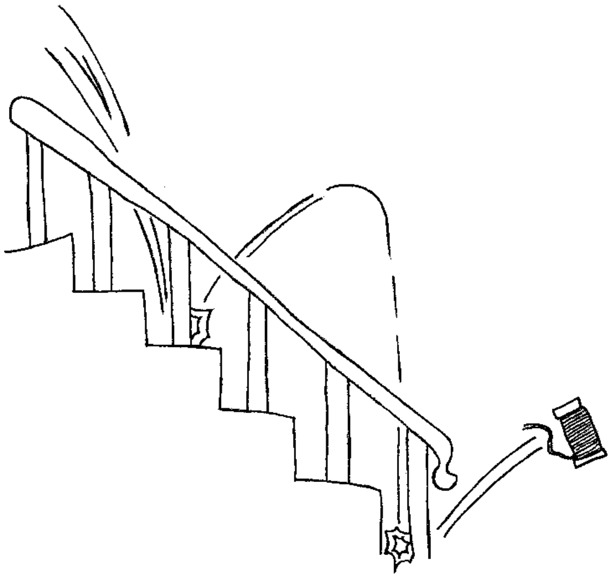
UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Km, kilómetro.	1000 veces más largo que el metro. Viene de kilo-metro.	Recordar distancias de tal a tal sitio, conocidas por todo el grupo.	Distancias en sendas, caminos, carreteras y vías. Recorridos hechos por nosotros, andando, en bici o en coche. Recorridos de bicicletas, motos, coches, camiones, tractores, trenes, barcos y aviones. Excursiones, marchas.
Hm, hectómetro.	100 veces más largo que el metro. Viene de hecto-metro.	Andar o correr 100 metros en el patio o en la calle. Medir previamente.	En calles, vallas, jardines.
Dm, decámetro.	10 veces más largo que el metro. Viene de deca-metro.	Medir con cinta métrica.	Anchura de la fachada de los edificios. Medidas en un piso. Dimensiones de un campo de deportes. Dimensiones de balsas y piscinas.
m, metro.	«Saca el metro».	Medir todo lo que esté a nuestro alcance.	Largo, ancho y alto del aula. Medidas en la casa. Cables, mangueras, hilos.
dm, decímetro.	10 veces más corto que el metro. Viene de deci-metro.	Medir un metro de hilo para cortarlo en diez trozos iguales. ¿Medirá un decímetro tu dedo índice?	La medida de un lápiz, las dimensiones de una mesa. Nota: No es frecuente encontrar medidas expresadas en decímetros.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
cm, centímetro.	100 veces más corto que el metro. Viene de centi-metro.	Cortar un hilo de un centímetro. Medirse la anchura de la uña del dedo meñique. Tomarnos las tallas de la ropa. Medirnos la estatura.	Las medidas de las hojas de papel. Las medidas de algunos órganos del cuerpo como los huesos, el esófago... Tallas para los vestidos. Diámetro de tuberías. Calibre de frutos.
mm, milímetro.	1000 veces más corto que el metro. Viene de mili-metro.	Medir milímetros de altura de agua de lluvia recogida en un bote. Medir diámetros de tubos muy finos.	Espesor de cristales. Milímetros de lluvia. Calibres de piezas pequeñas.

Nota: Cada unidad es 10 veces más larga que su vecina corta y 10 veces más corta que su vecina larga; cosas de la lógica decimal.

Una vez que el grupo hace reflexiones sobre posibles aplicaciones de cada una de las unidades de las medidas de longitud, y esto es válido para todas las medidas, van surgiendo casi espontáneamente, una serie de planteamientos, de situaciones, de problemas, de llámale como quieras, sobre datos tomados de la realidad o inspirados en ella, con números escurridos a la vida, al entorno cercano o a lo que interese o sea necesario en ese momento. Con esos números, con esos datos, con esas cantidades se mezclan preguntas en las mentes del grupo. Darles respuesta es solucionar problemas que hemos hecho nuestros, que hemos sentido o inventado nosotros mismos, aquí y ahora, sufriendo, disfrutando y viviendo la matemática.

LO QUE LE OCURRIÓ A PERICO CON UN ROLLO DE HILO



En uno de estos problemas sobre longitudes, ocurrió algo tan exagerado, tan desmesurado, que merece la pena ser contado. Lo que aquí voy a contar no es chiste ni cuento ni falso. Había que calcular cuántos trozos de hilo de seda de 75 cm. para liar regalos saldrían de un rollo de 2 Hm.

- **PERICO:** Vamos a ver, para pasar de centímetros a hectómetros, ¿se multiplica o se divide?, ¿cuántos escalones hay que saltar?, creo que subir era multiplicar, ¿verdad?

La mente de Perico, y a todos nos puede pasar alguna vez, se lió como una calabaza, y poco faltó para que incluso cayera rodando escaleras de 10 en 10 o de culatazo en culatazo. No sé.

- **CARMEN:** Perico, si es muy fácil, tú acuérdate de esto:

«Bajar es multiplicar y

subir es dividir.

Tócate la nariz».

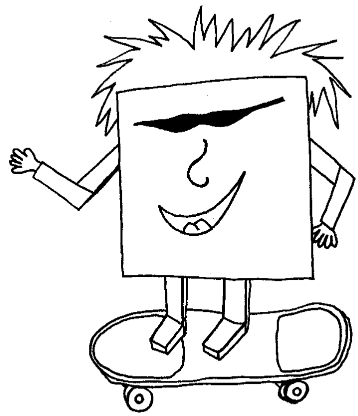
No importa si esto lo aprendió solo o alguien se lo enseñó. Son cosas de la matemática descafeinada, desnaturalizada y sacada de quicio, sin sentido y sin significado, vacía, sin nada, cero.

Perico, que ya no sabía ni en el escalón donde estaba, quedó atrapado por la desconexión de estos artilugios tan artificiales, sin relación con el rollo de hilo, sino con *otros malos rollos. Acabó multiplicando 75 centímetros por 10000, dándole un resultado de 750000 hectómetros, pensó, cada trozo de hilo, o sea 7'5 kilómetros, como de Alcantarilla a Murcia aproximadamente; se le había estirado el trozo de hilo de manera tan bestial, que no tenía rollo de hilo para empezar a liar ni siquiera un regalo. Los números rodando por la escalera le estaban jugando una mala pasada.*

Sin embargo se trata de cortar trozos de hilo de menos de un metro cada uno sacados de un buen rollo de dos «hecto-metros», es decir 200 metros, sin necesidad de hacer cuenta alguna. Como no sería lógico, matemáticamente hablando, repartir 200 metros entre 75 centímetros, ya que metro y centímetro son como palabras escritas en diferentes dialectos, lo primero que se puede hacer es traducir los 200 metros a centímetros, 200 metros por 100 centímetros que tiene cada metro, igual a 20000 centímetros. Ya podemos trocear, repartir o comparar tranquilamente y seguros de nosotros mismos los 20000 centímetros del rollo entre los 75 centímetros del hilo, con lápiz, con calculadora o mentalmente, llegando a la solución de poder liar 266 regalos. Por cierto, nos sobra un trozo de medio metro de hilo.

CADA PERSONA QUE LEA LA HISTORIA DE PERICO CON EL ROLLO DE HILO QUE SAQUE SUS PROPIAS CONCLUSIONES.

UN PASEO EN DOS DIMENSIONES: LAS EXTENSIONES (SATÉLITE DE LA MEDIDA)



- **EL MAESTRO:** De lo largo y lo corto pasamos a las extensiones de las cosas: lo que mide el tablero de tu mesa, la superficie útil del aula o del Centro, la tela que se precisa para confeccionar un vestido, la extensión de la Región de Murcia, la enorme cantidad de bosque que se quema cada verano en la «Piel de Toro», lo que mide nuestra propia piel...

El cuadro siguiente puede ayudar a comprender más significativamente las unidades de medir extensiones y superficies.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Km^2, kilómetro cuadrado.	Un cuadrado grandísimo, comparado con el metro cuadrado, de un kilómetro de lado.	Pensar en una extensión de terreno de un kilómetro cuadrado aproximadamente, situado en un lugar conocido por el grupo. Estimación del casco urbano del pueblo o del barrio. Calcular la superficie utilizando un plano a escala.	Extensiones en el pueblo, barrio, huerta, campo y mar. Extensiones del término municipal, la región y el pais. En bosques, deforestación, incendios y repoblación.
Hm^2, hectómetro cuadrado.	Un cuadrado bastante grande, comparado con el metro cuadrado, de un hectómetro de lado.	Caminata en un jardín, huerta, campo, monte o explanada, rodeando un hectómetro cuadrado, dando un paseo de 400 metros, que es muy bueno para la salud.	En urbanizaciones y polígonos industriales. En parques y jardines. En huertos.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Dm^2, decámetro cuadrado.	Un cuadrado grande, de un decámetro de lado.	Con la cinta métrica o un hilo de 10 metros, delimitar una extensión de un decámetro cuadrado, en un salón amplio o en el patio o calle.	En solares, ya que es aproximadamente el «área de un solar».
m^2, metro cuadrado.	Un cuadrado de un metro de lado, entiéndase lo de dentro.	Presentar una cartulina de un metro de lado, blanca, negra o de color, como personaje de la medida.	En tableros, puertas y ventanas. En suelos, paredes y techos. En partes del cuerpo.
dm^2, decímetro cuadrado.	Un cuadrado pequeño, más o menos como la palma de la mano.	Mirarte la palma de la mano. Dibujar y recortar un cuadro de papel de un decímetro de lado. Colocarlo sobre la palma de la mano.	En losetas y azulejos. En asientos de sillas. En partes del cuerpo.
cm^2, centímetro cuadrado.	Un cuadrado pequeñito, más o menos como la uña del dedo meñique.	Tocarse la uña, mirarla. Dibujar y recortar un cuadradito de un centímetro de lado.	En hojas de libros y de árboles. En cajas pequeñas (continente). Partes pequeñas del cuerpo.
mm^2, milímetro cuadrado.	Un cuadrado casi tan pequeño como la punta de un lápiz o una cagada de mosca, con perdón.	Dibujar un milímetro cuadrado sobre el papel, con mucho pulso. Observar un papel milimetrado.	En todas aquellas cosas en las que haya que ajustar al milímetro.

Observaciones del grupo:

- Que el tablero de una mesa mida un metro cuadrado no supone que éste tenga esta forma necesariamente, puede ser rectangular e incluso puede que se trate de una mesa de camilla.
- Cada unidad es 100 veces más extensa que su vecina pequeña y 100 veces menos extensa que su vecina grande. ¿Por qué 100 veces y no 10 veces? Porque en las extensiones se pone en juego la combinación múltiple de 10 veces a lo largo por 10 veces a lo ancho, que supone un crecimiento de diez veces diez, es decir de cien.

Cantidad de planteamientos a resolver pueden surgir en algún momento mejor que en otro, en todo este abanico de posibles aplicaciones de las medidas de superficie. Veamos un ejemplo:

- Mª CARMEN: Quiero enlosetar el patio de mi casa...

- ANTONIO:

«El patio de mi casa es particular.
Cuando llueve se moja
como los demás...»

La intervención de Antonio fue de agradecer, sirvió para crear ambiente y para hacer un respiro en el camino y despejar la mente.

- Mª CARMEN: ...Con baldosas de barro de 25 centímetros de lado. Tiene forma rectangular, de 3 metros por 2 metros. ¿Cuánto me costarán las losas si me las venden por cajas enteras de 15 losetas a 1500 pesetas la caja?

Es un problema muy sencillo, ¿no es así? Pero el motivo de recordarlo ahora es por otras causas que van más allá de su poca dificultad. Así podremos ver más claros dos matices matemáticos:

1.- Cada persona puede resolverlo a su manera, siempre que sea lógica y coherente, en «democracia matemática». A mi manera, a tu manera y a su manera, a nuestra manera.

El maestro, para empezar, dio una sola pista en este caso, recortó y presentó una cartulina cuadrada a la medida de la loseta, aunque al día siguiente nos pareció de distinto tamaño cuando la comparamos con una de barro; y es que algunas veces la vista engaña. Después de esta primera pista de conexión con la realidad, como mamá gata que deja a los gatitos cazar ratones, como los padres que van soltando a sus hijos de la mano para que vayan aprendiendo a desenvolverse en la vida, se mantuvo a la expectativa por si alguien necesitaba más pistas, se limitó a estar al servicio de los aprendices. Al final, en la puesta en común, cada uno expuso el camino seguido.

- ANTONIO: El patio mide 3 metros por 2 metros, en esencia 3 filas de 2 metros cuadrados o bien 2 filas de 3 metros cuadrados, igual a 6 metros cuadrados, encajados sobre el rectángulo del patio. La loseta mide 25 centímetros por 25 centímetros, igual a 625 centímetros cuadrados, aproximadamente igual que 625 uñas del dedo meñique. Para comparar ambas superficies traduzco los 6 metros cuadrados a centímetros cuadrados. Como sé que un metro cuadrado contiene 100 filas de 100 centímetros cuadrados en cada una, igual a 100 por 100, igual a 10000 centímetros cuadrados (unas 10000 uñas), los 6 metros cuadrados contendrán 6 por 10000 igual a 60000 centímetros cuadrados. Troceando el patio imaginariamente, repartimos 60000 entre 625 centímetros cuadrados, dándonos 96 trozos y tantos trozos, tantas losetas. Para calcular lo que cuestan...

- JUANA: Yo he pasado las losetas, mejor dicho una loseta a metros cuadrados. Cada loseta mide 25 centímetros por 25 centímetros, igual a 625 centímetros cuadrados. Si reparto los 625 centímetros cuadrados de la loseta entre 10000 centímetros cuadrados que contiene un metro cuadrado, resulta lógicamente bastante menos de un metro cuadrado, concretamente 625 diezmilésimas o lo que es lo mismo, 0’0625 metros cuadrados, vamos una pizca de metro cuadrado. Después he repartido 6 metros cuadrados que mide el patio entre 0’0625 metros cuadrados que tiene una loseta, resultando 96 losetas. El mayor peligro ha estado en los decimales, que cuando te descuidas, te suelen jugar muy malas pasadas, lo mismo agrandan que empequeñecen las cantidades al menor descuido.

- **CARI:** Este problema me ha traído a la memoria la época en que yo trabajaba en la fábrica y tenía que encajar las cajas de botes de tomate en el contenedor del camión, teniéndomelas que ingeniar para colocarlas de manera que quedara el mínimo de espacios huecos; y no sé como lo hacía sin saber de matemáticas. Intentaré hacerlo por mi cuenta.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Mucha gente sabe matemáticas sin saber Matemáticas, porque se las ha enseñado la vida.

- **CARI:** Continuando con el problema del patio de Mª Carmen, yo he resuelto la extensión del patio como ellos, pero en las losetas me aclaro mejor por metro cuadrado, como los albañiles. En un metro cuadrado encajan 4 filas de 4 losetas, que son 16 losetas; y en todo el patio, 16 losetas por 6 metros cuadrados, igual a 96 losetas.

- **PEPE LUIS** (que está tan contento con su nuevo ordenador personal y portátil)**:** Yo he metido los datos en mi «PC COMPUTER ÚLTIMO GRITO», de alta velocidad, que lleva el programa de Matemáticas NUMERLOSET, y en menos que canta un gallo me ha aparecido en la pantalla a todo color y alta resolución el resultado de 96 LOSET.

- **MIGUEL:** Pues yo he calculado las 96 losetas en lo que se dice un abrir y cerrar de ojos, con mi ordenador, que también es portátil, y aunque carece de marca tiene la gran ventaja de ser humano, lo llevo aquí, en el «coco», desde antes de nacer. Mentalmente, sencillamente, he pensado que 4 por 4 igual a 16 losetas y 6 por (10 y 6) igual a 60 y 36, igual a 96 losetas.

<u>2.- A veces los números no cuadran exactamente con la necesidad.</u>

En cuanto a lo que cuestan las losetas, la persona que esté leyendo esto lo puede calcular si le apetece, mentalmente, con lápiz o con ordenador. Si no lo hace no pasa nada, pero no podrá comprobar si Mª Carmen tendrá que comprar losas de sobra, aunque no sea lo mejor para su bolsillo.

UN PASEO POR EL CAMPO: MEDIDAS AGRARIAS (SATÉLITE DE LA MEDIDA)

La agricultura, desde hace miles de años, pasando por egipcios, babilonios, griegos, romanos, bárbaros, mayas, incas, pueblos orientales y hasta por el Tío Pencho, ha puesto en marcha mucha energía mental, movidas de neuronas matemáticas para intentar arrancarle frutos a la tierra. Trazar linderos, hacer particiones, desarrollar el arte de medir la tierra, exige unidades adecuadas.

- JOSÉ ANTONIO: Yo vivo de la tierra, mejor dicho, malvivo, no quiere llover, los precios... Tengo 12 tahullas de albaricoqueros. El otro día estuve viendo la escritura donde consta la extensión del minifundio: 1 Ha. 34 a. 16 ca. Algo tendrá que ver la tahulla con esas abreviaturas, digo yo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Este problema concreto, actual, vivo, auténtico, sacado del universo de problemas de los participantes, de sus necesidades, nos brinda una oportunidad para desarrollar un aprendizaje significativo. Se debe aprovechar esta ocasión para confeccionar entre todo el grupo el cuadro de las medidas agrarias.

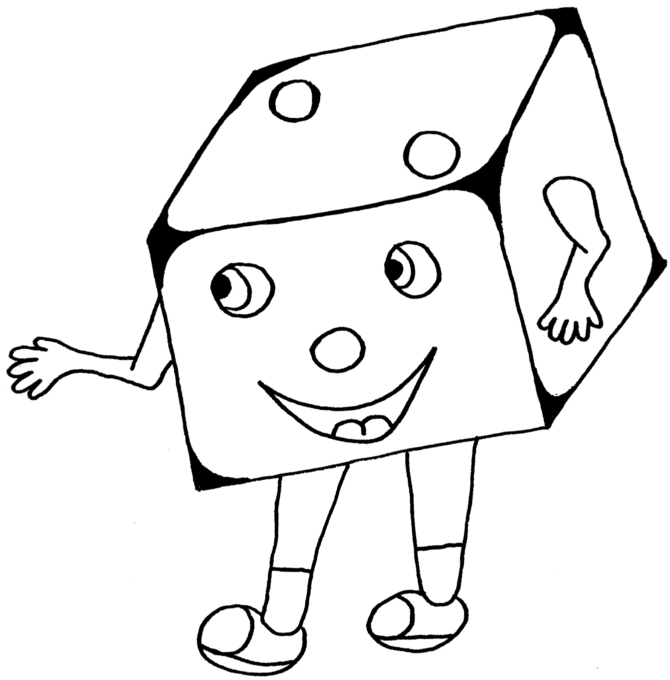
UNIDADES	SIGNIFICADO	"SINÓNIMOS MATEMÁTICOS"	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Ha, hectárea.	100 veces más extensa que un área.	Hectómetro cuadrado.	Delimitar una hectárea en un parque, una huerta o en el monte.	Fincas de secano y de regadío.
a, área.	Medida agraria de 100 metros cuadrados.	Decámetro cuadrado.	Delimitar el ÁREA DE UN SOLAR CUADRADO de 10 metros de lado.	Huertos pequeños. Solares.
ca, centiárea.	100 veces menos extensa que un área.	Metro cuadrado.	¿De qué color es el caballo blanco de Santiago? ¿Cuántos metros cuadrados mide una centiárea?	Escrituras de fincas y solares.
Tahúlla.	Medida agraria de Murcia, Almería y Granada, equivalente a un trozo de huerta de 1.118 metros cuadrados.	1.118 metros cuadrados.	Puesta en común de los saberes del grupo sobre esta medida de la tierra.	Parcelas en la huerta.
Fanega superficial, en Murcia.	Trozo de terreno de campo, de 6.707 metros cuadrados aproximadamente.	6.707 metros cuadrados aproximadamente. Una hectérea contiene aproximadamente 1′5 fanegas.	Hablar de fanegas en el grupo.	Fincas en el campo.

En la elaboración de este cuadro, la tahúlla y la fanega, fueron personajes un poco extraños, algo chapados a la antigua. Cabe destacar un detalle importantísimo, fundamental, y es que hubo que hacer un alto en el cuadro para afrontar una pequeña investigación. El tomo correspondiente de la enciclopedia que tenemos en la biblioteca del Centro y una vieja aritmética vieja, publicada de texto el 28 de abril de 1898, encontrada en el baúl de los recuerdos, nos ayudaron a conocer los personajes en cuestión, en pocos minutos.

¡Ah!, un momento, ¿recuerdas el problema de José Antonio con sus tahúllas y las abreviaturas de su escritura? Si lo deseas, puedes comprobar si coincide la medida de la escritura con la tierra.

Del campo de aplicaciones posibles de las medidas agrarias, y de la memoria y suposiciones del grupo, surgieron actividades más que suficientes para el buen entendimiento de estas medidas.

UN PASEO EN TRES DIMENSIONES: EL ESPACIO (SATÉLITE DE LA MEDIDA)



- EL MAESTRO: Hola, empezamos un nuevo estudio referido al reconocimiento de espacios físicos que ocupan los cuerpos reales o imaginados, los cuerpos geométricos.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Para cubicar, para delimitar trozos de espacio, los sabios de los números pensaron en tres dimensiones, e inventaron el metro de cubicar, el metro cúbico, descendiente del metro en segunda generación, una especie de híbrido, producto de la reproducción del metro con el metro cuadrado, a capricho de sus creadores.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Km^3, kilómetro cúbico.	Trozo muy grande de espacio, de forma cúbica, comparado con el metro cúbico, delimitado por 1 km de largo, 1km de ancho y 1 km de alto.	Hacer un crucero imaginario por alta mar, refrescando el pensamiento en una masa de agua de un kilómetro de profundidad, delimitada por un kilómetro cuadrado en superficie.	Masas de agua salada. Masas de aire, más o menos contaminado. Volumen de la Tierra, la Luna, el Sol...
Hm^3, hectómetro cúbico.	Trozo de espacio bastante más grande que el metro cúbico, delimitado por 1 Hm de largo, 1 Hm de ancho y 1 Hm de alto.	Pensar en una masa de agua de forma cúbica de 100 m de larga por 100 m de ancha por 100 m de alta, comparándola con la capaciadad de algún embalse o pantano conocido o cercano. Dar un paseo alrededor de un hectómetro cuadrado, alzando la vista al cielo para delimitar un hectómetro cúbico de aire, con un poco de imaginación, claro está.	Masas de agua de pantanos y embalses. Masas atmosféricas. Masas de combustibles. Masas de basura.
Dm^3, decámetro cúbico.	Trozo de espacio más grande que el metro cúbico, de 1 Dm de lado.	Pensar y observar si es posible, una columna de pisos de una misma letra, incrustada en un bloque de tres plantas. Concentrar la mente en una masa de agua de un decámetro cúbico y compararla con el agua de una piscina conocida por todo el grupo.	Embalses, piscinas. Masas de tierra. Masa del aire que envuelve el lugar.
m^3, metro cúbico.	Trozo de espacio de forma cúbica de 1 m de lado, que podemos abrazar entre cuatro personas.	Delimitar el metro cúbico con los hilos de sus aristas. Cubicar mentalmente la habitación donde estamos, imaginándola llena de cajas de metro cúbico. Recordar un paseo en la noria de la feria.	Recibo del agua de la casa. Agricultura: balsas, riegos. Movimiento de tierras. Capacidad de los camiones, remolques... Construcción: volumen de habitaciones, salones, naves...

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
dm^3, decímetro cúbico.	Trocillo de espacio pequeño, de forma cúbica, de un lado diez veces más corto que el metro.	Colocar las manos haciendo el mayor hueco posible, sin que se despeguen los dedos de ambas.	Recipientes para líquidos. El cuerpo humano: capacidad pulmonar, gástrica...
cm^3, centímetro cúbico.	Trocillo de espacio pequeñito, de forma cúbica, de un centímetro de lado.	Fijarse en la yema de tu dedo meñique. Tocar un garbanzo.	Recipientes pequeños: bebidas, productos de limpieza. Productos para la agricultura.
mm3, milímetro cúbico.	Trocillo de espacio pequeñísimo, de forma cúbica, de un milímetro de lado.	Fijarse en la bolilla punta del bolígrafo. Observar los cuerpecillos de pequeños insectos. Observar el germen de algunas semillas como el trigo y la almendra.	Medicamentos. El cuerpo humano. Por ejemplo número de glóbulos rojos o blancos por milímetro cúbico de sangre.

Observaciones del grupo:

Pregunta: ¿Por qué cada unidad, al compararla con su vecina pequeña o grande, es gigante o enana respectivamente, del orden de las 1000 veces?

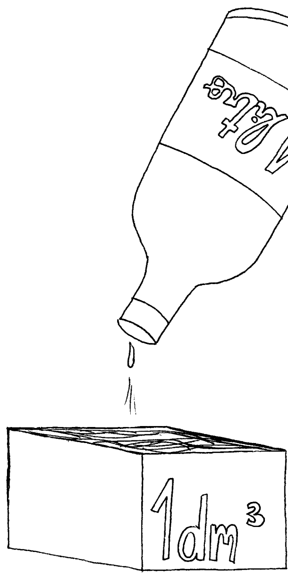
Respuesta con lógica decimal: Fácil, el crecimiento del volumen es en tres dimensiones, produciendo un efecto multiplicativo de 10 veces a lo largo por 10 veces a lo ancho y por 10 veces a lo alto.

El grupo hizo suposiciones de lo más variopinto en torno a sus aplicaciones, para aprender mejor las medidas de volumen. Por poner un ejemplo, y ya que estamos en una zona agrícola recordamos el que planteó José Antonio, el de la escritura de la tierra.

- JOSÉ ANTONIO: ¿Tendré suficiente para regar ahora toda la finca con el agua que tengo en mi balsa de tres decámetros cúbicos llena hasta las 3/4 partes, sabiendo que cada hila es de un caudal de 40 litros por segundo y que cada tahulla necesita una hora de agua?

Como de buena costumbre se practicó la democracia matemática en el proceso de resolución, ganando en valores lo que «perdemos en tiempo».

UN PASEO POR LOS LÍQUIDOS Y LOS GRANOS: LA CAPACIDAD (SATÉLITE DE LA MEDIDA)



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Pepe o José, Paco o Francisco, Pedro o Perico. Decímetro cúbico o litro, he aquí el cordón umbilical que une las medidas de volumen y capacidad. Esta equivalencia la hemos leído en alguna lección que otra, posiblemente la hayamos memorizado, no sé si la habremos comprobado, comprendido y aprendido todos, y hasta posiblemente la hayamos olvidado. Para quien no lo tenga claro, se recomienda una sencilla experiencia de comprobación.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué os parece si confeccionamos un decímetro cúbico en cartulina y comprobamos si entra un litro en este recipiente?

- **MUY POCOS:** ¡No es necesario, eso lo damos por supuesto! ¡No perdamos el tiempo en cosas tan concretas!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Este tipo de respuestas suelen ser rutinarias y automáticas algunas veces. Además, suponiendo que alguien lo sepa de verdad, puede decirlo de manera más respetuosa con sus compañeros, que a lo mejor no lo saben tan bien como él, o a lo peor él tampoco lo sabe tanto como cree. Y además, lo concreto no se riñe con lo abstracto sino que pueden juguetear juntos en la mente matemática humana.

- **CASI TODOS** (bastante animados): ¡Venga, hagamos la experiencia!

En cinco minutos y con la colaboración de algunas personas del grupo, que tenían *a su disposición cartulina, tijeras, metro y clips, construyeron una caja, cuyo largo, ancho y alto medían igual, eran diez veces más cortos que un metro cada uno. Mientras tanto Joaquín fue al grifo a llenar la botella con un litro de agua. Metimos la botella (sin vaciar) dentro del decímetro cúbico de cartulina sin tapadera, casi rozaba en las paredes de la caja y sobresalía media botella por encima.*

- **EL MAESTRO:** ¿Sobrará agua? ¿Entrará toda?

- **ALGUNOS:** ¡Se llenarán casi dos cajas con el litro!

- **OTROS:** Lo que está bastante claro es que el agua de esa botella no entra en esa caja.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Ojo!, ¡mucho ojo es lo que hay que tener! Muchas veces la vista engaña. El ojo de buen cubero necesita las gafas de la experiencia para no equivocarse en los cálculos o equivocarse menos cada vez.

Cuando la íbamos a vaciar para comprobarlo, dijeron algunos: ¡Cuidado, cuidado, que el agua rompe la cartulina y se va a mojar todo!

Pero no se rompió la cartulina porque sacamos una bolsa de plástico de nuestra caja de herramientas -y si no, hubiéramos utilizado la del bocadillo- para impermeabilizarla, ¡sin problemas!, y conforme vaciábamos el agua sobre la bolsa, íbamos consiguiendo la forma del decímetro cúbico encajado. Los ojos de los espectadores se abrían como platos para comprobar el milagro, la magia. Increíble pero cierto, el agua rellenó la caja entrando hasta la última gota sin dejar hueco alguno. Pepe o José, Paco o Francisco, Pedro o Perico, decímetro cúbico o litro.

Para expresar la medida de capacidad de depósitos, recipientes, envases, frascos, motores, órganos huecos de nuestro cuerpo..., se deben emplear unidades adecuadas a cada caso. Nos pusimos manos a la obra, elaborando el siguiente cuadro:

UNIDADES	SIGNIFICADO	"SINÓNIMOS MATEMÁTICOS"	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Kl, kilolitro.	1.000 litros.	m^3, metro cúbico.	Recordar recipientes reales de 1000 litros. Comentar el recibo del agua de beber.	Recipientes grandes. Recibo del agua. Camiones cisterna. Depósitos de agua del pueblo.
Hl, hectolitro.	100 litros.		Recordar bidones de 100 litros. Confeccionar una caja de cartulina de 100 litros. Ejemplo de 5 dm por 5 dm por 4 dm.	Recipientes medianos. Bidones de agua, aceite o gasolina. Producciones de líquidos: leche, vino aceite...

UNIDADES	SIGNIFICADO	"SINÓNIMOS MATEMÁTICOS"	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Dl, decalitro.	10 litros.		Llenar un cubo de agua litro a litro, hasta diez.	Recipientes pequeños. Cubos de agua.
l, litro.	Capacidad de una caja cúbica de un decímetro de lado.	dm^3, decímetro cúbico, ¡por definición!	«Hacer la magia» de meter el agua que contiene una botella de un litro en una caja de un decímetro cúbico.	Envases para toda clase de líquidos: agua, aceite, bebidas; productos de limpieza, abonos líquidos, fitosanitarios... Carburantes.
dl, decilitro.	10 veces más pequeño que un litro.		Repartir un litro de agua en 10 vasitos del café por ejemplo. Cada café es un decilitro.	Vasos. Envases pequeños.
cl, centilitro.	100 veces más pequeño que un litro.		Repartir cada uno de los vasos anteriores en 10 «tapones». Cada tapón es un centilitro.	Bebidas, refrescos. Conservas, latas. Medicamentos. Productos químicos.
ml, mililitro.	1.000 veces más pequeño que un litro.	cm^3, centímetro cúbico.	Fijarse en la capacidad de recipientes pequeños, frascos y medicamentos.	Medicamentos. Productos de limpieza. Productos químicos. Higiene: colonia, champú, gel. Cilindrada.

Observaciones del grupo:

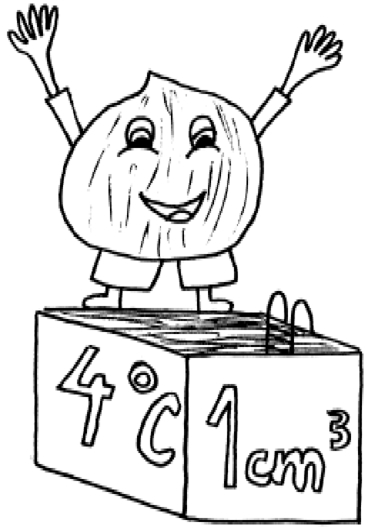
1) Al comparar las medidas.

Cualquiera de ellas es 10 veces más grande que su vecina pequeña y 10 veces más pequeña que su vecina grande, porque así lo decidieron sus inventores, al igual que la naturaleza decidió que tuviéramos 10 dedos a la mano.

2) Preguntas «tontas»:

¿Cómo te llamas, Pepe?
Respuesta: Me llaman José.
¿Cuántos mililitros tiene un litro?
¿Cuántos centímetros cúbicos tiene un decímetro cúbico?
¿Qué relación hay entre un mililitro y un centímetro cúbico?
¿De qué color es el caballo blanco de Santiago?
¿Cuántos litros tiene un kilolitro?
¿Cuántos decímetros cúbicos tiene un metro cúbico?
¿Metro cúbico o kilolitro?
¿Francisca o Paca?

UN PASEO PESADO: EL PESO (SATÉLITE DE LA MEDIDA)



El peso, todo cuerpo pesa, se dice que pesan hasta los años. De alguna manera podemos decir que el peso es la fuerza del cariño que la Tierra tiene a los cuerpos que están a su alrededor, haciendo todo lo posible para mantenerlos unidos a ella.

- EL MAESTRO: Son muchas las actividades humanas, como las relacionadas con compras, ventas, transporte, alimentación, medicina, deporte..., que precisan de un patrón de medida, que ayude a organizarse. Este es el gramo, que es el peso de agua destilada y fresca a 4 grados de temperatura, que entra en una cajita de un centímetro cúbico.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La cajita del centímetro cúbico parece hecha a la medida de un garbanzo, por eso le podemos llamar familiarmente la «cajita de garbancito».

- EL MAESTRO: Hoy os propongo una experiencia refrescante. Consiste en llenar la cajita de agua fresca que he traído recién sacada del frigorífico y vaciarla después en la palma de la mano para sentir el frescor de un gramo.

Después de notar este gramo de frescor,el grupo elaboró el siguiente cuadro, en el que naturalmente se detalla la identidad y el enlace con la realidad de cada una de las unidades de peso, de uso más corriente.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
Tm, tonelada métrica.	1.000 kilogramos. 1.000.000 gramos.	Buscar en la documentación de un coche su peso. ¿Cuánto pesa aproximadamente un metro cúbico de agua?	Mercancías en camiones, barcos, tractores... Vertidos.
Qm, quintal métrico.	100 kilogramos. 100.000 gramos.	Compararlo con nuestro peso.	Mercancías.
Mg, miriagramo.	10.000 gramos.	Sopesar bolsas de frutas, cubos de agua...	Alimentos. Agricultura.
Kg, kilogramo.	1.000 gramos.	Sopesar un kilo de azúcar o de sal. Sopesar un kilo de fruta verde o de frutos secos.	Alimentos. Pesos de animales. Nuestro propio peso.
Hg, hectogramo.	100 gramos.	Sopesar paquetitos de alimentos. Sopesar una naranja, una pera, una manzana...	Ingredientes en recetas. Frutas y verduras. Carnes y pescados.
Dg, decagramo.	10 gramos.	Sopesar una bolsita de azúcar de endulzar las infusiones.	Bolsitas de azúcar.
g, gramo.	Peso de un centímetro cúbico de agua fresca y destilada a 4 grados centígrados.	Construir un centímetro cúbico de cartulina o papel milimetrado, impermeabilizarlo, llenarlo de agua fresca y vaciarla en la palma de la mano para notar el frescor de un gramo.	Infusiones. Pequeños sobres de alimentos. Medicamentos. Productos fitosanitarios. Disoluciones.
dg, decigramo.	10 veces menos pesado que un gramo.	Llenar y vaciar el contenido de un decigramo de agua utilizando el cuentagotas. Sopesar una bola de papel de un decagramo, partiendo previamente un papel de un gramo en 10 trozos iguales.	Composición de alimentos. Medicamentos. Química.
cg, centigramo.	100 veces menos pesado que un gramo.	Ver más que sopesar una bolita de papel de un centigramo, que se obtiene al hacer 10 trozos uno de los anteriores.	Composición de alimentos. Medicamentos. Productos químicos.

UNIDADES	SIGNIFICADO	PRÁCTICAS Y RECUERDOS	APLICACIONES
cg, centigramo.	100 veces menos pesado que un gramo.	Ver más que sopesar una bolita de papel de un centigramo, que se obtiene al hacer 10 trozos uno de los anteriores.	Composición de alimentos. Medicamentos. Productos químicos.
mg, miligramo.	1.000 veces menos pesado que un gramo.	Tener cuidado de que no se nos pierda una bolita muy pequeña de papel que se obtiene al volver a repartir en 10 trocillos uno de los anteriores.	Composición de alimentos. Medicamentos. Química.

Observaciones del grupo:

1) Las unidades de peso también siguen lógicamente la sencilla lógica decimal, eso es incuestionable.

2) Para hacer prácticas de pesadas se necesita un peso o una balanza, que debemos tener en clase. También podemos construir nosotros mismos una balanza con palicos y cañicas, mejor dicho con barillas de madera, plástico o alambre, hilos y tapas de plástico o cartón, combinando estos elementos con ingenio y con paciencia. Y hasta de una percha de la ropa podemos hacer una balanza.

NÚMEROS BAJO LA LLUVIA (SATÉLITE DE LA MEDIDA)

Después del telediario del lunes por la noche, salió la mujer del tiempo anunciando lluvias en la zona de Valencia, Alicante y Murcia; la baja presión, la B, estaba centrada de lleno en el Mediterráneo.

- **EL MAESTRO:** Anoche, después de ver y oír la previsión del tiempo, me puse contento por dos razones. La primera es colectiva, porque no cae una gota, lo que se dice una sola gota, desde hace cuatro o cinco meses; los campos, las huertas y las gentes están tristes de sequía. La otra razón es por nosotros, por nuestro grupo, puesto que hemos estado trabajando casi un mes las unidades de medida, pero no hemos tenido la ocasión adecuada para hacerle números a las precipitaciones. Esta deseada lluvia además de subirnos el estado de ánimo, también va a cambiar un poco el curso de nuestras matemáticas, al menos durante una sesión.

El martes a las tres de la tarde, después de dejar los paraguas en el paragüero, entramos a la clase. En la calle empezaron a caer las primeras gotas, amenazaba lluvia, aunque en esta ocasión no era una amenaza sino un regalo del cielo.

Al mismo tiempo dio comienzo la clase de Números, sí, pero no podía ser igual que los demás días; en el ambiente se respiraba humedad, afuera se veían y oían las canaleras, estaba lloviendo ya, lo que se dice canal con canal. Oportunidad ideal para escurrirle números al agua.

- **EL MAESTRO:** ¿Cuánto tiempo tardará este bote -uno de leche condensada y vacío, sin tapadera- en llenarse si lo ponemos en la calle?

- **JUAN ANTONIO:** ¿Debajo de la canalera?

- **EL MAESTRO:** No hombre, a cielo raso, mejor dicho, a cielo lluvioso.

- ALGUNOS:

  - 5 minutos.

  - 2 minutos.

  - 10 minutos.

- **OTROS:**

  - 20 minutos.

  - 30 minutos.

- **LOS MÁS ATREVIDOS:**

  - Medio minuto.

  - Casi una hora.

- **EL MAESTRO:** ¿Hacemos la prueba?

Sacamos el bote a la calle, bajo la lluvia, dejándolo a la vista. Pasó el medio minuto, uno, dos, cinco y hasta diez minutos. Observamos algo que parecía mentira, el bote solo contenía una fina película de agua en el fondo.

- **CASI TODOS:** ¡No puede ser de ninguna manera!

Esperamos un poco más y en vista de que apenas recogía agua del cielo, volvimos *a clase a seguir con las medidas, seguros de que el bote no saltaría en las dos horas siguientes. Una segunda sorpresa nos esperaba al terminar la sesión y comprobar que en el bote solo había un dedo de agua, a pesar de que seguía lloviendo bastante bien.*

- **MIGUEL:** ¡Increíble!

- **LUISA:** ¡Esto no tiene ninguna explicación lógica!

- **JOSÉ ANTONIO:** ¡Me lo explique!

- **MARÍA:** ¡Si no lo veo no lo creo!

- **MANUEL:** ¡Ni que el bote estuviera roto!

- **EL MAESTRO:** Los deberes para pasado mañana consisten en encontrar posibles explicaciones a este fenómeno del bote que no quiere llenarse con la lluvia.

El jueves amaneció un día soleado, espléndido. Regresamos a clase por la tarde.

- **ANTONIA:** Cuando me fui de aquí puse un barreño en mi terraza, y después de la lluvia de toda la noche tampoco se había llenado, pero comprobé que había recogido siete botes. Me ha surgido un interrogante, ¿dará igual el tamaño de la vasija que pongamos para medir la lluvia?

Un nudo saca a otro, se suele decir, pero en este caso las dudas se enredaban en cadena. Otro dicho popular es que nunca llueve a gusto de todo el mundo, aunque en un mismo lugar llueva igual para todos.

- **EL MAESTRO:** Imaginemos una nube uniforme sobre Mula, una lluvia de «temporal», debajo de la cual coloquemos distintos tipos de vasijas de paredes verticales. ¿Alcanzará el agua el mismo nivel, la misma altura en todos los recipientes?

- **ALGUNOS:** No, sí, no, no, por supuesto, claro que sí, que no... me quiere, no me quiere... me quiere.

- **ISIDRO:** Claro que sí, por una razón muy convincente, -que nos convenció a todos- y es que la nube no sabe la vasija que tú le pones debajo, si es que pones alguna, la nube no es inteligente, está en las nubes; por tanto está claro que el nivel será igual independientemente de la vasija que coloques.

La reflexión de Isidro resolvía la cuestión que planteaba Antonia, pero quedaba otra todavía, ¿por qué no se llenaba el bote tan rápido como esperábamos?

- **JOSÉ LUIS:** Coloqué un bote, de la leche condensada, en mi terraza, cuando llegué a mi casa después de la clase del martes; y después de un día y dos noches lloviendo sin parar, aun le faltaba un dedo para saltar; ¡y yo que pensaba que se llenaba en medio minuto!

- **SEBASTIÁN:** Y en menos de medio minuto lleno yo un bote de agua.

De tontería lo dijo Sebastián pero posiblemente dio con la clave de la explicación *de por qué nuestras respuestas habían oscilado entre medio minuto y una hora, cuando en realidad pasaron más de treinta horas sin terminar de llenarse. La experiencia más corriente de asociación de botes o vasos con agua, en nuestra mente, pasa sin lugar a dudas por el grifo. No es muy corriente poner botes en la calle, terraza o patio para comprobar la cantidad de lluvia que cae. Los medios de comunicación te lo dan hecho, te informan al milímetro y al litro por metro cuadrado.*

- **EL MAESTRO:** ¿Qué os parece si llamamos a la Comunidad de Regantes para que nos pase datos de esta lluvia.

- **ALGUNOS:** Vale, vale, nos parece muy bien la ocurrencia.

- **EL MAESTRO** (hilo telefónico)**:**

    - Hola Jesús, ¿qué tal?
    - Muy bien, gracias.
    - Mira, estamos trabajando las Matemáticas conectadas con la vida, con acontecimientos de actualidad. Hoy queremos hacerle unos números al agua que ha caído.
    - ¡No me digas!, ¿tanto?
    - ¿He oído bien?, ¿has dicho 100 litros por metro cuadrado?
    - ¡Ya estamos contentos!
    - Muchas gracias, Jesús.
    - Hasta luego.

Después de la conversación telefónica se compararon los datos referentes a la lluvia:

a) Según el pluviómetro de la Comunidad de Regantes, habían caído 100 litros por metro cuadrado.

b) Según nuestro «pluviómetro casero», había caído una altura de agua de 10 centímetros, coincidente por casualidad con la altura del bote, ya que «un dedo» de agua de las tres a las cinco del martes, más un bote menos «un dedo» del resto de la lluvia, que midió José Luis, llena el bote que mide un decímetro de altura. Traduciendo los centímetros a milímetros, 10 centímetros por 10 milímetros cada centímetro, es igual a 100 milímetros.

Al comparar los datos de ambos pluviómetros nos dimos cuenta que se daba una coincidencia, no sabíamos si por casualidad, del número de litros por metro cuadrado, 100 litros de agua caída del cielo, con el número de milímetros de altura de agua recogida en nuestro bote lechero, 100 milímetros. Curiosa coincidencia. Reflexionamos sobre el caso con una suposición, imaginando una caja grande de un metro cua-

drado de fondo con paredes laterales de un metro de altura, sin tapadera y colocada en la calle; puestos a imaginar supusimos también que se había llenado, aunque eso no sea posible ni mucho menos en una sola lluvia, ¿verdad? En realidad, ¿cuánto tiempo se necesitaría para que desbordara este cajón aquí en la Región de Murcia tal y como está la situación de lluvia? Bien, pasado este tiempo, estos años, que el lector puede haber pensado, como lo hicimos nosotros en el grupo, el agua habría alcanzado la altura de un metro, o sea 1000 milímetros. Por otra parte, habíamos hecho el razonamiento de que a un cajón de un metro cúbico le cabe 10 filas de 10 cajas de decímetro cúbico o litro, o sea 100 cajas en la capa del fondo, que por 10 capas de cajas son 1000 cajas, 1000 decímetros cúbicos, 1000 litros, el mil de la coincidencia. ¿Qué conclusión podemos sacar de los datos de este razonamiento paralelo?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO:

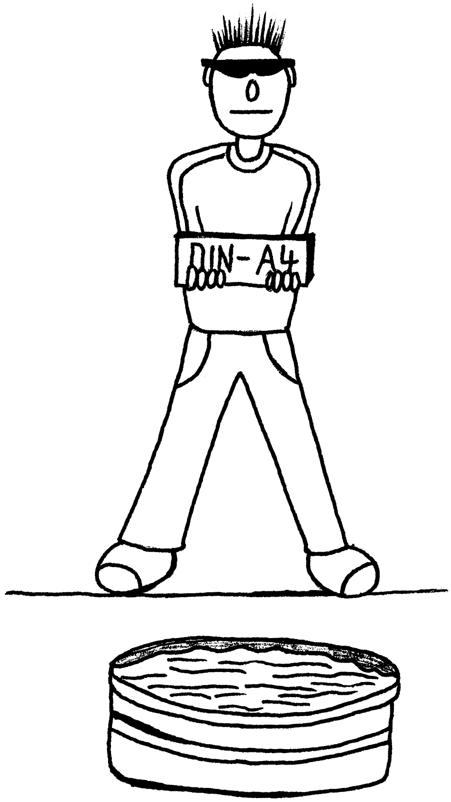
1000 litros por metro cuadrado, 1000 milímetros.
Si mil para mil,
uno para uno y
tantos para tantos;
ejemplos: 15 milímetros para 15 litros por metro cuadrado,
100 milímetros para 100 litros por metro cuadrado.
Bote seco, ganas de que llueva,
varios botes llenos, ganas de que salga el sol.
Y además dicen que nunca es mal año por agua,
al menos en Murcia.

Gracias a esta experiencia, hemos descubierto un invento sencillo y útil, el PLUVIÓMETRO CASERO, cualquier vasija de paredes verticales, en la que al medir la altura de agua recogida, nos podamos dar una idea bastante aproximada de la cantidad de lluvia caída.

Nota: Este pluviómetro casero no es exacto como un pluviómetro de verdad, pero nos da una idea aproximada, con menor error cuanto más ancha sea la vasija, cuanto menos sople el viento para que caiga a plomo, y cuanto más suave sea la lluvia para que no salte fuera.

Y colorín colorado, seco o mojado, esta historia que no es cuento, no se ha terminado, porque cada vez que llueva tendremos una nueva oportunidad de poner sencillamente un vaso, un bote, un barreño o cualquier recipiente parecido que tengamos a mano, al menos por curiosidad de enterarnos de lo que llueva por nuestros propios medios.

¿FLOTARÁ O SE HUNDIRÁ? (SATÉLITE DE LA MEDIDA)



- **EL MAESTRO** (que entra con cuatro paquetes de hojas DIN A4 en la mano)**:** Hola, ¿qué tal?

- **ALGUNOS:**

  - ¿Hoy tenemos examen?
  - ¿Tenemos control?
  - ¡Qué nervios, no estudié anoche! -como si estudiar matemáticas o cualquier cosa la noche antes del examen fuera la solución para saber más.
  - ¿Será fácil?
  - ¿Aprobaré?
  - ¿Me suspenderán?

- ¿Algún tipo de prueba escrita?

- **EL MAESTRO:** Más bien os propongo una prueba pasada por agua. ¿Flotará o se hundirá este paquete en el agua? He ahí la cuestión. Solo se permite utilizar regla, lápiz y papel.

Se procedió al reparto de un paquete de DIN A4 por grupo, que fue sopesado por todos, cuya previsión casi unánime fue de hundimiento. En cada uno se afrontó la duda de manera ligeramente diferente, aunque en esencia se siguió el mismo proceso. A continuación analizamos los pormenores de uno de los grupos.

- **JAVIER:** Una piedra se hunde en el agua, cae al fondo, mientras que un corcho flota.

- **MARÍA:** Es muy pesado -dice mientras sopesa el paquete en sus manos- yo creo que se hunde, casi como una piedra.

- **LUISA:** Es muy agradable cuando te sientes flotar en la piscina o en el mar, cuando te acuestas encima del «colchón de agua» boca arriba, relajada y te mantienes a flote. ¿Por qué será?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Arquímedes, hace más de 2000 años también reflexionó sobre esta cuestión, al darse cuenta de que en el baño sus piernas, brazos y todo su cuerpo pesaban bastante menos, lo que le permitió descubrir el principio de Arquímedes, y gritar ¡eureka!

- **JUANA:** Me da la impresión, así intuitivamente, de que si dejas caer un trozo de papelillo de DIN A4 sobre el agua flotará al principio, mientras esté seco, que es lo que ahora nos estamos planteando; pero conforme se vaya mojando, no sé lo que pasará, tengo mis dudas. Sería interesante experimentarlo para observar lo que sucede.

- **JAVIER:** Sigo dándole vueltas en la mente a la piedra y el corcho: La piedra se hunde porque es más pesada que el agua, y el corcho flota porque es menos pesado, más ligero. Lo que en realidad se pone en juego son los pesos relativos, las densidades de las cosas.

- **EL MAESTRO:** Efectivamente, así es. Sabemos que lo más pesado cae al fondo y lo más ligero tiende a subir. Como referencia está la densidad del agua, que es uno. Para entenderlo mejor podemos pensar que hay empate a uno al comparar el peso del agua pura y fresca a 4ºC, que cabe en una cajita de un centímetro cúbico hecha a la medida de Garbancito, con el volumen que ocupa esta, un gramo de agua en un centímetro cúbico, uno a uno, uno de densidad.

- **PEPE:** Equis en la quiniela, x de empate.

- **EL MAESTRO:** El peso de esa cantidad de agua es un gramo porque así se decidió y así se bautizó hace unos doscientos años en Francia, cuando se estableció el Sistema Métrico Decimal.

- **MARÍA:** Al hilo de esos razonamientos, parece ser que la clave de la cuestión consiste en comparar el peso de este paquete de papel con el que tendría este mismo forro de paquete si estuviera lleno de agua contenida en cantimplora imaginaria.

- **TODOS:** Claro, claro... Está clarísimo....

Utilizando el letrero del paquete (500 hojas, 80 G/m^2), la regla y nuestros conocimientos sobre medidas, conseguimos en pocos minutos saber el peso del mismo, 2’5 kilogramos aproximadamente. Aprovecho la ocasión para invitar al lector a sopesar un paquete de hojas DIN A4 con sus manos. Si decide hacerlo se podrá dar una mejor idea de cómo se vivió esta sesión, ya que pensar lo que pesa un paquete sin tocarlo no es lo mismo que tenerlo en las manos, que notarlo a través del tacto, esto enriquece el pensamiento del tanteo.

Por otra parte calculamos el volumen del paquete, con la idea de traducirlo a peso en agua de esta cantimplora imaginaria. Largo por ancho y por alto, 3000 centímetros cúbicos aproximadamente, 3 litros de agua, 3 Kilogramos de agua.

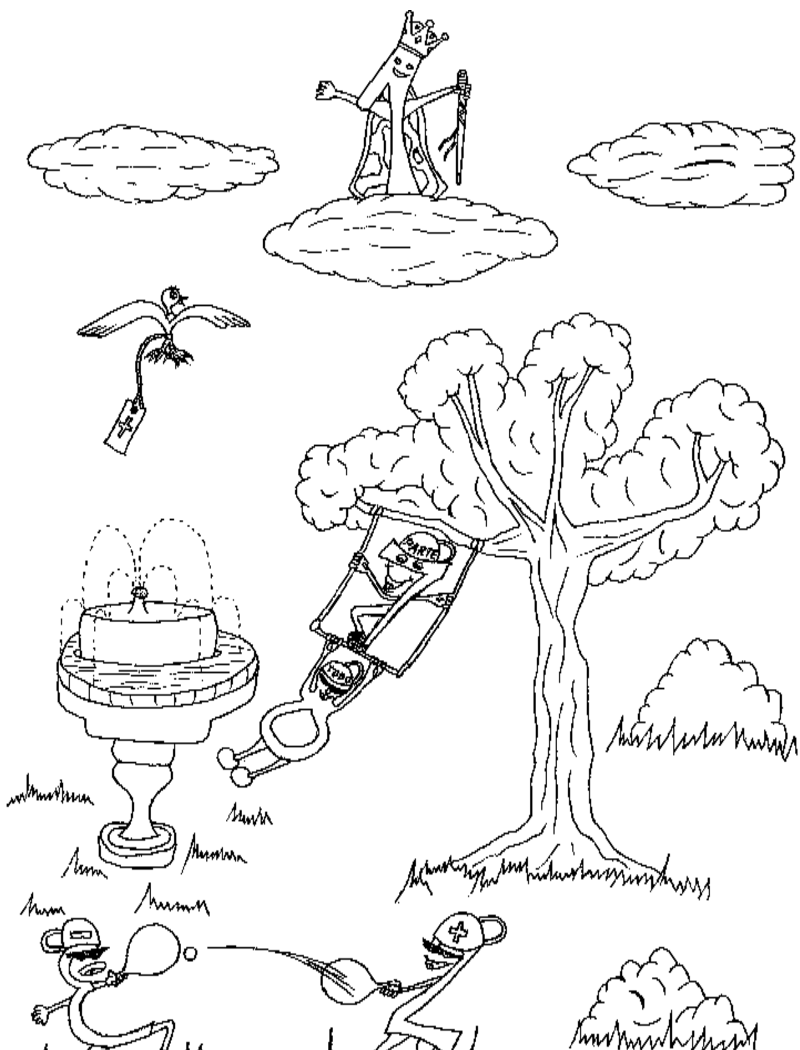
La duda estaba despejada, los números cantaban que el papel pesa menos que el agua, 2´5 kilos sobre 3 kilos, al comparar el mismo volumen. Por tanto si arrojábamos el paquete de hojas DIN A4 sobre un barreño con agua, por ejemplo, seguro que flotaría.

Faltaba comprobarlo, así lo hicimos, por supuesto, para no dejar el proceso incompleto. Plastificamos el paquete para no humedecer las hojas, y ¡flotó!, en contra de lo que muchos habíamos previsto, dándole la razón a los números.

- **EL MAESTRO:** La densidad se calcula comparando el peso con el volumen. En el agua se da empate a uno, mientras que en el papel el peso pierde respecto al volumen, dando cero, coma y pico; por eso flota éste en aquella.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La nota o calificación del proceso seguido en esta prueba pasada por agua es notable alto por la investigación llevada a cabo en pequeños grupos, y porque hay que mojarse a veces para entender mejor las cosas.

EL UNO, EL TODO Y LA PARTE:
ESTUDIO DE NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y PARTIDOS.
(PLANETA DE LOS NÚMEROS)



Aquella tarde, el maestro sacó de la «caja de herramientas» un rollo de papel de envolver paquetes, de más de un metro de largo, metió los dedos pulgar e índice un poco dentro de éste, sacando lentamente algo que parecía una caña, era la caña de la escoba que el señor Ginés, del grupo de Tercera Edad del Centro de Educación de Adultos «Río Mula», había regalado al Centro para una exposición de artesanía, cinco años atrás.

- EL MAESTRO:

«Si yo tuviera una escoba, cuántas cosas barrería».

(Lo dice la canción, versión original).

«Si yo supiera el valor del UNO, cuántas cosas calcularía».

(Lo podemos decir nosotros, versión matemática).

Por ejemplo, si yo supiera lo que cuesta un kilo de patatas, podría calcular fácilmente lo que cuestan 25 kilos.

- EL GRUPO:

- Si yo supiera lo que cuesta un metro cuadrado de losa...
- Si yo supiera lo que carga un camión...
- Si yo supiera lo que contiene una caja...
- Si yo supiera lo que pesa un melón...
- Si yo supiera lo que cuesta un día de Seguridad Social en España...
- Si yo supiera lo que cuesta un día de Educación y Cultura...
- Si yo supiera el tiempo que se tarda en hacer una...
- Si yo supiera...UN...
- Si yo supiera...UNO...
- Si yo supiera...UNA...

- EL MAESTRO: Conocer el valor del uno es como tener la sartén por el mango.

- MARÍA: O la escoba por la caña.

- EL MAESTRO: Sirva esta sencilla escoba, instrumento para barrer las casas, para que recordemos siempre la importancia del «uno», del valor del uno, que a modo de escoba mágica barre todo el edificio matemático.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Para saber Matemáticas, basta con tener cuatro ideas claras. La más básica, la primera es posiblemente la referida a «el uno, el todo y la parte».

- EL MAESTRO: El número uno, sobre el que gira constantemente la cosa matemática no es ni más ni menos que una simple raya, un pequeño trazo de dibujo, compañero de personas, animales, vegetales, toda clase de cosas, oficios, trabajos, actividades..., que parece hecho a imagen de nuestro dedo índice, legado por las grandes culturas de la Historia de la Humanidad, como los egipcios, los hindúes, los árabes, los romanos, los chinos...

También hay «unos rayados», en las historias personales de las gentes; en la silueta del índice que levanta cada niño y cada niña cuando ha cumplido un añito; en las paredes de trojes graneros de las casas de campo, guardando la memoria de sudor de frente para ganarse el pan; en las paredes de los calabozos para el control amargo del paso del tiempo; en los recuerdos de nuestra niñez, haciendo rayitas sobre arena o tierrecilla fina; en otros recuerdos de rayas de tiza en las pizarras, como soporte de elecciones democráticas de delegados de curso, de temas a tratar, de dónde hacer el viaje de estudios...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El uno es la primera piedra del edificio de los Números, en éste todo se hace a su medida, bien a base de repetirlo, o de repartirlo, rompiéndolo en partes más pequeñas cuando no encaja entero.

- **EL MAESTRO:** Hay «unos duros», compactos, irrompibles, enteros, asociados a cosas indivisibles como ¿un átomo?, una bicicleta, un camión, una cabra, un voto, un participante, un socio, una madre, un amigo... Y «unos blandos», frágiles, preñados de cosas, compuestos de piezas más pequeñas, como una tarta que se trocea para compartir su sabor, un sueldo por el que recibes más o menos pesetas, las pesetas que cuesta un kilo de pan, un metro cúbico de agua que embebe 1000 litros o decímetros cúbicos, un kilogramo que soporta 1000 gramos, un taxi que puede llevar varios ocupantes, el «sudor de un jornal» que puede desarrollar no se cuántas unidades de trabajo, una hora de reloj a la espera de que pasen 60 minutos, los 360 grados de un redondel, que se apiñan en forma de cuñas, los 90 kilómetros que come un coche en una sola hora, los 1200 kilómetros que un avión puede volar en esa misma hora acortando las distancias, los aproximadamente 360000 kilómetros que un rayo de luz penetra en el espacio en el segundo de un abrir y cerrar de ojos, un grupo de voluntarios de Cruz Roja, un grupo ecologista integrado por amantes de la Naturaleza, las pesetas que se dedican en un año a cada una de las partidas presupuestarias de lo educativo, lo cultural, lo social, para ayuda humanitaria, para la investigación, para la formación, para la Naturaleza y la Sociedad...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Cuántas cosas revoloteando alrededor del UNO!

- **EL MAESTRO:** Cuando sabes lo que vale el uno, basta con repetirlo a base de sumarlo una y otra vez o haciendo una suma acelerada con la multiplicación, para calcular lo que vale el todo. Ahora bien, si disponemos de dos datos referidos al todo...

- **CARI:** ¿Qué es eso del todo?

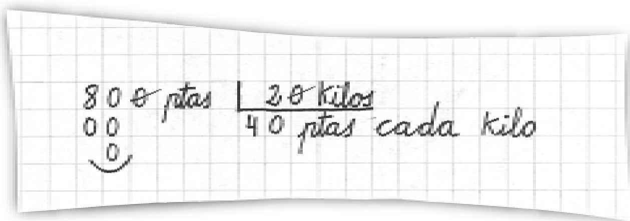
- **EL MAESTRO:** Os lo diré con unos ejemplos. Todo lo que cuesta una caja de naranjas que pesa 20 kilos, todo el tiempo que tardas en llegar andando a tu casa, todo lo que cuesta regar un huerto de 6 tahullas, todo lo que cuesta a la Administración la Educación de Adultos en el curso 96-97, todos los botes que hacen falta para enlatar 3000 kilos de albaricoque, toda la gasolina que gasta el coche cada 100 kilómetros, todos los litros de agua que caen en 50 horas de lluvia, todo el porcentaje de mujeres que hay en una clase, todo el todo

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Si analizamos el contenido de estos ejemplos, reflejo de otras tantas situaciones tomadas de la vida misma, nos damos cuenta que cada una está referida a un mismo «todo», medido bajo dos puntos de vista, referido a dos unos, dos unidades diferentes, dando lugar a dos cantidades, que es la condición mínima para poder hacer una cuenta, puesto que cuando conoces un solo dato ni puedes ni te hace falta hacer cuentas porque ya lo sabes, obvio.

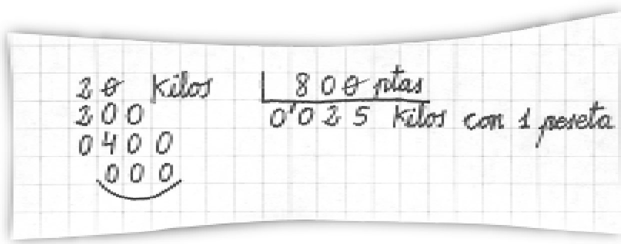
- **EL MAESTRO:** Las parejas de datos en los ejemplos anteriores podrían ser las siguientes:

- En la caja de naranjas, las pesetas y los kilos.
- En el camino de regreso a casa, la distancia y el tiempo.
- En el riego, las pesetas y las tahullas.
- En la Educación de Adultos, las pesetas invertidas y las personas que elevan su nivel cultural.
- En la conserva, los botes y la fruta.
- En la lluvia, el agua y el tiempo que está lloviendo.
- En las mujeres de la clase, el cien y el número de personas.
- En un todo, el otro todo.

Si comparamos, si repartimos, la cantidad más grande entre la menor, no sólo porque la división es más fácil, evitando el «cero, coma y pico», sino porque la mente lo ve más claro, descubriremos el valor del uno, dicho de forma más precisa sabremos el número de unidades de la cantidad grande que le corresponde a cada una de las unidades de la cantidad pequeña. Por ejemplo, supongamos que una caja de 20 kilos de naranjas vale 800 pesetas; repartiendo el dinero entre los kilos vemos que 1 kilo vale 40 pesetas, una unidad de peso vale cuarenta unidades de peseta, que dicho sea de paso no es mucho para quien las cultiva.



También podíamos haber repartido 20 kilos entre 800 pesetas para ver los kilos que se pueden comprar con una peseta.



- **PACA:** Hacer esta última cuenta no se le ocurre ni al que asó las mantecas, como dicen en mi pueblo.

- **Mª CARMEN:** En relación con el porcentaje de mujeres que estamos hoy en clase, ¿dónde está el todo y dónde está el uno?

En total éramos 20 personas, 12 mujeres y 8 hombres. Cada cual hizo su cálculo antes de la puesta en común. Destacamos la intervención de Carmen.

- **CARMEN:** He supuesto que la sala está dividida en un total de 100 trozos de suelo, que repartidos por igual entre las 20 personas que estamos hoy, tocamos a 5 trozos para cada uno. Por tanto las mujeres ocupamos hoy 5 trozos por 12 veces, igual a 60 trozos, 60 por ciento, 60%, somos mayoría en esta ocasión.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El todo está en las 100 partes en que imaginariamente se divide el suelo de la clase, y también en las 20 personas reales que la ocupan en este momento. El uno está en los 5 trozos imaginarios disponibles para cada persona. El todo relativo o la parte está en los 60 trozos de suelo y en las 8 mujeres. Ningún dato escapa del simple circuito integral del uno, el todo y la parte.

El uno y el todo de estos ejemplos y de otros muchos, puede servir de caldo de cultivo para el desarrollo de la capacidad matemática, sencillamente poniendo en práctica la herramienta del método de la unidad, acorde con nuestro propio y natural modo de pensar. En nuestro grupo nos planteamos los más diversos problemas en torno a varias situaciones, unos tomados de la realidad y otros arrancados a nuestra *imaginación.*

- **ANDRÉS:** ¿Y aquello de los números naturales, los enteros, los fraccionarios, los decimales?

- **LUISA:** No pides tú nada.

- **EL MAESTRO** (ante la Pedagogía de la pregunta)**:** No creas, Luisa, tampoco es tanto. Bajo la perspectiva del uno, el todo y la parte, resulta bastante sencillo entender la estructura de las familias de números. De forma natural, los números empiezan en el uno, 1, y añadiendo de uno en uno, 1 a 1, tenemos el 2, el 3, el 4..., el 10..., el 20..., el 50..., el 100..., el 973..., el 1000...

- **PERICO:** Perdón, esta serie me remueve en la memoria una pregunta ingenua que le hice a mi abuelo de pequeño: ¿Cuál será el número más grande que existe? Y también recuerdo que me dijo mi abuelo que por mucho que contaras de uno en uno jamás llegarías al final de los números. Al principio no lo entendía pero aquellas reflexiones me han ayudado a comprender la idea de infinito con el paso de mis años.

- **EL MAESTRO:** En esta familia de números naturales, se pueden dar algunas relaciones que son prácticamente de sentido común. Veamos algunos comportamientos particulares con ejemplos concretos. De la generalización, que se encargue la mente de cada cual.

• Ejemplo 1:

Si juntamos dos cantidades, dos números naturales, no debe importar el orden en que se sumen, ¿verdad?

- **ANGEL:** Ah, ya, por ejemplo en un bosquecillo hay los mismos pinos si sumo los 20 pinos de la margen izquierda con los 30 de la derecha, que si los junto al revés. Puedo cambiar, conmutar tranquilamente las cantidades.

$$20 \text{ pinos} + 30 \text{ pinos} = 30 \text{ pinos} + 20 \text{ pinos}$$

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 2:

Si tenemos que calcular la superficie del suelo de la sala donde estamos, ¿dará igual multiplicar el largo por el ancho que al revés?

- **MARÍA:** Evidente, da exactamente igual. Podemos conmutar el largo y el ancho porque no se alterará la superficie del suelo, está claro.

$$\text{largo} \times \text{ancho} = \text{ancho} \times \text{largo}$$

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 3:

Si tenemos tres cantidades para unir, ¿las podemos asociar en el orden que nos convenga o apetezca?

- **MANOLI:** Por supuesto, si dispongo de tres monederos, puedo sumar el dinero que contienen, vaciándolos y anotando las cantidades en cualquier orden, ¡qué más da!

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 4:

Si queremos saber el volumen del aire que respiramos en la habitación donde estamos, ¿podemos combinar el largo por el ancho y por el alto a nuestro capricho?

- **PAQUI:** Efectivamente, si me pongo en el punto de vista de una mosca danzarina, lo que para mí es el largo para ella puede ser el ancho o el alto cuando se para sobre la pared o el techo. La mosca podría asociar las dimensiones en diferente orden en sus revoloteos.

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 5:

En algunos casos se puede presentar un planteamiento en el que procede poner en juego un número que multiplica a una suma de números. Supongamos que compras dos bolsas de patatas nuevas en el mercado, una que pesa 6 kilos y la otra 4 kilos. El precio de un kilo es de 40 pesetas. ¿Cómo podemos saber lo que cuestan las patatas? ¡Adelante!

- **MARIANA:** Muy fácil, si juntamos 6 kilos y 4 kilos, comprobamos que hemos comprado un total de 10 kilos; y 40 pesetas el kilo por 10 kilos, igual a 400 pesetas. Por cierto, no son demasiado caras para lo buenas que están.

- **ANDRÉS:** Otra manera de hacerlo. La primera bolsa cuesta 40 pesetas el kilo por 6 kilos, igual a 240 pesetas; y la segunda bolsa 40 pesetas el kilo por 4 kilos, igual a 160 pesetas; Juntando las 240 y las 160 nos da un importe de 400 pesetas, lo mismo que has sacado tú.

- **EL MAESTRO:** Vamos a realizar un análisis comparado de estas dos formas de hacer la cuenta.

a) Según Mariana:

40 ptas / kg (6kg + 4 kg)

40 ptas por 10 kg = 400 ptas

Comentario de la jugada: Primero se juntan los kilos de las dos bolsas, multiplicando después todos los kilos por el precio de cada uno.

b) Según Andrés:

40 ptas / kg (6 kg + 4 kg)

40 ptas por 6 kg y 40 ptas por 4 kg

240 ptas + 160 ptas = 400 ptas

Comentario de la otra jugada: Se ha distribuido la cuantía en función de las dos bolsas. El precio del kilo afecta a las dos bolsas. Al final se juntan, se suman las dos cuantías de pesetas, lógicamente, pues no estaría bien que te llevaras una bolsa sin pagar. Matemáticamente podemos decir que se ha cumplido la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

- **PACA:** Esa expresión me suena muy rara, se resbala en mi entendimiento -¿a Paca nada más?- . ¿Y en castellano, así para nosotros?

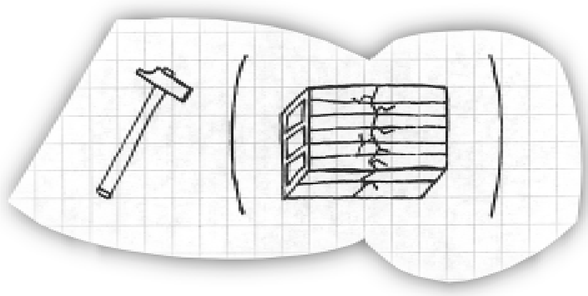
- **EL MAESTRO:** Perdona, te la traduzco con todo el gusto del mundo.

El maestro sacó de la caja de herramientas un ladrillito resquebrajado, casi separado en dos trozos y un martillo. Colocó el ladrillo sobre el suelo en lugar visible para todos, y sin decir palabra alguna le dio un leve martillazo, suficiente para partirlo en dos.

- **EL MAESTRO:** ¿A qué trozo le ha afectado el martillazo?

- **TODOS:** A los dos trozos por igual.

- **EL MAESTRO:** El martillo, comparable en algún sentido al precio del kilo de patatas, distribuye los dos trozos de ladrillo resquebrajado, comparable al paréntesis, que también debemos romper, y que abarca los kilos de ambas bolsas, separadas por los plásticos.



Vosotros diréis como se puede llamar a esto en castellano.

- **PACA:** Para mí la expresión auténtica es «el martillazo sobre el ladrillo».

- **EL MAESTRO:** Si esto sirve para que lo entendáis mejor habrá merecido la pena.

- **LUIS:** Con razón se dice que una imagen vale más que mil palabras.

- **ALGUNOS:** ¡Así se entienden las cosas mejor!

Esta ocurrencia cuasi matemática demuestra una perfecta combinación de intuición y razón para contribuir al buen entendimiento de esta propiedad de los números.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Cuando no hay nada de nada, tratándose de lo que se trate, se convino en traducirlo matemáticamente por un cero, 0.

- **EL MAESTRO:** Podríamos pensar ahora en algunas situaciones de ceros en la vida.

- **ANTONIA:** Si mi cartilla del banco indica 0 pesetas es porque no tengo ni una peseta, aunque podría llorar por un ojo, ya que es peor cuando indica una cantidad de pesetas con una rayita al lado porque quiere decir que estoy endeudada.

- **FELIPE:** Cuando no hay dinero en alguna partida presupuestaria por crisis o por alguna otra circunstancia, se dice que contamos con presupuesto cero, 0 pesetas, en realidad no hay nada que contar.

- **CARMEN:** Si el pluviómetro está en el cero es señal que no ha caído ni gota de agua.

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 6:

El cero, el 0, no afecta para nada en una suma. Podemos decir que es un número neutral, pues así sólo, aislado no pinta nada, no supone nada.

- **GLORIA:** Ya lo sé, pero eso no tiene mucha gracia. Si tengo 15 sillas en mi casa y ¿compro? 0 sillas, sigo teniendo 15 sillas.

15 sillas + 0 sillas = 15 sillas

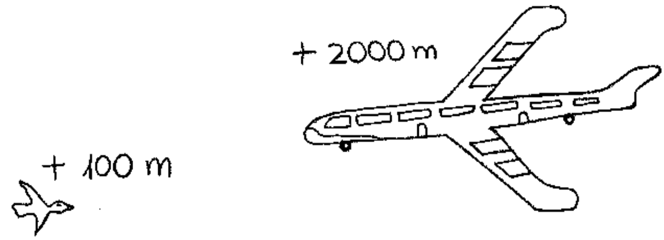
- **EL MAESTRO:**

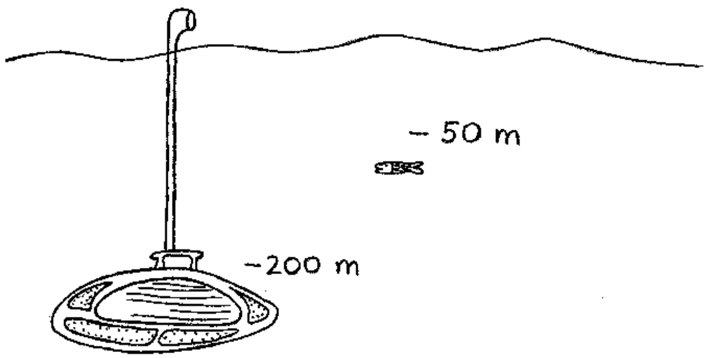
• Ejemplo 7:

El uno, el 1, tampoco afecta para nada cuando lo multiplicamos por otro número.

- **JUAN:** Yo lo veo como un pegado postizo, es neutro, no modifica el resultado de la multiplicación.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Pero no debemos olvidar su verdadero significado, «una vez».





- **EL MAESTRO:** Hola, después de conocer un poco mejor el comportamiento de los números naturales, hoy nos podemos animar a descubrir más números, otros números que necesitamos para poder expresar matemáticamente otras situaciones del entorno, de la vida. Para eso os propongo una especie de juego, que consiste en buscar parejas de contrarios, de contrastes, más concretamente de opuestos; sirva de ejemplo orientativo la siguiente: positivo y negativo.

- **EL GRUPO:** Tener y deber, ganar y perder, poner y quitar, antes y después, por encima y por debajo, calor y frío, llenar y vaciar, ahorrar y gastar, meter y sacar, hacer y deshacer, tirar y recoger, llevar y traer, subir y bajar, construir y destruir, ir y venir, sobrar y faltar, gastar energía y reponerla, dar y recibir, plantar y arrancar, quemar y repoblar, ensuciar y limpiar...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Normalmente estas parejas invitan a hacer balance para saber cómo queda la situación.

- **EL MAESTRO:** Antonia dijo el otro día que si su cartilla del banco indicaba cero pesetas, 0 pesetas, podía llorar por un ojo, económicamente hablando, porque era peor cuando había un número de pesetas con una rayita horizontal al lado (-), equivalente a estar en números rojos. Supongamos que te fijaras sólo en el número de la columna del saldo, 12000 pesetas, por ejemplo. Si ese número no va acompañado de ningún signo es buena seña para tu bolsillo; ahora bien, si le acompaña una simple rayita, aparentemente insignificante, podríamos decir aquello de más vale solo que mal acompañado, porque significa que tienes una deuda de 12000 pesetas, mira a ver si cambia la cosa.

- **ANTONIA:** Claro que sí, cambiaría en 24000 pesetas mi economía, y hasta podría cambiar mi estado de ánimo. El número 12000 con la rayita (-12000), sería negativo para mí, me estorbaría, sería molesto.

- **EL MAESTRO:** Otro ejemplo. No es lo mismo que a un regante le sobre un cuartillo, un cuarto de hora de agua de riego de una hila, que equivale a una salida de agua de 40 litros por segundo; o que le falte un cuartillo.

- **JOSÉ LUIS:** Que me lo digan a mí, que estuve regando el martes y me faltó agua, y hasta la próxima tanda, y hasta se me pueden secar las patatas.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En todas las situaciones, donde un número puede referirse a cosas opuestas, se convino en señalarlo a su izquierda con un signo, una rayita, el signo «-», cuando es negativo, como deber, quitar, restar, vaciar, bajar, sacar, bajo cero, bajo el nivel del mar..., aunque no siempre resulte negativo para ti. Cuando carece de signo o bien le acompaña el signo «+», se entiende que es positivo, como en tener, poner, llenar, subir, sobre cero, sobre el nivel del mar... El cero es la frontera, el límite que separa lo positivo de lo negativo, es un punto de referencia para situaciones contrarias.

- **EL MAESTRO:** La combinación de número y signo, + y -, permite doblar la materia prima de los números naturales abriendo nuevas posibilidades en las cuentas y enriqueciendo las reglas del cálculo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Cada número natural puede así vestir dos trajes diferentes, el + y el -, aunque en ambos casos sigue siendo entero, formado por unos duros, irrompibles, que no se parten.

- **EL MAESTRO:** Los números enteros incluyen los positivos (naturales) y los negativos. Conviene saber algunos comportamientos en sus relaciones a través de las cuentas. Veamos algunos ejemplos significativos para poder intuir algunas reglas de cálculo, además de cumplir las de los naturales.

• Ejemplo 1:

Si en un incendio se queman 25 pinos, el bosque ha perdido 25 pinos, y como signo de tristeza vestimos el 25 con una rayita delante, -25 pinos. Si por desgracia se produce, provocado o no, otro incendio en el que se pierden 40 pinos más, lo anotamos así, -40 pinos. ¿Cómo se podría resumir esta noticia desgraciada con un titular matemático?

- PEPE:

Expresión normal y corriente:

25 pinos quemados y otros 40 pinos quemados, es igual a 65 pinos quemados en total.

Expresión matemática:

-25 pinos + (-40 pinos) = -65 pinos.

Pequeño comentario:

Se suman las dos cantidades sin tener en cuenta el signo.

40 pinos + 25 pinos = 65 pinos.

Es fácil colocar el signo a los 65 pinos, -65 pinos, signo negativo como el de ambos incendios, claro, normal.

Lo que no parece tan normal es que se queme tanto monte, monte tanto, cada año en España y en el mundo entero.

- EL MAESTRO:

• Ejemplo 2:

Si se hace una replantación de 200 encinas en un bosquecillo y otras 300 encinas en otra loma, ¿cómo se podría calcular?

- FRANCISCO JUAN:

Podemos calcular:

+ 200 encinas + (+ 300 encinas) = + 500 encinas

Podríamos decir:

200 encinas plantadas y 300 encinas plantadas, es igual a incremento del pulmón colectivo en 500 encinas.

Comentario:

Sumamos las cantidades dejando para el final la colocación del signo ya que es el mismo y que indiscutiblemente será el positivo, el +, en el planeta de los números, y también positivo en el planeta Tierra.

- EL MAESTRO:

• Ejemplo 3:

Si tu cuerpo toma en un día 2000 Calorías y gasta 2300 Calorías, ¿cómo se te queda el cuerpo?

- LUCÍA: Acaba perdiendo 300 Calorías. Para saberlo, lógicamente quitas, restas el menor del mayor, quedándote con el signo del que predomina, del que tiene mayor valor sin fijarte en el signo, del que cuenta con mayor valor absoluto.

- **EL MAESTRO:** Para multiplicar dos números enteros, procedemos como en los naturales. Pero, ¿ qué signo le corresponde al resultado, al producto?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El escenario de la Naturaleza ofrece muchas posibilidades para el entendimiento intuitivo.

- **EL MAESTRO:**

• Ejemplo 4:

> Situemos nuestro pensamiento en un jardín, donde la mano del hombre, de la mujer, de los niños y las niñas, o bien la actividad de la propia Naturaleza, pueden realizar acciones opuestas como poner y quitar plantas ornamentales; poner plantas resulta positivo para el jardín y quitar es negativo. Por otra parte el estado vegetativo de las plantas puede ser opuesto también; plantas verdes, positivo y plantas secas, negativo.

Se analizaron en grupo las cuatro posibilidades. Sobre el ejemplo concreto de 6 maceteros con 4 plantas en cada uno:

Una) Poner plantas verdes.

6 maceteros por 4 plantas verdes, igual 24 plantas verdes.

+6 maceteros por +4 plantas = +24 plantas.

+ por + = +

Comentario:

El balance es positivo para el jardín porque gana en plantas verdes.

Dos) Poner plantas secas.

6 maceteros por 4 plantas secas, igual 24 plantas secas.

+6 maceteros por -4 plantas = -24 plantas.

+ por - = -

Comentario:

El balance es negativo porque pierde 24 plantas. Poner plantas secas es cosa de la Naturaleza con alguna plaga, o bien cosa de no regarlas a tiempo. La cuestión es que ha perdido 24 plantas, que habrá que arrancar.

Tres) Quitar plantas verdes.

Quitar 6 maceteros por 4 plantas verdes, igual menos 24 plantas.

-6 maceteros por +4 plantas = -24 plantas.

- por + = -

Comentario:

El balance es negativo porque pierde 24 plantas verdes. Posiblemente ocurra esto por falta de conciencia ecológica de la persona que haya arrancado las plantas. O tal vez haya sido cosa del viento.

Cuatro) Quitar plantas secas.

Quitar 6 maceteros por 4 plantas secas, igual quitar 24 plantas que estorban, 24 vacíos del jardín.

-6 maceteros por -4 plantas =¿+ 24 plantas?.

- por - = +

Comentario:

El balance es positivo porque quitar 24 plantas secas, que es la situación inicial del jardín, es como quitarle 24 huecos, 24 vacíos, 24 elementos negativos, 24 fallos, 24 agujeros, 24 cosas que estorban, que no son jardín, que están pendientes de ser quitadas; por tanto estamos haciendo una acción positiva, que mejora el jardín compensando 24 cosas negativas, tapando y anulando 24 vacíos, y que equivale de alguna manera a ganar 24 plantas. Para entenderlo mejor o para intuirlo mejor, debemos suponer, si no es mucho, que tan importante, es para el jardín, para su belleza, para su cuidado, su salud y la nuestra, añadirle una planta verde como quitarle una planta seca; por tanto, y bajo la suposición anterior, al quitarle 24 plantas secas el beneficio que recibe el jardín equivale al de plantarle 24 plantas verdes.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Estas reflexiones chocan un poco con la ciencia exacta, tal vez estén cogidas por los pelos, posiblemente sean discutibles, pero... pero pueden ayudar mucho al crecimiento matemático al bucear en las profundidades de la duda, intentando combinar saberes, vislumbrando pequeños entendimientos, intuyendo conceptos y dejando casi siempre dudas pendientes. Es como tomar pequeños baños de filosofía.

- EL MAESTRO:

• Ejemplo 5:

Si se ponen en el jardín 5 maceteros con 4 plantas verdes en cada uno, y se secan después de puestas, todas las plantas de 3 maceteros, ¿qué balance resulta?

- FLORA:

5 maceteros por 4 plantas verdes, igual a 20 plantas verdes.

Y 3 maceteros por 4 plantas secas, igual a 12 plantas secas.

Balance, 20 plantas menos 12 plantas , igual a 8 plantas verdes.

4(5-3)=4·5-4·3=20-12=8 plantas verdes.

- LOLI:

También podemos hacer la cuenta así:

5 maceteros menos 3 maceteros, igual a 2 maceteros verdes.

Y 2 maceteros por 4 plantas, igual a 8 plantas verdes.

5-3=2 maceteros; 2·4=8 plantas verdes.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Son dos soluciones inteligentes, igualmente válidas. Loli hace balance de los maceteros en primer lugar. Y Flora distribuye, reparte las plantas en los maceteros, haciendo balance al final. Las cuentas distribuyen, disgregan, separan, lo que su mente ha distribuido previamente.

- EL MAESTRO:

• Ejemplo 6:

¿Cómo se podrá expresar la acción opuesta de plantar 20 acebuches?

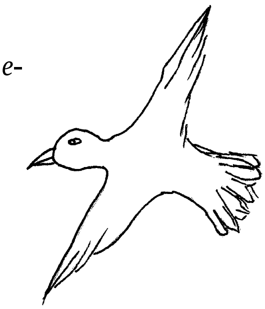
- MIGUEL: Con un grito de defensa de la Naturaleza. ¡Por el bien de todos, no arranquéis más árboles indefensos!

- PACA: ¡ -20 acebuches!, ¡menos oxígeno para respirar!, ¡tenemos que plantar árboles!

- EL MAESTRO: Los números enteros negativos han absorbido la operación de restar, la han integrado en sus carnes. Os invito a reflexionar con un ejemplo. Supongamos que se secan 7 árboles en el monte, que tengamos que arrancar. Si dispusiéramos sólo de los números naturales lo expresaríamos como quitar 7 árboles, - (signo de restar) 7 árboles. Si aplicamos los números enteros podemos expresarlo como un añadir en el balance de árboles en el monte, -7 árboles, el signo «menos», está incrustado en este caso en el -7 para señalar la desgracia.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La operación de la cuenta de quitar, de restar, tan necesaria, tan significativa, tan bella, tan imprescindible con los números naturales, deja de serlo con los enteros. En buena lógica podemos pensar que para indicar en una cuenta el quitar algo es suficiente con ponerle al número natural una rayita delante transformándolo en negativo. Es una cuestión más de forma que de fondo porque en esencia se trata de lo mismo, tal como podemos apreciar en el ejemplo anterior de los 7 árboles.

- EL MAESTRO: Una reflexión en voz alta es que a raiz del invento de los números enteros, lo que se pierde en la belleza y en la claridad natural para el intelecto, se gana en posibilidades, operatividad y flexibilidad dentro del edificio imaginario de los números. Perdemos un poco de nuestro saber basado en lo natural y concreto para ganar otro poco en lo imaginario y abstracto. Una cosa por la otra y de paso crece el sabio matemático que llevamos dentro.



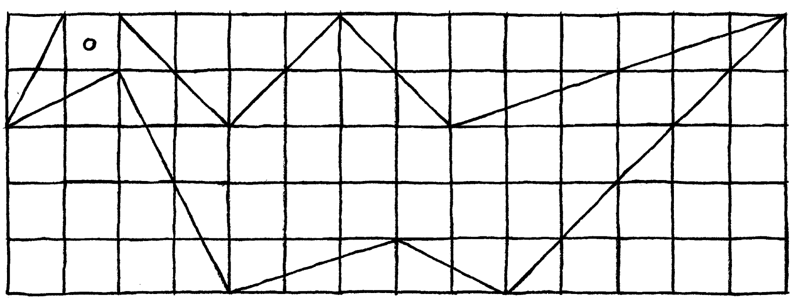
-EL MAESTRO: ¡Vuela, vuela, pajarita, vuela!

La pajarita de papel volaba alegremente alentada por un juego de manos, siendo el blanco de las miradas de todo el grupo.

- PAQUI: Cada vez estoy más sorprendida. Me pregunto que qué tendrá que ver el vuelo de una pajarita con los números. Es muy curioso que una clase de Matemáticas comience con un vuelo de imaginación.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las Matemáticas adquieren su verdadero sentido cuando conectan con la Naturaleza, la Sociedad, la vida, confundiéndose con ellas porque ahí está su origen. Y los números también vuelan con los pájaros...

- EL MAESTRO: En esta hoja que os reparto tenemos un dibujo de esta pajarita.



- FINA: ¡Qué lástima que esté enjaulada!

- ANA: Yo me la imagino volando libre al otro lado de la ventana.

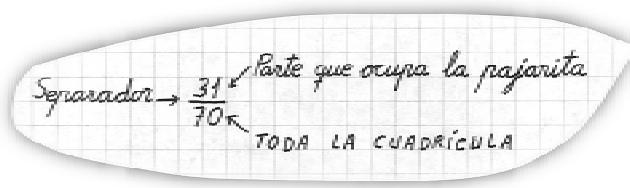
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Ahora la pajarita ha cobrado vida en nuestras mentes. Se ha creado un ambiente propicio para seguir aprendiendo.

- EL MAESTRO: A propósito, enjaulada o mejor libre, ¿qué parte de la cuadrícula ocupará?

Se anotaron los tanteos sobre la pizarra, que casi se vivían como apuestas. La mayoría tenía muy claro que ocupaba más de la mitad. Para saberlo con certeza, cada cual lo podía comprobar a su manera, un pequeño gesto democrático, pero todos coincidimos en hacer recuento de los cuadros ocupados por la cabeza, cuerpo, patas y cola por una parte; por otra calculamos todos los cuadros del rectángulo de la cuadrícula entera. Y comparamos la parte de cuadros ocupados por el pájaro con toda la cuadrícula, llevándonos la sorpresa de que ocupaba menos de la mitad, en contra de nuestras previsiones; pero esto son cosas para el estudio de la Psicología de la percepción.

- EL MAESTRO: Acabamos de comprobar que la pajarita ocupa 31 cuadritos sobre 70 cuadritos de toda la reja de ventana o alambrada de jaula.

Esto son dos números enteros, eso lo tenemos claro, nuestra mente controla dos números que comparamos entre sí. Volviendo atrás en el tiempo, en algún momento los sabios de los números sintieron la necesidad de expresar en lenguaje matemático situaciones así, igual que nosotros ahora. Y tomaron el acuerdo de enlazarlos mediante una raya separadora horizontal o inclinada, colocando el todo abajo, posiblemente por razones de peso, ya que el todo pesa más que una parte de ese mismo todo o igual en caso de que la parte coincida con el todo, y la parte encima de la rayita. El número de abajo hace referencia o denomina el todo, por eso se llama denominador, aunque el nombre no sea lo más importante frente a su significado. El de arriba se refiere o numera la parte que corresponde en cada caso, la parte que se toma, que se deja, que se hace, que se deshace, que toca, que deja de tocar, que..., es la parte sobre el todo. En el ejemplo de la pajarita, matemáticamente se expresa:



- **JOSÉ ANTONIO:** A mí me han dicho alguna vez que una expresión así como 31/70 es un número, y esta clase de número con la raya en medio me pone nervioso y desquiciado.

- **CARMEN:** Es un número fraccionario, a mí también me lía mucho.

- **ANTONIO:** Es un número quebrado, no lo ves, quebrado por la raya.

- **PACA:** A mí me suena que es un número racional aunque no sé por qué razón o por qué ración.

- **ALGUNOS:** Bla, bla, bla...

El maestro, estímulo y servidor del saber, consciente de que una intervención tras la polémica suscitada podía venir como anillo al dedo, se fue a la pizarra, escribió primero el número 70 de refrencia, los cuadros de toda la cuadrícula, y después el 31, los cuadros de la pajarita, un poco más arriba del anterior, dejando una cierta separación, justo para colocar un dedo en horizontal, gesto que hizo acto seguido.

- **EL MAESTRO:** ¿Lo veis claro así? Si no pones el dedo estos dos números están desconectados, sueltos, sin relación. El dedo los enlaza. Pero hay un pequeño problema y es que se me está cansando el brazo, y si quito el dedo se pierde la conexión entre ambos.

- **ANTONIO:** Eso no es un problema porque podemos poner un lápiz por ejemplo.

El maestro, ni corto ni perezoso, pegó el lápiz con un trozo de cinta adhesiva entre los dos números. Lo del dedo y lo del lápiz sirvió para tranquilizar a los nerviosos, para desliar a los liados y para aclarar las ideas. Pero el azar quiso que con el polvillo de la tiza se despegara y se cayera el lápiz. La conexión entre los números del pájaro y la cuadrícula quedó rota otra vez.

- **EL MAESTRO:** Ahora verás, vamos a sustituir los separadores como el dedo o el lápiz por una raya de tiza en la pizarra o una raya de lápiz en el papel como recuerdos del gesto de una mano al comparar dos números, como signo abstracto nacido de lo concreto. Si rebobináramos la película del tiempo comprobaríamos que esta anotación de los números separados pudo surgir más o menos así. Esta que veis es la anotación de la parte que ocupa la pajarita sobre toda la cuadrícula. ¿Cuántos números hay aquí?

- **MANOLI:** Creo que un número, un número fraccionario.

- **ALGUNOS:** ¿Cómo estás?, no ves que hay dos, el 70 y el 31.

Un poco espontáneamente estábamos hurgando en la raíz de las confusiones al respecto si esta expresión es un número o dos números, problemas de identidad de las familias de los números. El entendimiento normal distingue dos números, el de abajo, el todo, y el de arriba, la parte, esa es la radiografía de la realidad, ese es el fondo de la cuestión, así se entiende de maravilla, en la salsa de su significado. Lo que se resiste más al intelecto es entender que hay un solo número porque eso no es verdad nada más que en un cierto nivel de abstracción.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El edificio de los números crece y crece. Aunque más que con un edificio habría que compararlos con los materiales de construcción con los que cada uno de nosotros podamos hacer a capricho o por curiosidad o por necesidad nuestros propios edificios, nuestras propias cuentas.

- **EL MAESTRO:** Ya conocemos un poco mejor los naturales y los enteros. Pero la cosa no queda ahí en esta lección de números, en esta lección del todo el uno y la parte. Estos otros números como los de la pajarita, que podemos decir que tienen identidad modular, de doble módulo, sirven para expresar situaciones en las que hay que comparar y en general en todas aquellas donde no encajan los enteros, teniendo que trocearlos en el número de partes que se necesite. Intentemos ahora entre todos y todas entresacar expresiones de la vida misma, que hagan referencia a la parte comparada con el todo.

Anotamos en la pizarra, toda la lluvia de expresiones:

- «Tres cuartos de lo mismo».

- «No sabes de la misa la mitad».

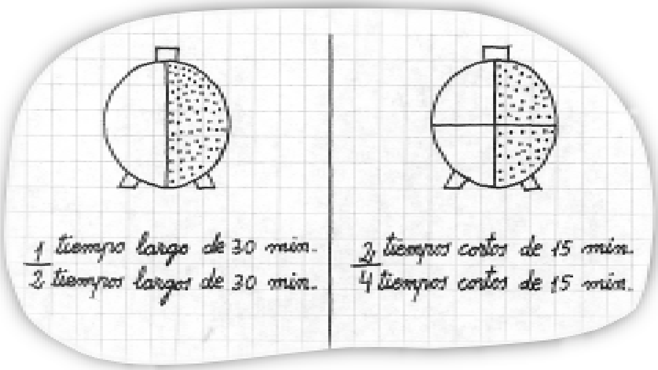
- «Échame un cuarto de jamón».
- «A mí me echas cuarto y mitad».
- «Hace media hora que ha empezado la clase».
- «A este botellín le cabe un tercio de agua mineral».
- «A este un cuarto de cerveza casi sin alcohol».
- «Me he comprado un tres cuartos».
- «Las tres cuartas partes de la Tierra son agua, es el planeta azul».
- «He comprado un décimo de lotería».
- «No te has comido ni la mitad».
- «Voy a poner un cuartillo de agua para regar las habas».
- «Nos pones media bacalada para acompañarlas».
- «Con metro y cuarto tengo suficiente para cortarme el vestido».
- «Llevo la finca al tercio».
- «Llevamos recorrido las tres quintas partes del camino».
- «No sé si te tendrá cuenta comprártelo a mitad de precio».
- «Con medio tercio de agua sacio mi sed».
- «La cuarta parte de la finca está de limoneros»
- «No lo pagamos a medias, me ha tocado pagarlo entero».
- «Van hechas de cinco partes, tres».
- «España está en el hemisferio Norte».
- «La media naranja».
- «Las peras al cuarto».
- «Tenemos que parar a echar gasolina, el depósito marca un cuarto».
- «Este ordenador con todos sus periféricos cuesta un cuarto de kilo».
- «Este paraje está a medio camino entre...».
- «Echamos la quiniela a medias».
- «Hoy entra el cuarto creciente».
- ...

La lista era interminable, este tipo de números quebrados, fraccionarios, racionales o partidos, en esencia parejas de números para comparar la parte con el todo, están en todas partes, te pueden salir hasta en la sopa.

- **EL MAESTRO:** Supongamos que Juan tarda 1/2 hora en llegar a su casa y Juani tarda 2/4 de hora. ¿Quién tardará más en llegar?

- **FLORA:** Tardan igual, evidentemente.

- **EL MAESTRO:** Propongo que hagamos una radiografía de ambas expresiones para comprobar que equivalen a un mismo tiempo.



Comentario: Un tiempo largo equivale a dos tiempos cortos, que sean la mitad del largo, evidentemente. Por tanto podemos expresar que 1/2 = 2/4 de hora.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Para aclararnos mejor debemos pensar que el «uno» de la media hora no es como el «uno» del cuarto de hora, sino que es el doble de pesado, tarda el doble en pasar, aunque su signo gráfico, su identidad en el papel es igual, «1».

- **JUAN:** Propongo analizar el comportamiento de estas equivalencias en los envases de tercios, de medios de... todo eso.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Recordad que tenéis un grifo cerca, os sugiero que lo utilicéis para pasar los números fraccionarios por agua.

A continuación se planteó una comparación de cantidades de agua contenida en diferentes envases, que teníamos en la caja de herramientas. Por una parte teníamos 4 vasos vacíos con una capacidad de medio tercio en cada uno, y por otra dos botellines de tercio también vacíos.

- **JUAN:** ¿Dónde se podrá echar más agua?

- **MANOLO:** La misma, está claro.

- **PACA:** Vaya un lío de fracciones, que si medio tercio, que si dos tercios...

- **EL MAESTRO:** Será un lío de fracciones pero en realidad se trata de envases para agua y podemos empezar llenándolos en el grifo.

Así se hizo, se llenaron los 4 vasos de medio tercio, que se vaciaron de dos en dos *en los botellines de tercio, comprobando experimentalmente la equivalencia de capacidad. Una vez hecho esto, fue justo el momento en que se procedió a bailar los números al son acompasado de vasos y botellines, utilizando paralelamente un dibujo esquema para facilitar la comprensión.*

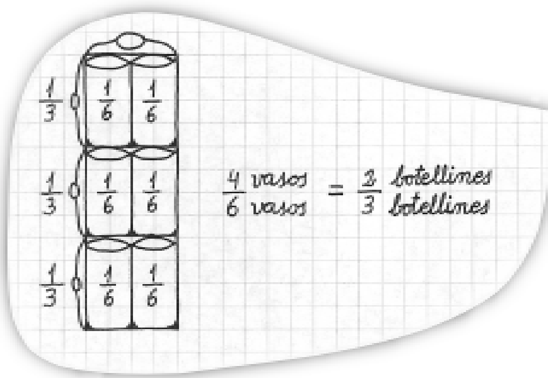
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO:

Vasos y botellines de verdad, y con agua que moja, realidad.

Vasos y botellines dibujados, papel seco, un poco de abstracción.

Vasos y botellines en los números, ideas, más abstracto todavía.

Los mismos vasos y los mismos botellines, entrando a la mente por vías diferentes y complementarias.



- PACA: Sí señor. Ahora entiendo que las fracciones tienen relación con la realidad. Antes, aunque os parezca raro, pensaba que no tenían nada que ver, vamos que eran juegos de números en el vacío.

- EL MAESTRO: Es interesante analizar el proceso seguido en esta pequeña experiencia, en tres pasos:

1º) Lo concreto, lo que se manipula, ver y tocar los envases, llenarlos de agua en el grifo, trasvasarlos, mojarse, experimentar.

2º) Dibujar sobre el papel, fotografiar la realidad.

3º) Traducir a números, conectados a la realidad, formando parte del proceso seguido, no perdidos en el vacío.

Después, a base de trabajar situaciones parecidas, nos podemos ahorrar los primeros pasos del proceso porque ya los tendremos integrados en nuestro razonamiento matemático, archivados en los circuitos de nuestro cerebro.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las fracciones, entendidas como sombras numéricas de la realidad, se comportarán como ésta. En los casos reales se dan circunstancias de comparar, juntar, quitar, repetir, repartir... Y por tanto las fracciones, fiel reflejo de esa realidad, se podrán comparar, sumar, restar, multiplicar, dividir...

- EL MAESTRO: Ya hemos analizado las comparaciones con los dos ejemplos vistos anteriormente: el tiempo en el camino y los envases de agua. Estas comparaciones nos han servido para comprender el concepto de equivalencia en las fracciones correlacionado con la igualdad en la realidad. Nos toca ahora analizar otras relaciones entre estos números, otros casos, apoyándonos como es habitual en ejemplos concretos.

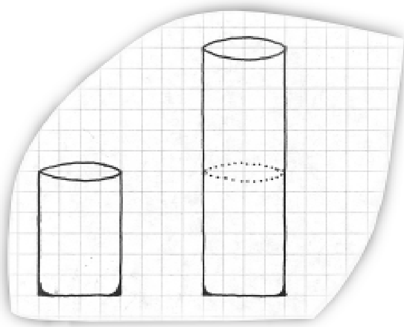
• Caso 1. Pensemos en una situación de juntar, juntar cosas que no sean enteras, claro, por ejemplo, por ejemplo...

- LOLI: Ayer gasté un cuarto de litro de aceite de oliva y hoy necesito gastar otro medio litro. ¿Cuánto gastaré en total?

- PACA: Esta situación me trae a la memoria una receta que yo medio había memorizado: «Para sumar fracciones ¿con igual denominador?, ¿con distinto denominador?, se pone el mismo...ya no me acuerdo...y de numerador se pone la suma de...no sé qué». Lo que sí recuerdo bien es lo mal que lo pasé estudiando, mejor dicho memorizando todo esto, y de que no sé ni como aprobé el examen por los pelos. Pero ahora me doy cuenta que no me sirvió casi de nada, y además estoy suspensa, aunque aprobara.

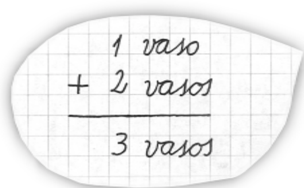
- EL MAESTRO: No eres tú la que mereces estar suspensa, sino ese proceso en el que predomina la forma y las recetas mágicas sobre la esencia del saber. El hábito en este caso no hace al monje. En todo caso pegaría mejor el dicho de «te conozco bacalao aunque vengas disfrazado». Lo interesante y necesario para el buen aprendizaje matemático es comprender, analizar, estrujar, radiografiar, entender el contenido, el SIGNIFICADO, que se agazapa bajo los ropajes más o menos artificiales, inventados, feos o bellos, de la forma continente. Lo fantástico es descubrir su belleza interna, su poesía, su esencia, que es el perfume de nuestro propio pensamiento. Y hablando de esencias podemos continuar con el caso del gasto del aceite de oliva de Loli. Aparte de saber de antemano, por descontado y por sencillo, que todo el aceite es tres cuartos de litro, haremos las cuentas para aprender el proceso numérico, que será útil para cuando se presenten casos difíciles que no podamos controlar mentalmente. Así, con este ejemplo fácil, controlaremos los números, no será difícil tenerlos acorralados por el razonamiento, no conseguirán escapar aunque lo intenten, de nuestro radio de acción mental.

Primero hicimos un dibujo, cada uno lo hizo a su manera. El dibujo es un buen aliado de los números.

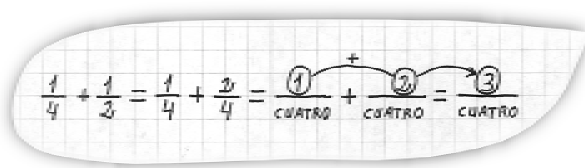


Comentario:

- **EL MAESTRO:** En realidad, en esencia, en aceite, juntamos un vaso de aceite y dos vasos de aceite, es la única suma que hacemos.



Esta es la suma desnuda de artilugios, al natural, la sencilla, muy fácil de digerir por el pensamiento lógico, sin riesgo de provocar «diarrea mental». La otra suma, en torno a este mismo aceite, es más inventada, más artificial, más disfrazada, de fracción en este caso. Y por eso para digerirla bien, lo primero que procede es hacerla papilla, desintegrarla y hacerle una radiografía para verla y entenderla en cada una de sus piezas internas, para descubrirla, para que deje de ser una incomprendida.



La suma hay que expresarla en un mismo tamaño de vasos, es más sencillo pensar en tres vasos pequeños iguales, que no un vaso pequeño y un vaso grande, lógico. Por tanto mejor 1/4 más 2/4 de litro de aceite. El número 4, el del denominador, no es un número para sumar, es simplemente la referencia de que un litro se considera repartido en «cuatro» vasos. En la expresión 1/4 + 2/4 = 3/4, aparece tres veces el número 4, pero se trata de un solo 4, que además no entra en la cuenta, es una referencia. El sentido de la anterior expresión fraccionaria es que 1 vaso sobre cuatro vasos en que se considera partido el litro, más 2 vasos sobre cuatro vasos, es igual a 3 vasos sobre los cuatro mismos vasos, por tanto 1 vaso y 2 vasos son 3 vasos.

- **PACA:** ¡Olé! Ahora sí que lo entiendo. Me da mucha rabia de pensar en lo mal que lo pasé agarrada a una receta como un clavo ardiendo, insegura, por el camino pedregoso de la frustración de mi saber matemático.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Penetrar el pensamiento dentro de una expresión matemática para entenderla es un poco duro, cuesta trabajo intelectual, al principio hay que sudarlo, pero al final resulta entretenido y agradable, te da seguridad y confianza y eleva tu saber y tu autoestima.

- **EL MAESTRO:**

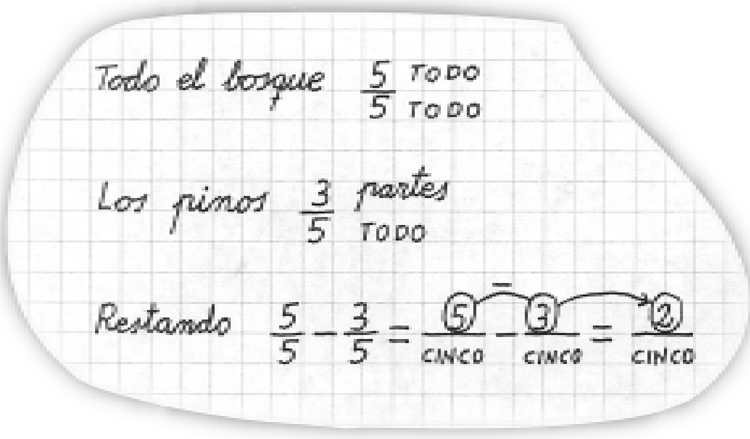
Caso 2. Lo contrario de juntar, de unir, de añadir, es...

- **ALGUNOS:** Quitar, separar, desquitar, restar...

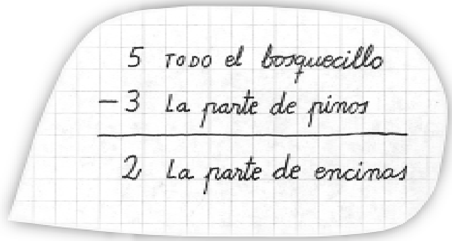
- **EL MAESTRO:** Deberíamos situarnos sobre un caso de restar con números no enteros, sino partidos, fraccionarios.

- **AMBROSIO:** Podría ser que en un bosquecillo las tres quintas partes fueran pinos y el resto encinas. ¿Qué parte de este bosque son encinas?

El problema estaba planteado, y como era tan sencillo, todos sabíamos desde el principio que las encinas ocupaban dos quintas partes, las que faltaban a las tres partes de pinos para completar las cinco de todo el bosquecillo.



Comentario: En esencia, la única resta que hay que hacer es la siguiente:



- EL MAESTRO:

<u>Caso 3.</u> Supongamos que hemos comido unas tapas de jamón, que nos han dado bastante sed. ¿La podremos saciar con medio tercio de un litro de agua?

- MARA: Depende, eso es muy relativo. A mí por ejemplo se me quita la sed si me bebo un vaso normal de un cuarto de litro.

- EL MAESTRO: ¿Se saciará Mara con medio tercio de agua?

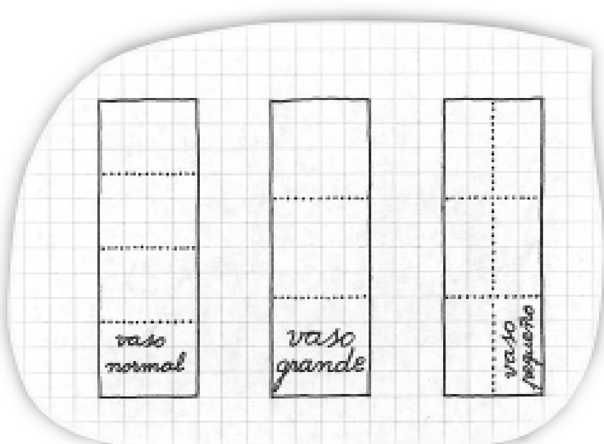
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En democracia matemática todas las formas razonadas de encontrar la solución son válidas.

- FERNANDO: Yo tengo claro, sin necesidad de hacer números que a Mara no se le quita la sed con medio tercio.

- RAMÓN: Un cuarto es un vaso normal, del que entran cuatro en un litro.

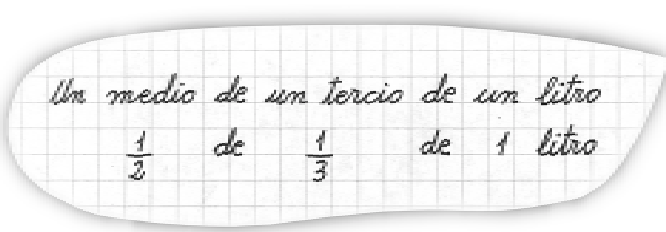
Un tercio es un vaso grande, de los que entran tres en un litro. Medio tercio es un vaso pequeño, de los que entran 2 por 3 igual a seis en un litro. Por tanto si Mara se bebe un vaso pequeño no sacia la sed porque ella necesita un vaso normal.

- JUANA: Con un dibujo también se llega a la misma conclusión.



Nota: Sin comentarios porque entra por la vista.

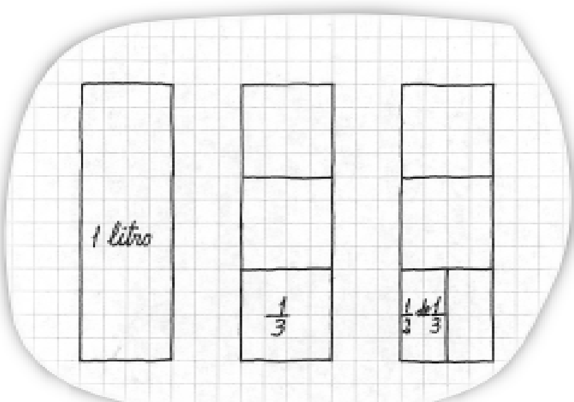
- EL MAESTRO: Ahora que controlamos la situación en la realidad, ahora que la tenemos bien atada, ahora la podemos entender con números, quebrados en este caso. Así, vamos a traducir un medio tercio de un litro de agua a lenguaje matemático.



Lo primero que debemos tener en cuenta es que la referencia es un litro.

En segundo lugar delimitamos 1/3 de un litro, es decir la tercera parte del litro.

Y en tercer lugar acotamos 1/2 de 1/3, o sea la mitad del tercio.



- PEPE: ¿De dónde sale el número 6?

- EL MAESTRO: De cada tercio salen dos vasitos de medio tercio por definición. Por tanto un litro contiene 3 partes (tercios), con 2 vasitos en cada parte, igual a 6 partes pequeñas o vasitos que tiene el litro. Reflexionando sobre lo que acabamos de hacer, vemos que hemos realizado la multiplicación, la repetición de 2 vasitos por 3 veces, igual a 6 vasitos, esta es la multiplicación de los dos números de referencia que se funden en uno solo, las 6 partes de referencia en que se divide ahora el litro.

- PEPE: ¿Y cómo sabemos si se le quita la sed a Mara?

- EL MAESTRO: Según nos indica el cálculo tomamos 1 vasito sobre 2 vasitos de una de las tres partes; eso es un solo vasito, un sexto de litro, 1/6 de litro, una cantidad de agua que no la saciará.

- MARA: Me está dando sed de verdad. Me voy a beber agua.

- EL MAESTRO:

<u>Caso 4.</u> ¿Qué os parece si le aplicamos una fracción a un depósito de agua potable?

- CARLOS: Podemos llamar a la Empresa de Aguas del pueblo.

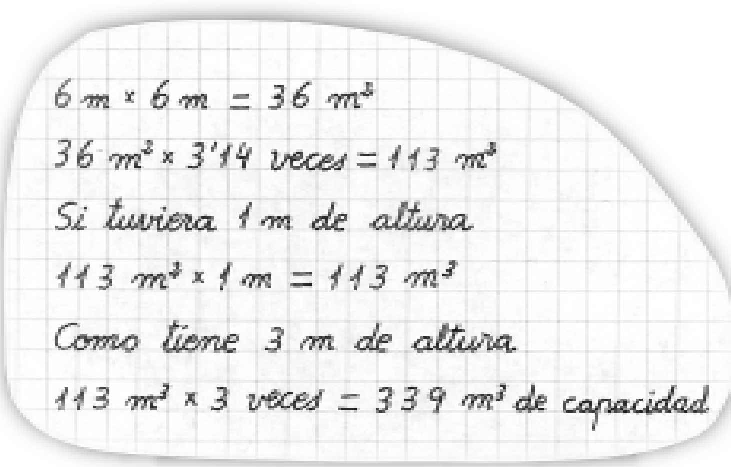
- EL MAESTRO: Es una muy buena idea para conectar las fracciones con nuestro entorno.

- JUAN: Ahora la oficina está cerrada. Hemos tenido mala suerte.

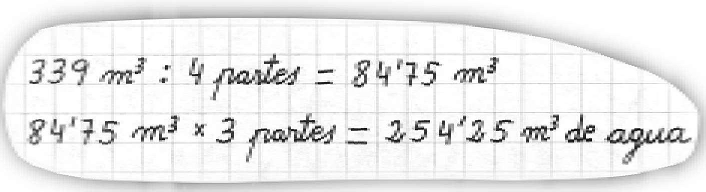
- ANTONIA: En ese caso podemos hacer un problema supuesto.

Supusimos un depósito circular de 12 metros de ancho por 3 metros de alto, lleno hasta sus tres cuartas partes.

Primero calculamos la capacidad del depósito.


6 m × 6 m = 36 m²
36 m² × 3'14 veces = 113 m²
Si tuviera 1 m de altura
113 m² × 1 m = 113 m³
Como tiene 3 m de altura
113 m³ × 3 veces = 339 m³ de capacidad

Después el agua que contenía.


339 m³ : 4 partes = 84'75 m³
84'75 m³ × 3 partes = 254'25 m³ de agua

Hecha la radiografía de los números de la capacidad y del agua de los depósitos, fue más fácil expresarlo en fracciones.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 339\ m^3 = \frac{3 \cdot 339}{4} = 254'25\ m^3$$

Comentario de la multiplicación de fracciones:

Lo lógico es repartir 339 metros cúbicos entre 4 partes para descubrir el uno, 84’75 metros cúbicos en una de las cuatro partes. Y después se repite por 3 veces, dando 254’25 metros cúbicos. Sin embargo la cuenta también se puede hacer de otra manera porque cuando un número se multiplica por otro y se divide entre un tercero, no importa el orden en que se hagan las dos operaciones. Por tanto, mecánicamente se puede hacer al revés de la lógica anterior, es decir 3 x 339 = 1017 metros cúbicos, que llenaría el depósito tres veces, y después achicamos el agua dividiendo entre 4 partes, obteniendo los mismos 254’25 metros cúbicos. Esta última lógica es más rebuscada, más artificial, y aunque sirve conecta peor con el entendimiento; a no ser que pensemos en sumar 339 veces, tantas como los metros cúbicos de capacidad del depósito, los 3/4 de metro cúbico.

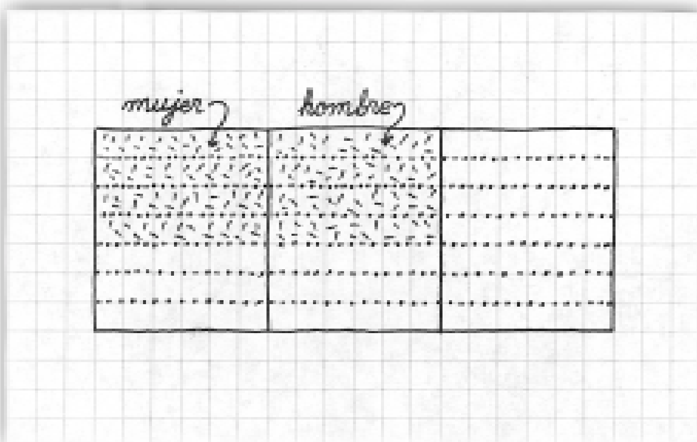
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: De una manera o de otra, con una lógica o con otra, lo importante es no cortar el hilo del razonamiento en ningún momento.

- EL MAESTRO:

Caso 5. En el caso anterior hemos analizado el sentido de la multiplicación cuando interviene una fracción y otro número sin partir. Veremos ahora el caso en el que entran en juego dos números fraccionarios que se multiplican entre sí, radiografiando la situación para analizar qué números se multiplican y por qué, para verlo claro, para no correr nunca el riesgo de quedarnos con la receta de «multiplicar el de arriba por el de arriba y el de abajo por el de abajo». Un vivero de acebuches nos servirá de marco. Supongamos que en dicho vivero hay tres tablas de tierra iguales, y que es cultivado por un hombre y una mujer, que trabajan al mismo ritmo, por supuesto. La mujer emprende la tarea al salir el sol en la tabla de una orilla al mismo tiempo que el hombre en la colindante. Por la tarde, al final de la jornada, tanto el hombre como la mujer han realizado el trabajo de cuatro partes sobre siete que tiene cada tabla. ¿Se podrá decir esto dibujando?, ¿y con música?, ¿y con números?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Una misma situación se puede expresar con lenguajes diferentes, siendo el matemático tan esencial como los otros, y tan preciso, tan impreciso, tan sencillo, tan elegante, tan duro, tan divertido, tan perfecto, tan imperfecto, tan real, tan imaginario, tan triste, tan alegre, tan feo , tan bonito, tan maravilloso, tan auténtico, como la misma situación, como la vida misma, y como nosotros mismos y nosotras mismas.

- **LUCÍA:** Yo lo sé expresar con un dibujo. Lo haré en la pizarra.



El dibujo de Lucía fue un buen punto de apoyo para traducir gradualmente la expresión del trabajo en el vivero, de palabras a números, por parte de las personas del grupo en una puesta en común:

- «La mujer realiza cuatro partes de las siete partes de la tabla de la orilla y el hombre otras cuatro partes sobre siete de la tabla colindante. Y la tabla de la otra orilla queda pendiente entera, con sus siete partes.»

- «La mujer hace 4/7 de la tabla de la orilla, y el hombre otros 4/7 de la tabla del centro. La otra tercera tabla queda sin tocar.»

- «La mujer hace 4/7 de una de las tres tablas, el hombre hace 4/7 de otra de las tres tablas, y la otra tabla se queda sin tocar.»

- «Entre la mujer y el hombre hacen 4/7 de una tabla sobre tres, y 4/7 de otra tabla sobre tres, quedando una tabla entera sin tocar.»

- «Entre la mujer y el hombre hacen 4/7 de dos de las tablas sobre tres»

- «Entre la mujer y el hombre hacen 4/7 de dos tablas sobre tres tablas.»

- «Entre ambos hacen 4/7 de 2/3 del vivero.»

- «... 4/7 de 2/3 ...»

- «... 4 partes por 2 veces, de un total de 7 partes una tabla por 3 tablas.»

- «4 por 2, sobre un total de 7 por 3 ...»

- «4·2 partes / 7·3 partes.»

- «8 partes sobre 21 partes.»

- «8 / 21», ese es el trabajo realizado en el huerto entre la mujer y el hombre.

- **EL MAESTRO:**

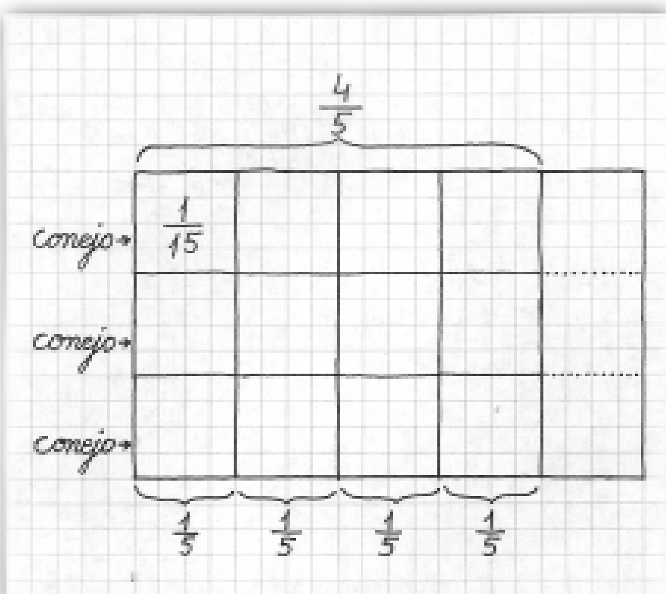
Caso 6. ¿Se podrán hacer repartos de cosas que ya están partidas? ¿Será esta una pregunta tonta?

- **MARA:** Un ejemplo, por favor.

- **EL MAESTRO:** ¿Podríamos repartir las cuatro quintas partes de una parcela de alfalfa entre tres conejos?

- **FERNANDO:** Dejará de poderse repartir.

- **EL MAESTRO:** Como las 4 partes de la parcela y los 3 conejos no encajan de forma exacta tenemos que buscar su compatibilidad. La solución la veremos mejor con un dibujo esquema.



Se trata de repartir las 4/5 partes de la parcela entre 3 conejos. La clave está de nuevo en los unos, en un quinto y en un conejo. Se divide cada quinto en 3 partes, tantas como conejos; y así se reparte entre los conejos cada una de las 4 partes sobre 5 de la parcela. Esto nos lleva a considerar la parcela distribuida en 3 por 5, igual a 15 partes más pequeñas. A cada uno de los tres conejos le toca un tercio de cada uno de los cuatro quintos, por tanto podrá comer 4 partes sobre las quince que tiene la parcela en total.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Sobra el comentario si se mastica bien el esquema con la inteligencia. El problema queda resuelto gracias al hijo del 3 por el 5, fruto de su multiplicación.

- **ANTONIA:** Lo entiendo, vale, pero si es un problema de repartir, ¿dónde están las cuentas de dividir?

- **EL MAESTRO:** Digamos que camufladas en cada una de las partes. La lógica nos indica que hemos repartido 4/5 de parcela de alfalfa entre 3 conejos, que podemos expresar así:

$\frac{4}{5} : 3$ es igual a $\frac{1}{5} : 3$ y $\frac{1}{5} : 3$ y $\frac{1}{5} : 3$

Ahora bien $\frac{1}{5} : 3$ es $\frac{1}{15}$ (Ver dibujo anterior)

Por tanto, $\frac{4}{5} : 3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = 4 \times \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$

Comentario de la radiografía de esta división:

Para hacer este reparto, necesitamos hacer dos cuentas, una multiplicación de los dos números de referencia, el 3 y el 5, para encontrar el todo, 15 partes; y otra multiplicación, de 4 partes por 1, para saber las partes que le tocan a cada conejo, 4 partes.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La esperada división para el reparto no aparece porque está incrustada previamente al subdividir cada una de las partes iniciales de la parcela en tres partes más pequeñas, ahí está escondida.

- **EL MAESTRO:**

Caso 7. Buscando el sentido de la división cuando el divisor cruza la barrera del uno, haciéndose menor que uno.

- **LUCÍA:** Un ejemplo concreto, gracias.

- **EL MAESTRO:** Podemos situar nuestro pensamiento en unas cajas de pimientos. Si tenemos que repartir 600 pimientos entre 3 cajas, ¿cuántos meteremos en cada una?

- FELIPE: Evidentemente se trata de un simple reparto de 600 pimientos entre 3 cajas, igual a 200 pimientos en cada una.

- EL MAESTRO: Está muy claro que se reparten todos los pimientos entre todas las cajas. Ahora bien, si supiéramos que 100 pimientos se colocan en media caja, ¿qué cuentas podemos hacer para saber los que entran en una caja?

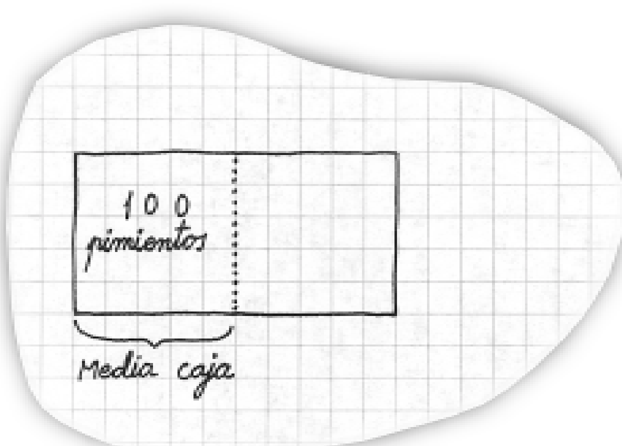
- ANTONIO: Sencillamente se multiplica por dos partes que tiene la caja, ya que una caja es la suma de dos medias cajas. Por tanto 100 pimientos por 2 partes igual a 200 pimientos.

- EL MAESTRO: Muy inteligente esa solución, es sencillo, es lo normal. Pero por aquello de ensayar maneras diferentes, aunque sean más rebuscadas y caprichosas, ¿podremos calcular los pimientos que entran en la caja con una cuenta de dividir?

Resultó difícil, de entrada no se veía la posibilidad de dividir de ninguna manera. Hasta que reflexionamos sobre el significado, sobre la esencia de la división, que es sencillamente asignar un número de unidades, en el ejemplo pimientos, a otro número de unidades diferente, en el ejemplo cajas.

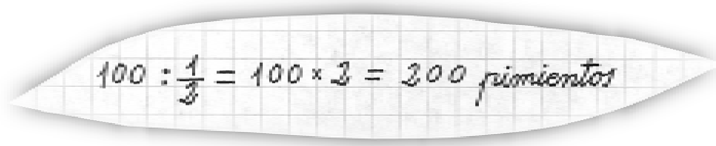
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Dividir consiste en asignar todas las unidades de un todo PARA todas las unidades de otro todo, con la idea de repartir uniformemente las unidades de un todo entre las unidades de otro todo, en busca de las unidades del primer todo que entran en cada una de las unidades del segundo todo. En forma de slogan: «el todo para el todo en busca del uno».

- EL MAESTRO:



Dividir entre 1/2 caja, asignar los 100 pimientos para 1/2 caja, significa hacer una división del revés. Nuestra mente tiene que atravesar la barrera del «uno», camino del «cero». En esencia es una división invertida.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Es una multiplicación disfrazada con los ropajes de la división.



- **EL MAESTRO:**

Caso 8. Más difícil todavía si no encontramos el verdadero sentido del reparto de un número partido, entre otro número también partido.

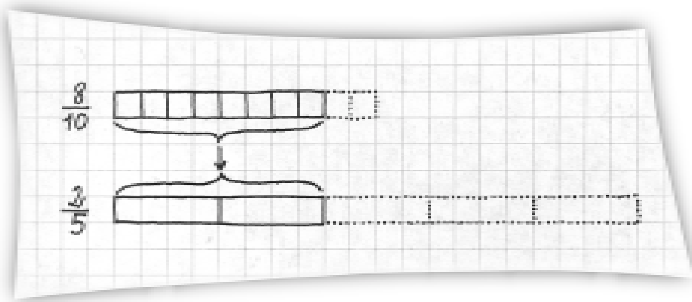
- **MARA:** Ejemplificando que es gerundio.

- **EL MAESTRO:** Ejemplificando y manipulando, vamos tocando puñados de garbanzos con las manos para comparar el tamaño de estas dos cajitas de cartulina, que como tendréis ocasión de comprobar necesitaremos 8/10 de la capacidad de la pequeña para llenar 2/5 de la capacidad de la grande. Pregunta: ¿Cuántas cajitas pequeñas encajan en una cajita grande? Los compartimentos de las cajas son de distinto tamaño, lo captamos con la vista. Por tanto tendremos que encontrar previamente el número de veces que un compartimento grande contiene a un pequeño. Los puñados de garbanzos que llenan los compartimentos son 8 pequeños en la caja pequeña y 2 grandes en la caja grande. Por tanto son 8 para 2, que es como decir 4 para 1, vamos que los puñados grandes lo son 4 veces más que los pequeños. Esta relación 4 a 1 es el cordón umbilical que enlaza los tamaños de ambas cajas. Esta conexión nos permite pasar el hilo del razonamiento calculando primero el número de puñados pequeños que entran en los 5 compartimentos de la caja grande, 4 puñados por 5 partes, igual a 20 puñados pequeños; y repartiendo en segundo lugar la cabida total de la caja grande entre la de la caja pequeña que es de 10 puñados también pequeños, 20 entre 10, igual a las 2 cajas pequeñas que son necesarias para llenar una grande.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Maestro, te aconsejo que no sigas con ese discurso, antes de la comprobación práctica, antes de los encajes de garbanzos, porque sería seguramente lo más parecido a predicar en el desierto.

- **PACA:** Ese razonamiento es demasiado duro para pensarlo, es tan denso que sería imposible cortarlo incluso con un cuchillo.

- **EL MAESTRO:** Para que el razonamiento entre mejor en el reparto, en las partes y en los compartimentos de las cajas, os sugiero que echéis una mano a vuestro pensamiento, que razonéis también con las manos, que metáis ya la mano en los garbanzos.

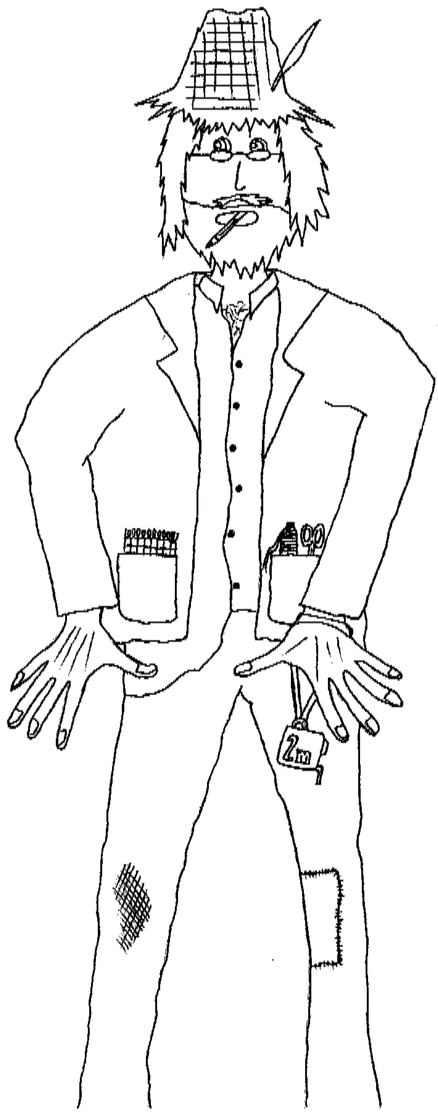


Por grupos se trabajó el reparto, codo con codo, mano a mano, puñado a puñado de garbanzos, aderezados a gusto nuestro con el ingrediente del pensamiento. Merece la pena dejar por escrito el comentario de Joaquín, expresión viva y sentida del matemático que llevamos dentro:

- JOAQUÍN: Ahora que he toqueteado los garbanzos, acabo de caer en la cuenta, gracias a que he participado en el baile de los números 8, 2, 5 y 10, al son del reparto y de la repetición, de la división y la multiplicación, con la energía y con el salero de mis propias manos, de mi propia mente. Antes sólo sabía que al dividir dos números fraccionarios, para obtener el resultado final bastaba sencillamente con multiplicar el numerador del primero por el denominador del segundo para encontrar el numerador del resultado, y con multiplicar el denominador del primero por el numerador del segundo para colocar el denominador al final, la rutinaria multiplicación en cruz. Antes tenía que cargar con la cruz de estar a ciegas sin entenderlo, ahora lo veo muy claro, tan claro que me sobran los artilugios rutinarios, las recetas ciegas, las ausencias de razonamiento, los tormentos para el entendimiento. En esto de la división de números fraccionarios he pasado de la dependencia de una receta a la autonomía de pensamiento, y hasta mi estado de ánimo está pasando del sufrimiento al disfrute.

- EL MAESTRO: Con las experiencias y vivencias que hemos tenido en este planeta del saber matemático, aderezadas por la reflexión propia de cada cual, nos hemos acercado un poco más a los números naturales, enteros y racionales, hemos aprendido a navegar un poco mejor en las cuentas de ese mar de números, apoyando nuestros razonamientos en el reino del uno, el todo y la parte. Un deseo: Buen viaje por el paisaje de los números.

NÚMEROS PARTIDOS EN CLAVE DE DIEZ (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)

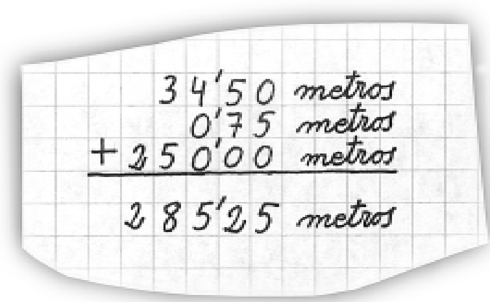


El maestro dio los buenos días de una forma un tanto extraña, rebuscada, mímica, como saludando con los racimos de dedos de sus manos, queriendo dar la clave decimal de la lección del día: «Números partidos en clave de diez».

- **EL MAESTRO:** Cuando una unidad de cualquier cosa se considera partida, numéricamente hablando, en 10, 100, 1000... partes, podemos contar en realidad con unidades 10, 100, 1000... veces más pequeñas, que son la décima, centésima, milésima... parte de la unidad entera de referencia. Esta lógica decimal de números fraccionarios o quebrados o partidos o simplemente rotos, para entendernos mejor, es la utilizada en cuentas con decimales. Hoy podemos estudiar o repasar algunos casos.

<u>Caso 1.</u> Cuando sumamos varias cantidades con números que tienen parte entera y decimal, ¿cómo se hace?

- **MARA:** Se colocan en columna haciendo coincidir las partes enteras entre sí, las partes decimales entre ellas y también las comas o separadores decimales. Como en el siguiente ejemplo.



- **EL MAESTRO:** Veamos un segundo caso.

<u>Caso 2.</u> Cuando a una cantidad entera, le quitamos otra expresada en decimales.

- **CARI:** Como al cortar un trozo de 5´25 metros sobre 8 metros de hilo por ejemplo.

- **EL MAESTRO:** Es un buen ejemplo. ¿Cuántos metros de hilo sobran?

- **LUCÍA:** Mentalmente sabemos que de 5 metros y 25 centímetros a 8 metros van 2 metros y 75 centímetros.

- **EL MAESTRO:** ¿Pero cómo amasar los números?

Sin proponérnoslo nos habíamos metido en los mecanismos internos de la resta. Sólo se puede quitar una cantidad de otra mayor. A 8 metros le podríamos quitar 5 metros, pero no llegamos, hay que quitar también los 25 centímetros. ¿Pero cómo quitar 25 centímetros de ningún centímetro? Imposible con este planteamiento. La solución pasa por sacar centímetros de alguna parte en la cantidad de los 8 metros.

- **PACA:** Ya está. Troceamos mentalmente uno de los 8 metros, el sexto para ser más exactos, en 100 centímetros, para disponer de 7 metros enteros. De éstos es fácil restar 5, quedando 2 metros enteros. Y así contamos también con 100 centímetros de los que al cortar 25, quedan 75centímetros. Solución: Quedan 2 metros y 75 centímetros.

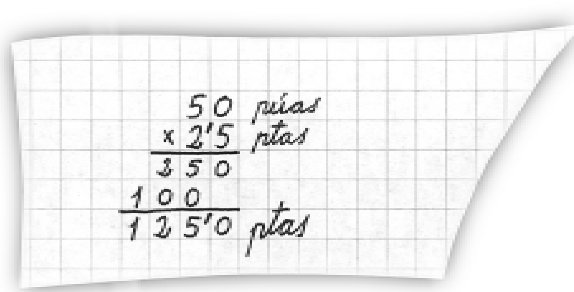
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esa es una buena digestión de pensamiento. Como toda buena digestión exige un proceso lento de masticación, en este caso de metros que se trocean en centímetros en la mente de Paca. Si no hubiera ocurrido este proceso, una de dos, o la mente no hubiera tragado, que sería lo menos malo, o lo hubiera engullido sin entenderlo del todo bien, causando después daño, náuseas, malestar y hasta diarrea mental en la matemática genial que Paca lleva dentro.

- **EL MAESTRO:** Paca ha planteado el desdoblamiento de la cuenta en dos, una para los metros enteros, y otra para los decimales. También se puede hacer con una sola cuenta que compacte la parte entera con la decimal. Por cierto, es bastante bueno para la mente matemática de cada cual reflexionar sobre la lógica decimal que hay más allá de la sosa rutinaria receta mecánica de la resta, cuando se hace sin saber cómo funciona, cuando la mente no puede apreciar su sabor.

- **EL MAESTRO:** Otro caso.

Caso 3. Si tenemos que multiplicar con números decimales, a ver, vamos a pensar otro ejemplo.

- **LUIS:** Ejemplo, 50 púas a 2´5 ptas. Así se hace la cuenta. Multiplicamos sin tener en cuenta los decimales, cortándolos al final.



- **EL MAESTRO:** Sería interesante reflexionar sobre la lógica que se esconde tras la mecánica del corte de decimales.

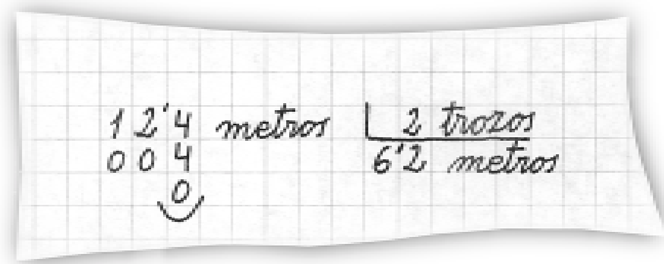
Las mentes del grupo empezaron a jugar al escondite con la coma decimal saltando sobre los números, hasta que consiguieron atraparla con las garras de la lógica.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Al multiplicar las 50 púas por 25 ptas, lógicamente se engorda la cantidad de pesetas en 10 veces. Por tanto, para compensar el desequilibrio cometido al principio adrede, tenemos que hacer la cantidad final 10 veces más pequeña, así de sencillo.

- **EL MAESTRO:** En situaciones de repartos es un poco más complejo, según estén los decimales en la cantidad a repartir (dividendo), en la que reparte (divisor) o en ambas. Otro caso es cuando hay que sacar decimales para repartir lo que sobra. Analicemos los cuatro casos con cuatro ejemplos.

<ins>Caso 4.</ins> Si tuviéramos que repartir 12´4 metros de hilo en 2 trozos iguales, ¿Cómo se hace la cuenta?

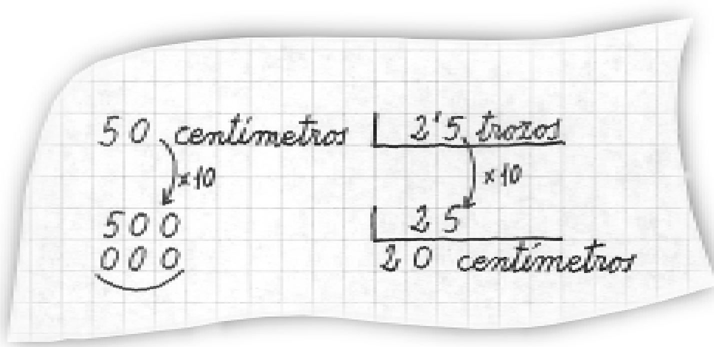
José hizo la cuenta sobre la pizarra.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Primero se reparte la parte entera, al terminar ésta se pone el separador decimal en el resultado, y se continúa repartiendo la parte decimal, que se anota en la parte decimal del resultado, lógico.

<ins>Caso 5.</ins>

Antonio nos mostró otra cuenta con decimales en la caja de dividir.



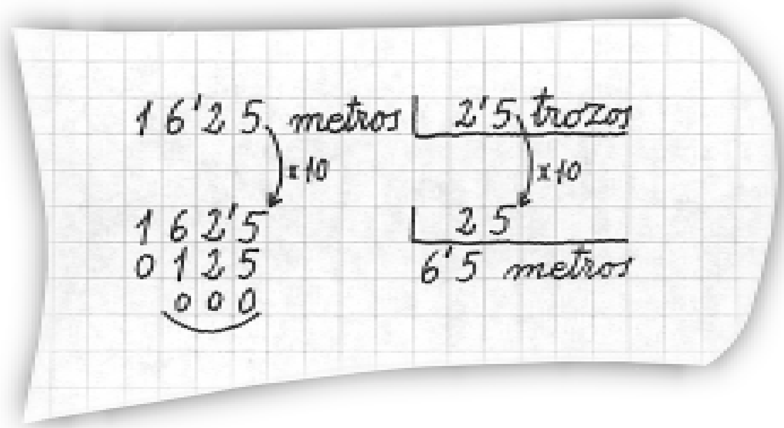
- EL MAESTRO: Este caso es más difícil, cuando te has olvidado de la mecánica pura y dura, si lo aprendiste así por desgracia. ¿Por qué se empieza quitando los decimales del divisor repartidor?

En grupo llegamos a la conclusión de que lo primero que hay que hacer es quitar los decimales del divisor porque las tablas de multiplicar las hemos aprendido sin decimales, como es natural. Por otra parte al desplazar la coma fuera del número de la caja de dividir se agranda en este caso 10 veces. Como consecuencia la división se desequilibra, no es la misma, pudiendo cometer una falta matemática. Y para arreglarlo, para restablecer el equilibrio es lógico agrandar el mismo número de veces la cantidad a repartir, consiguiendo así una división equivalente a la primera.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Concentrando el pensamiento, está claro que de un hilo 10 veces más largo sale un número de trozos 10 veces mayor, que son los dos datos de la división transformada. Lo que no varía es la longitud de un trozo, que es la que nos interesa sacar, y que es la misma en ambas divisiones.

Caso 6.

Encarna nos planteó una división con decimales en ambos números.

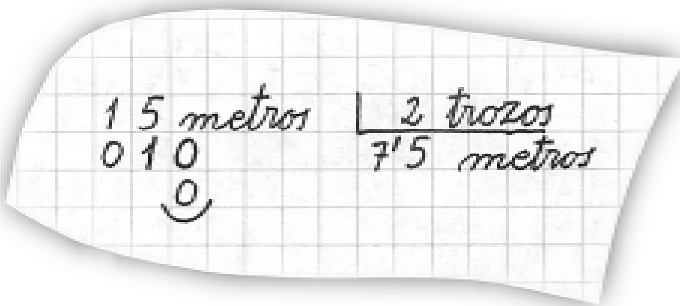


- ENCARNA: He agrandado 10 veces el número de la caja de dividir para tener una cantidad entera. Por tanto también he engordado 10 veces el número de metros. De esta forma conseguimos mantener la longitud de cada trozo de hilo al comparar las dos cantidades inventadas.

Caso7.

Juana planteó el caso de repartir 15 metros de hilo en 2 trozos.

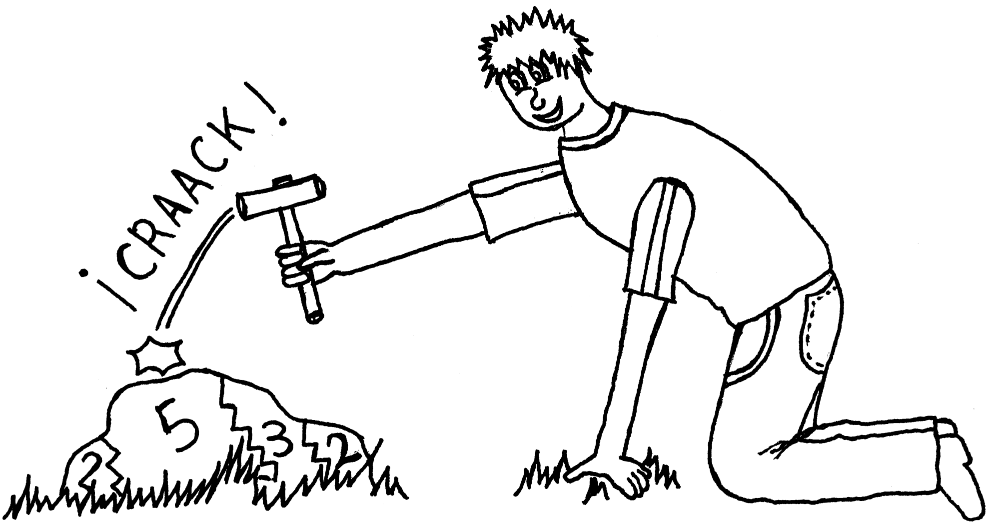
Todos sabíamos que cada trozo era de 7´5 metros, sin necesidad de hacer cuentas, y también conocíamos la mecánica de añadir un cero para sacar un decimal.



- EL MAESTRO: Pero ¿por qué añadimos un cero al metro que sobra?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Porque el pico del resultado, lógicamente no llega a medir un metro sino décimas de metro, y éstas sólo se pueden obtener, en este caso, del reparto de décimas de metro, por supuesto. Por eso añadimos el cero al metro, para traducirlo a décimas de metro.

NÚMEROS ROTOS
O CARNES DE NÚMERO ENTERO
(SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



- **EL MAESTRO:** Todos los números están formados a partir del uno, a base de repetirlo un número de veces. Uno más uno son dos, uno más uno más uno son tres, uno más uno más... Partiendo del número uno, sencilla y naturalmente, sumando y sumando, multiplicando y multiplicando, que es como sumar por el atajo para acortar las cuentas, podemos componer toda la cantinela de los números hasta llegar al infinito si fuera posible. Naturalmente, el uno es el átomo de la idea de los números. Siguiendo el hilo de la comparación con la materia, podemos imaginar que de la misma manera que los átomos se agrupan en moléculas, los unos también se unen en conjuntos, en bloques, bloques de dos unos, de tres unos, de cinco, de siete, de..., bloques que a su vez se pueden repetir un determinado número de veces. Sirvan de ejemplo las siguientes composiciones de números:

- 2 cajas de 20 kilos de naranjas, igual a 2 por 20, igual a 40 kilos, por cierto muy buenas para prevenir resfriados.

- 3 huertos de cultivo ecológico con 15 frutales en cada uno, igual a 3 por 15, igual a 45 frutales de buena calidad y respetuosos con el cuerpo humano.
- 5 cestas de 2 postres en cada una, de 15 nueces cada postre, igual a 5 por 2 por 15, igual a 150 nueces.

En buena lógica la composición del número total, del resultado, también se puede descomponer en sus números de origen, basta con pensar en sentido contrario al inicial. Así en el ejemplo de los huertos:

a) 3 huertos por 15 frutales igual a 45 frutales.

b) 45 frutales son 3 huertos de 15 frutales en cada uno.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Los números se componen y descomponen en la mente, como lo hacen las cosas a las que acompañan.

- **EL MAESTRO:** A la hora de hacer cuentas, de relacionar unos números con otros, a veces conviene utilizarlos descompuestos. Por eso debemos aprender a descomponerlos, a romperlos en sus elementos básicos, en sus primeras piedras, en sus números primeros, hasta que no se puedan romper más, hasta que queden triturados por el martillo de la división exacta formando un empedrado, una esencia de números irrompibles, moleculares, ladrillos del edificio de los números naturales, y también de los enteros si jugamos con el signo negativo.

- **PACA:** Está bien, está bien, ha quedado bastante claro que los números compuestos se pueden romper en sus primeros. Estoy deseando de pasar a la acción, de saber cómo hacerlo, de aprender a darle «martillazos» a los números.

- **CARMEN:** Parece sensato empezar por el uno, el 1, que es el primero, el origen de todos los números. Está muy claro que este no se puede romper con el martillo de la mente ni con el de la división porque perdería su identidad de número natural.

- **PEPE:** Entonces podemos pasar al número 2. El 2 se rompe en 1 y 1, Ya está.

- **LUIS:** El 3 se rompe en 1 y 1 y 1.

- **JUANA:** Toma, y el 4 en 1 y 1 y 1 y 1. Pero esto parece que no tiene mucha gracia, me da la sensación de que estamos patinando y resbalando en el barro del uno, creo que así no vamos a descubrir nada nuevo, presiento que nos estamos metiendo en una calle sin salida... Propongo un alto en el camino, una reflexión.

- **EL MAESTRO:** Calma, vamos muy bien en el proceso, posiblemente nuestras mentes están viajando atrás en el tiempo, más de dos mil años, para descubrir la esencia de la rotura de los números en el terreno virgen de los comienzos, casi seguro que nuestras neuronas están bailando alguna danza muy parecida a la que bailaran las del sabio griego Eratóstenes cuando se ponía a pensar en todo esto. El construyó una tabla en la que respetó los números primeros (primos en italiano) y anuló los que no lo eran. Ahora podemos intentar nosotros reconstruir esa tabla, rehacerla, volver a descubrirla y reproducirla con la energía de nuestro propio razonamiento. Para conseguirlo podemos imaginar como hemos dicho antes, que cualquier número compuesto se puede descomponer, romper con el martillo de la división exacta en piezas más pequeñas, en números más pequeños. Por otra parte acabamos de comprobar que descomponer un número compuesto en piezas de «uno» parece que no nos lleva a ninguna parte.

- **PEPE:** Como la pieza del «uno» es neutral para romper los números, para dividirlos, sugiero que los empaquetemos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco... Para empezar veamos lo que pasa con los paquetes de dos.

- **EL MAESTRO:** Perfecto. Lo probamos con el martillo de la división, de dividir entre dos. ¿Qué condición deberán cumplir los números mayores que el 2 para que al repartirlos en parejas no sobre ningún soltero?

- **ÁNGELES:** Que sean números pares, está muy claro. Si es un número impar, al formar parejas, seguro que «uno» queda soltero.

- **LUISA:** O que «una» queda soltera.

- **EL MAESTRO:** Eratóstenes tachó en su tabla todos los números pares menos el primero, menos el primo 2. El número 2 es la primera pieza clave tanto para componer números a base de repetirlo un determinado número de veces en la multiplicación, como para romper, para descomponer un número al dividirlo entre 2, siempre que sea par, claro está.

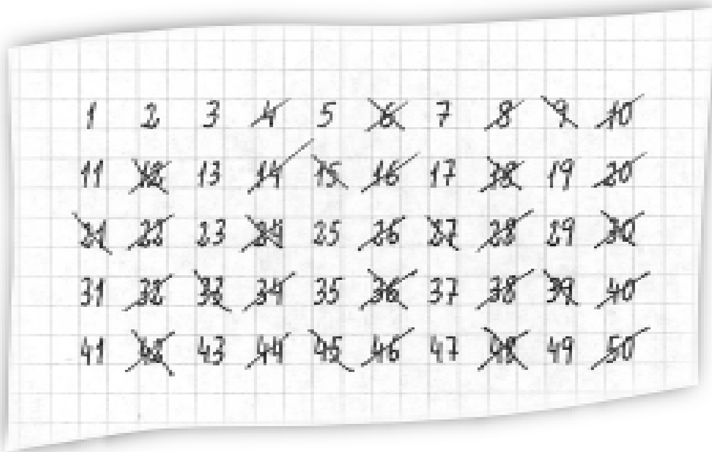
- **LOLI:** Podemos seguir con paquetes de tres.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué condición deberán cumplir los números mayores que el 3 para que al partirlos de 3 en 3 de un número exacto de veces?

- **ANDRÉS:** Que multipliquen al 3, que se repita el 3 un número exacto de veces, que estén construidos con moléculas de 3, que el 3 forme parte de sus carnes de número.

- **EL MAESTRO:** Sugiero que en una tabla del 1 al 50, tachemos tanto los que multiplican al 2, las parejas, como los que multiplican al 3, es decir todos aquellos que se rompan al dividirlos entre 2 y/o entre 3.

La tabla quedó así:

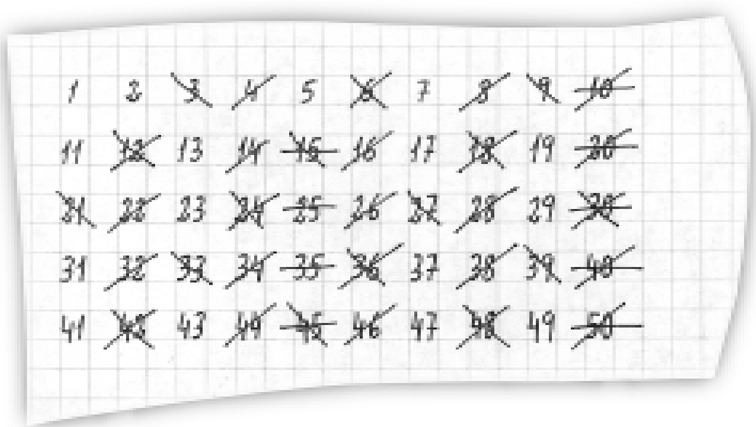


- PACA: Es curioso observar que el número 1, el 2 y el 3 son inmunes a las tachaduras.

- FLORA: El primer número que encontramos a continuación en la tabla, sin tachar, es el 5, al que le concederemos también la gracia de la inmunidad a la tachadura, siguiendo la lógica anterior. Los que no se van a librar son sus múltiples descendientes, el 10, el 15, el 20, el 25..., vamos los pares del cero a la derecha y los impares terminados en cinco.

- EL MAESTRO: Desde luego, todos esos múltiplos de 5 pierden su identidad porque son una simple repetición del número 5, que es el gen de todos ellos, que es su carne original de número.

Después de tachar los múltiplos de 5 la tabla quedó así:

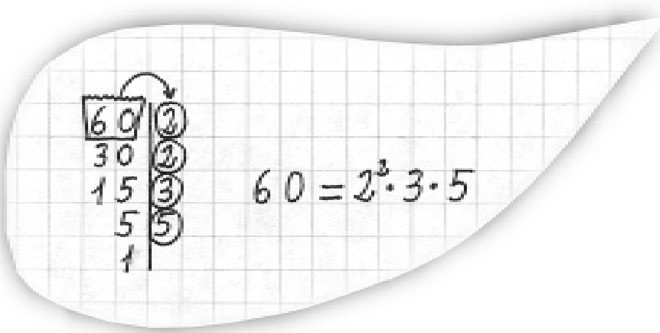


- **JUAN:** Y así podemos continuar el proceso para descubrir los números primeros (primos) de las series de multiplicar en esta tabla, respetando su identidad genética en la composición de los números.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Este proceso ayuda mucho en la toma de conciencia de que montando las piezas de los números primeros (primos) en las cuentas de repetirlos, de multiplicarlos, y vistiéndolos con el signo positivo o negativo, podemos construir todos los números enteros. Y de paso sirve para codearse con el sabio Eratóstenes, conectar con su pensamiento al volver a descubrir su tabla de tachones, elevar el nivel de autoestima al bucear en las raíces históricas del pensamiento de los sabios de los números, y respirar el ambiente perfumado de las esencias matemáticas.

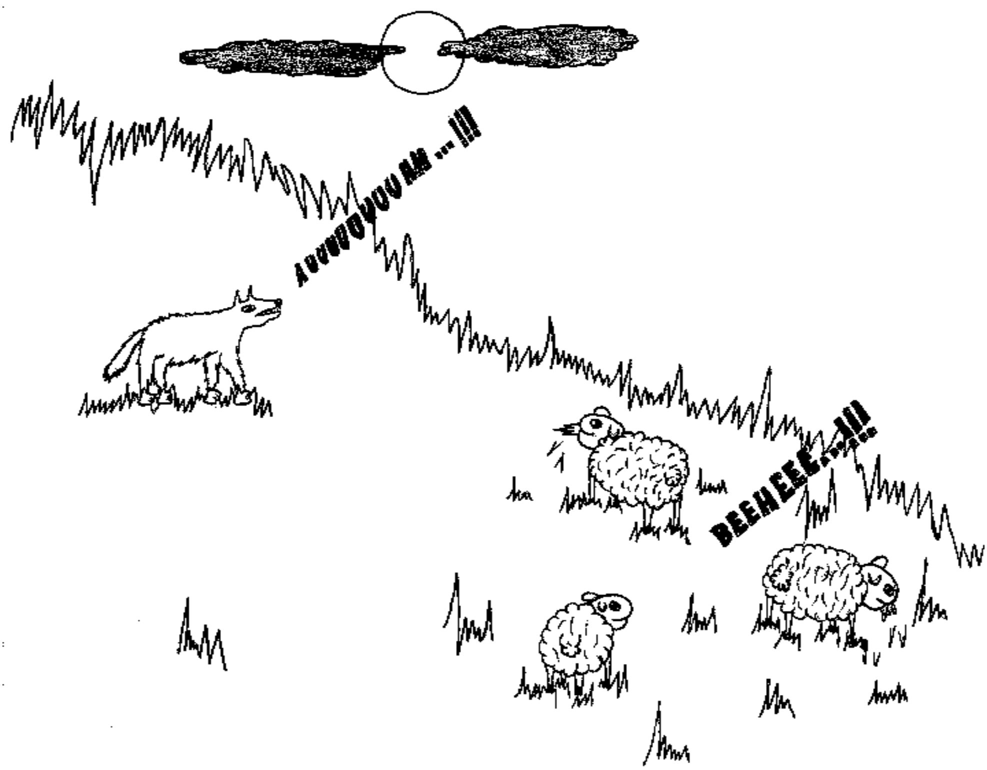
- **EL MAESTRO:** Ahora que tenemos la idea clara del significado de los números primeros (en castellano), primos (en italiano), números primos en Matemáticas, podemos dar un paso más, analizando la mecánica de la descomposición o rotura de un número en sus piezas primeras, en sus factores primos. Pongamos por caso que tengamos que romper o radiografiar el número 60 hasta ver sus genes, algo así como vaciar el vaso imaginario que contiene al 60 en sus gotas esenciales, que son sus factores primos, de manera que al multiplicarlos entre sí den otra vez 60, vuelvan a llenar el vaso del que salieron.

El proceso de razonamiento se puso en marcha en el grupo, empezando por el número 60 y continuando con otros ejemplos, llegando a la conclusión de que lo más sencillo era romper el número por la mitad, por la mitad de la mitad y así todas las veces que fuese posible; y a continuación probar a trocearlo con el martillo de la división exacta entre 3, y después entre 5, entre 7, entre 11, entre 13, y así hasta encontrar un último número primo irrompible.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En esencia la tarea de descomposición de un número en sus factores primos es como el trabajo del picapedrero.

EL LOBO Y LAS OVEJAS (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



- EL MAESTRO: La estampa del lobo comiendo ovejas, un trozo de la cadena trófica de algunos ecosistemas de las montañas, recuerdos preocupados y duros de viejos pastores, casi mi propio recuerdo de pequeño y adolescente cuando era pastor, nos puede servir de telón de fondo para encontrarle sentido al concepto matemático de mínimo común múltiplo, en el escenario de la Naturaleza. Podemos empezar por imaginarnos una historia caprichosa o un cuento de pastores. Supongamos que un pastor puede llevar sus ovejas periódicamente cada 3 o cada 4 días a pastar a un monte donde ataca el lobo sólo en días de luna llena, uno cada 28 días. ¿Cuándo correrá el rebaño antes el peligro de ataque del lobo, si lo lleva cada 3 o cada 4 días, a partir del siguiente al día de luna llena?

- **ALGUNOS:** ¡Evidentemente si lo lleva cada 3 días!

- **EL MAESTRO:** ¿Por qué?

- **PERICO:** Porque va más veces.

- **LUCÍA:** Parece muy lógico tu razonamiento, Perico, yo también pienso como tú, pero en esto de los números donde menos te esperas te salta la liebre. Con esto quiero decir que para estar más seguros de esa afirmación, deberíamos analizar la relación entre el número 3 y el 4, referentes a las ovejas, con el 28, el número del lobo.

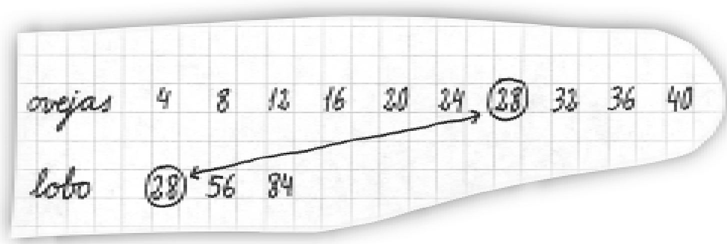
- **JOSEFA:** Si las ovejas van de 3 en 3 días, estarán en el monte los días 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ... Como el lobo va el día 28, las ovejas se libran peligro.

- **PEPE:** Si van cada 4 días, estarán los días 4, 8, 12, 16, 20, 24, ¡28!, 32, ... El número 4 encaja antes que el 3 en el número del lobo.

- **EL MAESTRO:** Pepe, tú lo has dicho muy bien, el 4 encaja de forma exacta, y peligrosa en el rebaño en este caso, en la séptima vez que van las ovejas a ese monte. ¿Y si la manada sigue la misma periodicidad de ir a ese lugar, sufrirá más ataques del lobo?

- **ANDRÉS:** Sí, cada 7 veces que vaya, cada 28 días, cada luna llena, y por las lunas de las lunas.

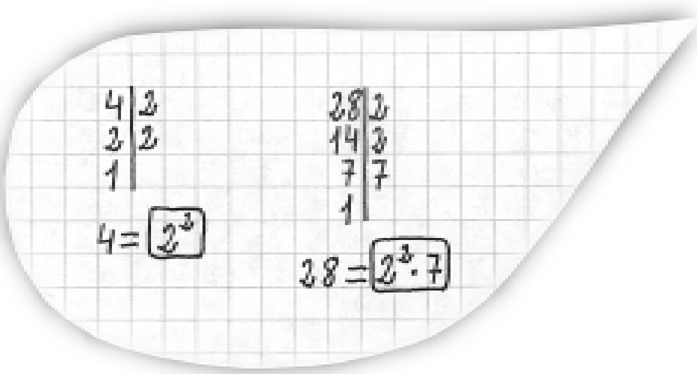
- **EL MAESTRO:** Para observar claramente la coincidencia cíclica de los múltiplos vamos a desplegar en paralelo el calendario de las ovejas y el del lobo.



- **EL MAESTRO:** ¿El número del lobo es múltiplo del número 4 y del 28? ¿El día 28 es común en los calendarios de las ovejas y del lobo? ¿Coincidirán más veces ambos calendarios? ¿Cuál es el número de días en el que se encuentran por primera vez el lobo y las ovejas, el mínimo número en el que coinciden? ¿Qué podemos decir del número 28?

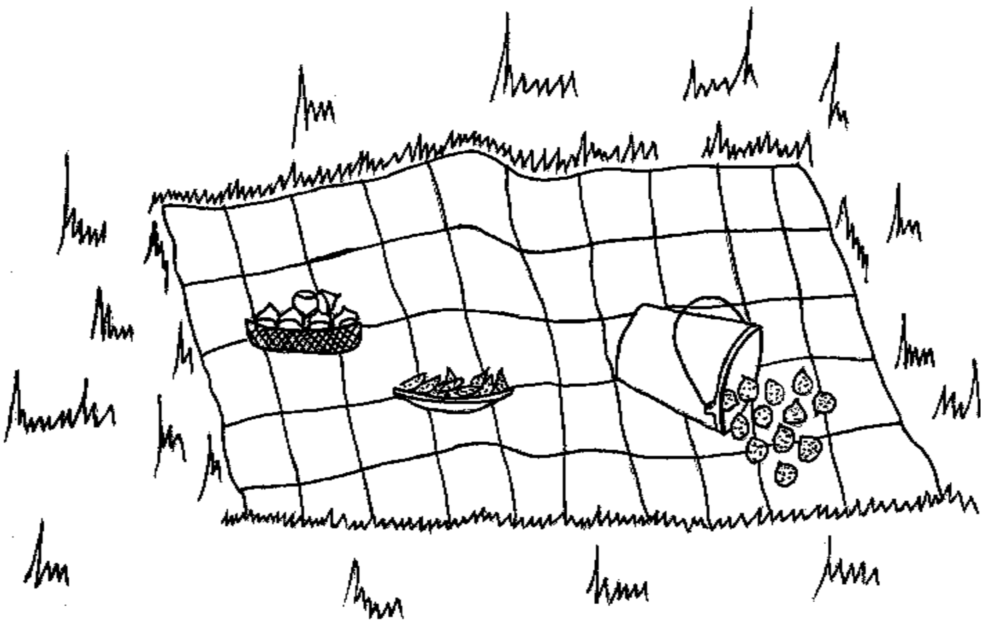
- **ENCARNA:** Está muy claro, si las respuestas a esas preguntas son afirmativas, que lo son por razones obvias, también estamos afirmando que el número 28 es el mínimo común múltiplo de 4 y de 28.

- **EL MAESTRO:** Además, bajo el punto de vista de la «anatomía» de los números, de su «rotura molecular», es lógico pensar que el número 28 contiene «carne» de número 4 y «carne» de número 28, en sus entrañas, en sus componentes, ¿verdad? Esta afirmación la podemos comprobar si rompemos ambos números en sus primeros, en sus primos, bajo la óptica de la división exacta.



- **EL MAESTRO:** Así, rotos, desintegrados, seccionados, descompuestos, nos damos cuenta que el número múltiplo más pequeño, el mínimo que contiene carnes de los dos, del 4 y del 28, tiene que ser una especie de híbrido de éstos, el 2^2 por 7 = 28. Esta es una manera matemática intuitiva de entender el mínimo común múltiplo de dos o más números enteros, el m.c.m.

POSTRE DE FRUTOS SECOS (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



- **EL MAESTRO:** Hoy toca la lección del Máximo Común Divisor, M.C.D.

- **LUIS:** ¡Qué expresión más rara!

- **CARMEN:** ¿Es alguna extraña herramienta matemática?

- **JOSÉ:** ¿Se puede aplicar por casualidad en la vida cotidiana?

- **PEPE:** ¿Qué relación habrá entre el Máximo, el Común y el Divisor?

- **PACA:** ¿Qué significa?

- **JUAN:** Lo que está claro es que tiene que ver con la división, pero...

La expresión matemática también provocó una reacción en los gestos y en el ánimo del grupo:

Caras de aburrimiento,
gestos de desilusión,
miradas tristes,
bostezos, desesperación,

mal cuerpo,
mentes en blanco,
ánimo por los suelos,
apatía, desgana, incomprensión.

- EL MAESTRO: Perdón por la expresión a secas «Máximo Común Divisor», perdón por las siglas M.C.D. Así, fuera de contexto, desconectada de la realidad, de la imaginación, de todo, es difícil verle el sentido, la gracia, la sal... Por eso propongo ahora vivir la experiencia del «postre de frutos secos», los que hay en estas cestas de castañas, almendras y nueces.

EXPERIENCIA O POSTRE DE FRUTOS SECOS

- EL MAESTRO: Se trata de repartir las 6 castañas, las 9 almendras y las 12 nueces, que están en el plato que tenéis delante en el mayor número posible de postres, con la condición de que sean iguales.

Lo que parecía tan fácil en principio, se complicó en algún momento e incluso nos dio la lata porque sobraban almendras, faltaban castañas..., hasta que al fin resultaron 3 postres iguales, comunes. El lector, si le apetece, puede hacer los cálculos para comprobar si es verdad, pero si no prepara el postre con los frutos no podrá disfrutar como lo hicimos los allí presentes, para terminar la experiencia como mínimo con buen sabor de boca.

- EL MAESTRO: ¿Hemos repartido todos los frutos secos? ¿Hemos dividido cada uno de los frutos en montones? ¿Han salido los montones, los postres iguales, comunes entre sí? ¿Hemos sacado el máximo número de postres posible? ¿El número de postres, el número 3 es divisor exacto de las 6 castañas, de las 9 almendras y de las 12 nueces?

- Mª CARMEN: Sí, sí, sí, ya lo entiendo, el número 3, tres postres, es el máximo común divisor de 6 castañas, 9 almendras y 12 nueces. Claro que sí.

- EL MAESTRO: Hagamos el estudio de todas las posibilidades de reparto sin partir fruto alguno:

a) Las castañas:

1 postre de 6 castañas,

3 postres de 2 castañas,

6 postres de 1 castaña.

b) Las almendras:

1 postre de 9 almendras,

3 postres de 3 almendras,

9 postres de 1 almendra.

c) Las nueces:

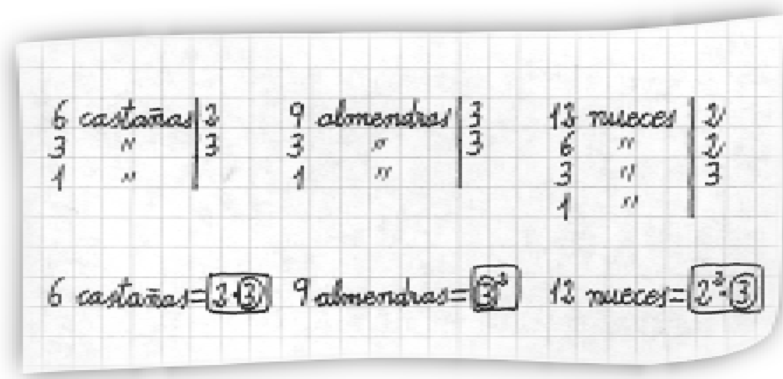
1 postre de 12 nueces,

2 postres de 6 nueces,

3 postres de 4 nueces,

12 postres de 1 nuez.

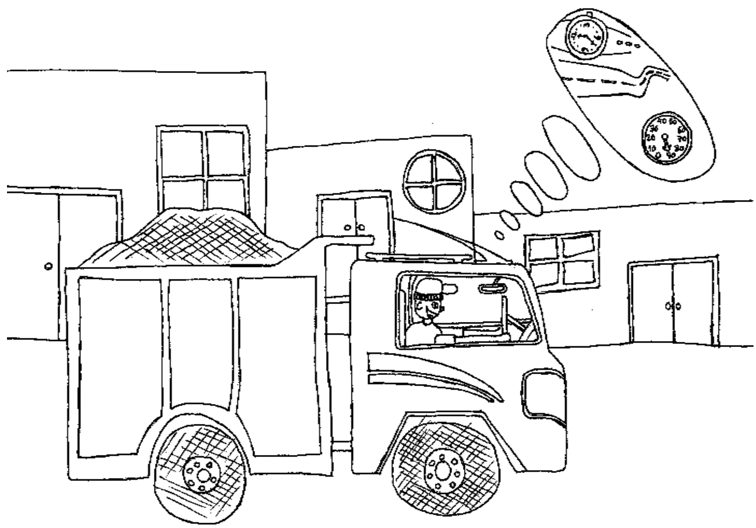
Comparando el número de postres posibles que se pueden formar con cada clase de frutos secos, observamos que el número común de postres, el que coincide, el que evita las sobras o faltas de frutos es 3 postres. Acabamos de comprobar que el máximo número de postres con estos frutos es tres. Hemos empezado por lo concreto, tocando y masticando los frutos; y ahora nos disponemos a tocarlos y masticarlos con la mente. Ya metidos en el terreno abstracto conviene romper los números de cada uno de los tres frutos en sus números primeros, primos, para comprobar algunas relaciones de interés que nos ayudarán a descubrir el máximo número de postres comunes posibles en el campo de los números.



- JUANA: Al comparar las radiografías de las tres cantidades se observa que el único número común a los tres frutos es el 3, por tanto se pueden formar 3 postres.

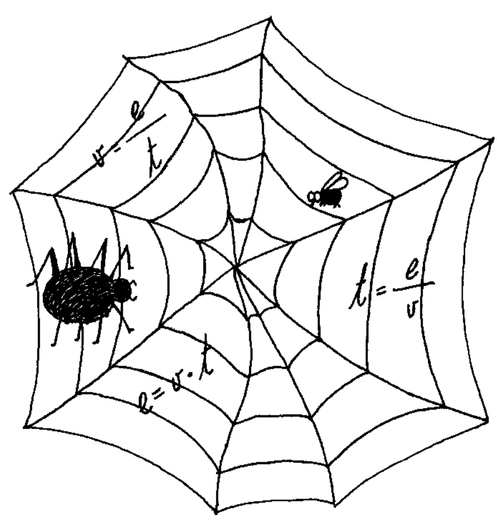
- EL MAESTRO: Para concluir podemos decir que al romper o descomponer varios números en sus números primeros, primos, irrompibles, con el martillo de la división, conseguimos sacar los elementos más pequeños en que se trituran los números enteros. Al comparar sus radiografías descubrimos el elemento, la pieza más grande del rompecabezas que encaja en todos, el número común que divide a todos, el divisor común, el común divisor, el máximo común divisor, el M.C.M.

LAS COSAS QUE SE MUEVEN (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



- EL MAESTRO: Los números también corren al ritmo de las cosas que se mueven en el espacio con el paso del tiempo, a una determinada velocidad. Los números que acompañan a los móviles guardan relaciones entre sí, están enlazados mediante las fórmulas del movimiento, lógicamente.

La expresión «fórmulas del movimiento» provocó una reacción de desánimo generalizado, que se notaba sobre todo a través de esas comunicaciones no verbales que se dan en los grupos. Parecía que el estado de ánimo era una mosca que temía caer en una tela de araña, la del cuerpo de las fórmulas sin alma.



- **EL MAESTRO:** No os preocupéis por las fórmulas, no las utilizaremos, lógica y razonablemente, hasta que no las hayamos descubierto con la misma sabiduría que un camionero por ejemplo, al pensar en su camino, su tiempo y la velocidad de su camión. Ahora podemos hacer un esfuerzo por ponernos con la mente al volante. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar el camionero a su destino?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las matemáticas de los oficios, del camionero, del carpintero, del albañil, de la pastora, del agricultor, de la panadera, del sastre... son naturales, artesanas y muy vivas.

- **JAVIER:** Para saberlo se repartirá todo el camino entre la velocidad, que no es ni más ni menos que el tramo de camino que avanza en cada hora, para descubrir así todos los tramos del camino, y ya se sabe que tantos tramos tantas horas.

- **EL MAESTRO:** ¿Cuál será la fórmula?

- **JAVIER:** El tiempo es igual al camino troceado por la velocidad, por tanto $t = e / v$.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esto sólo sería una expresión en abreviatura, una fórmula fría, una triste forma, si no tuviera el sentido y la esencia que está en la mente del camionero, o en nuestra propia mente.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué datos necesitamos para saber el camino que recorrerá?

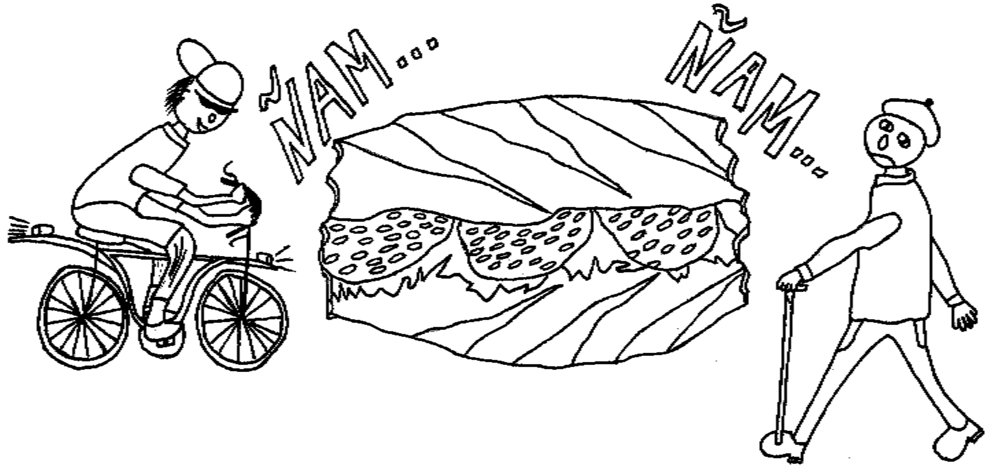
- **JUAN:** Obviamente su velocidad y el tiempo que tarda en llegar al sitio.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué cuenta habrá que hacer, cómo tendremos que combinar el tiempo y el ritmo de avance?

- **CARMEN:** Sencillamente se multiplica la velocidad por el tiempo, por tanto «el camino es igual a la velocidad por el tiempo».

- **EL MAESTRO:** Enhorabuena, acabas de descubrir la fórmula del camino en función del ritmo de avance y el tiempo de marcha, $e = v.t$, enhorabuena porque no has necesitado que nadie te la demuestre, porque la has encontrado con la energía de tu razonamiento. Enhorabuena porque no vas a necesitar aprendértela de memoria, porque si se te olvida la puedes volver a pensar y a encontrarla otra vez. Enhorabuena porque así no sufrirás nunca el agobio del olvido de esta fórmula. Enhorabuena porque para ti esta expresión no es una receta que has recibido con pasividad, sino el fruto de tu pensamiento.

AL ENCUENTRO
(SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



- EL MAESTRO: Los números también corren al ritmo de las cosas que se mueven. La propuesta para hoy es el análisis del acercamiento de dos móviles que corren al encuentro.

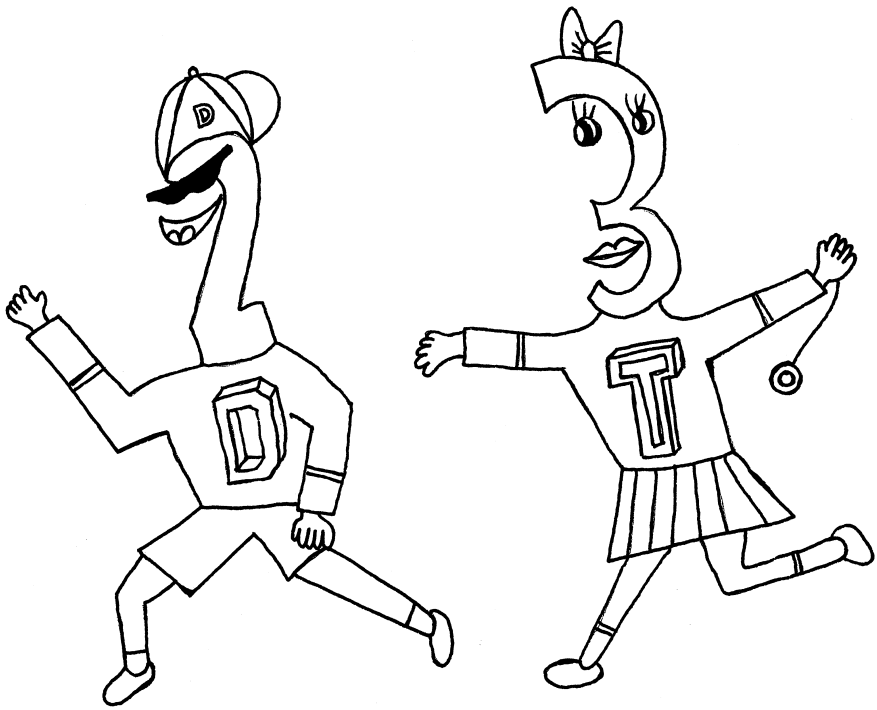
Para saber el tiempo que tardan en encontrarse, para entender esta situación de una forma sencilla podríamos pensar en un bocadillo. El camino lo comparamos con el bocadillo; y el tramo que avanza cada uno de los dos móviles en cada unidad de tiempo, en este caso una hora, lo podemos comparar con un bocado.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Así es más fácil masticar las matemáticas! ¿Acaso así no serán tan duras de roer?

- MAXI: Ya lo sé, para que se encuentre el ciclista con el caminante, entre ambos tienen que comerse el camino, con las ruedas y con los pies claro. Cuando transcurra una hora de reloj, entre los dos «comerán» la suma de 20 kilómetros más 5 kilómetros, un tramo de 25 kilómetros a la hora, vamos en una hora.

- PEPA: Si para encontrarse tienen que comer 50 kilómetros, basta con repartir todo el camino en tramos de 25 kilómetros, que es como hacerlo en tiempos de una hora, y sabremos el tiempo que tardan en encontrarse.

CORRE QUE TE PILLO (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)



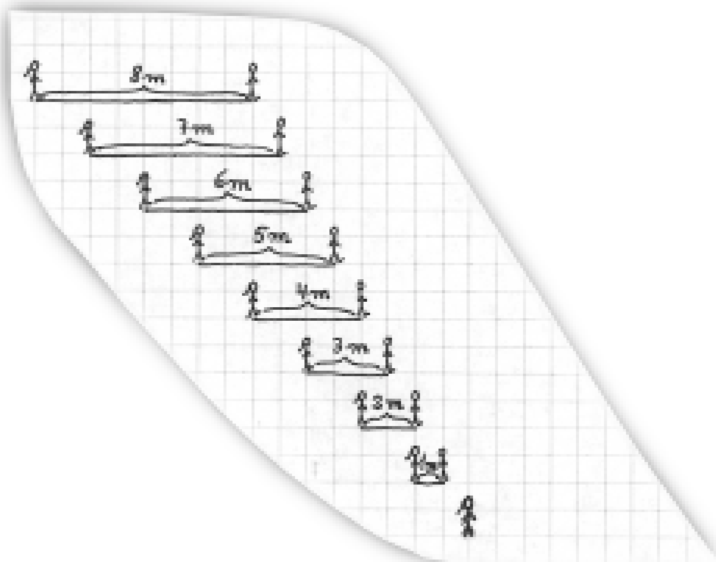
- EL MAESTRO: Los números también corren al ritmo de las cosas que se mueven. Por eso para arrancarle números al tema de hoy, el de los móviles, podríamos empezar jugando al «corre que te pillo», aunque tengamos que salirnos al pasillo.

COMENTARIO DE LA JUGADA ROBOTIZADA

Por motivos didácticos programamos el juego de una pareja, aunque por eso perdió parte de su encanto. Fijamos la ventaja de Juan sobre Paca con un hilo tirante de 8 metros, sujeto por las manos de ambos. Habíamos acordado que en cada segundo, en cada tic-tac, Juan avanzaría un paso de 1 metro y Paca dos pasos de 1 metro. Congelamos la situación segundo a segundo hasta que Paca pilló a Juan, en el significado familiar de la palabra. Como el hilo hacía comba en cada tic-tac le fuimos cortando los trozos que le sobraban para mantenerlo estirado.

ANÁLISIS ESQUEMATIZADO DEL JUEGO

Después analizamos la situación paso a paso, reflejándola en un esquema:



Y LLEGAMOS A LA CONCLUSIÓN

Y llegamos a la conclusión de que Paca le va reduciendo la ventaja a Juan segundo a segundo de forma constante, hasta dejarla en nada. Para entenderlo mejor podemos pensar que es una escena, parecida en esquema, a la que se produce al comerte un bocadillo, comparable a la ventaja inicial de Juan sobre Paca. A su vez, cada bocado sería comparable a la distancia que el perseguidor le come al perseguido, que es lo que el perseguidor quiere menos lo que el perseguido le deja, porque se quiere escapar.

- **EL MAESTRO:** ¿Cuáles son las constantes en este proceso?

- **MARIANA:** Tres son las circunstancias que se dan, que arrastran otros tantos números: el ritmo de avance de Juan, el ritmo de avance de Paca y la ventaja inicial del primero sobre la segunda.

- **PERICO:** ¿Qué fórmula del movimiento tenemos que aplicar a esos tres números para que nos dé el tiempo que Paca tarda en pillar a Juan?

- **EL MAESTRO:** ¿Y tú me lo preguntas? Fórmula eres tú, la fórmula la debes tener en la fuerza de tu pensamiento, en tu propio proceso de razonamiento.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las fórmulas son como las brevas, y no es bueno habituarse a esperar a que te caiga la breva. Lo interesante de una fórmula es descubrirla siguiendo las leyes de tu pensamiento y así enriquecer tu sabiduría matemática.

PERICO EL DE LOS PALOTES
(COMETA DEL UNIVERSO MATEMÁTICO)

Estábamos trabajando el tema de las fracciones, cuando alguien formuló una pregunta, que sirvió de trampolín para lanzar el pensamiento a un satélite de los números, o más bien a un cometa del universo matemático, puesto que las reflexiones que aquí se hicieron tienen una validez más amplia.

- **ANDRÉS:** En una fracción, ¿cómo se llama el número de arriba?, ¿y el de abajo?

- **EL MAESTRO:** No te preocupes excesivamente por eso, yo diría de buena gana, que es lo de menos, que lo más importante es otra cosa. Creo que es el momento oportuno para comentar el siguiente texto:

TEXTO: «PERICO EL DE LOS PALOTES»

Uno, dos, tres, one, two, three, 1, 2 ,3, sumandos y adición, minuendo y sustraendo, factores y producto, dividendo, divisor, cociente y resto, numerador y denominador, propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación respecto a la adición por ejemplo, mínimo común múltiplo, m.c.m., máximo común divisor, M.C.D., Sistema Métrico Decimal, S.M.D., raíz cuadrada, radicando e índice, potencia, base y exponente, pi, senos y cosenos, variaciones, permutaciones y combinaciones, monomios y polinomios, medias, medianas y esperanzas, números racionales e irracionales, grados, minutos y segundos, decámetros, decilitros, miligramos, micras, centímetros cuadrados, hectáreas, decímetros cúbicos, kilolitros, expresiones complejas e incomplejas...

Ideas, ideas y más ideas, bautizadas con nombres, nacidas al paso de la historia de las matemáticas, tan bellas como significativas y sencillas en sus comienzos y en las mentes de quienes las acuñaron y de quienes las analizan para entenderlas.

Palabras, palabras y más palabrerías, desgastada su esencia con el paso del tiempo, carcomidas a veces por el memorismo, que suele arrancarlas de las raíces de sus significados, transformándolas en un bla, bla, bla, en un na, na, na, vacío, monótono, que te adormece, na, na, na, da, da, da, nada, nada, nada...

Palabras y sólo palabras cuando le damos más importancia al ropaje tejido de palabras que al ente desnudo que esconden dentro, cuando la memoria superficial se adueña de lo que corresponde al entendimiento profundo, cuando nos asfixiamos en el lenguaje matemático enrarecido por las formas en vez de oxigenarnos con la sencillez del fondo de los conceptos bien comprendidos, cuando le damos más importancia a palabras rimbombantes y vacías que a su contenido, cuando flotamos en la superficie de los conceptos sin disfrutar de remojarnos profundamente en las auténticas ideas de la esencia matemática. No nos engañemos tontamente a nosotros mismos, lo esencial en matemáticas es entenderlas por dentro, el nombre que le pongamos a los conceptos, aunque también es importante, es más arbitrario y cambiante, cambiará con el paso del tiempo, con el idioma del país en el que nos encontremos, con las convenciones de los matemáticos, hasta le podríamos poner a los conceptos el nombre de «Perico el de los palotes» y la esencia seguiría siendo la misma.

Después de un largo y enriquecedor debate sobre el nombre de las cosas, Andrés decidió cambiar la pregunta por otra.

- **ANDRÉS:** ¿Qué representa el número de arriba? ¿Y el de abajo?

LA ORILLA DE UNA COSA CUADRADA (SATÉLITE DE LOS NÚMEROS)

- **EL MAESTRO:** Hoy podemos imaginar una excursión por los paisajes matemáticos cuadrados, utilizando como bastón de explorador la raíz cuadrada.

- **LUISA:** Esa raíz debe ser muy rara. Todas las raíces que yo he visto son redondas.

- **EL MAESTRO:** Es una buena reacción para empezar. A ver. ¿Qué nos sugiere la expresión «raíz cuadrada»?

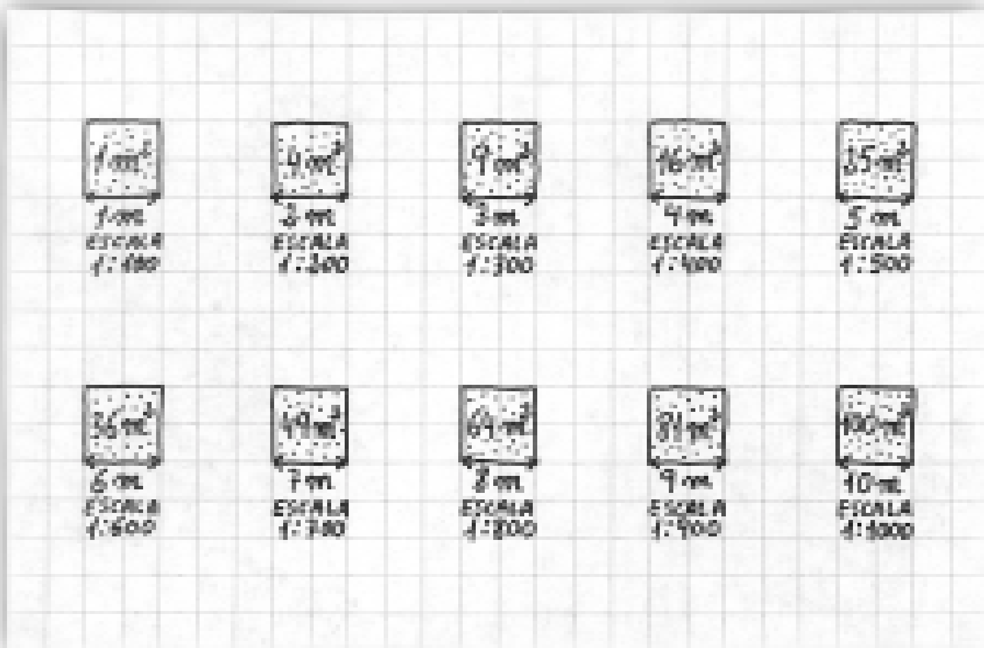
Como esta expresión nos dejó fuera de juego, decidimos hacer sugerencias de «raíz» y de «cuadrada» por separado:

De «raíz»:	De «cuadrada»:
- De árbol	- mente cuadrada
- el origen de algo	- rigidez
- génesis	- algo cuadrado
- genes	- cuatro lados
- fuente	- superficie cuadrada

Buscando conexiones lógicas en la combinación de los significados, llegamos a la conclusión que debía referirse al <u>origen de algo cuadrado</u>.

- **ANTONIO:** La «génesis» de algo cuadrado.

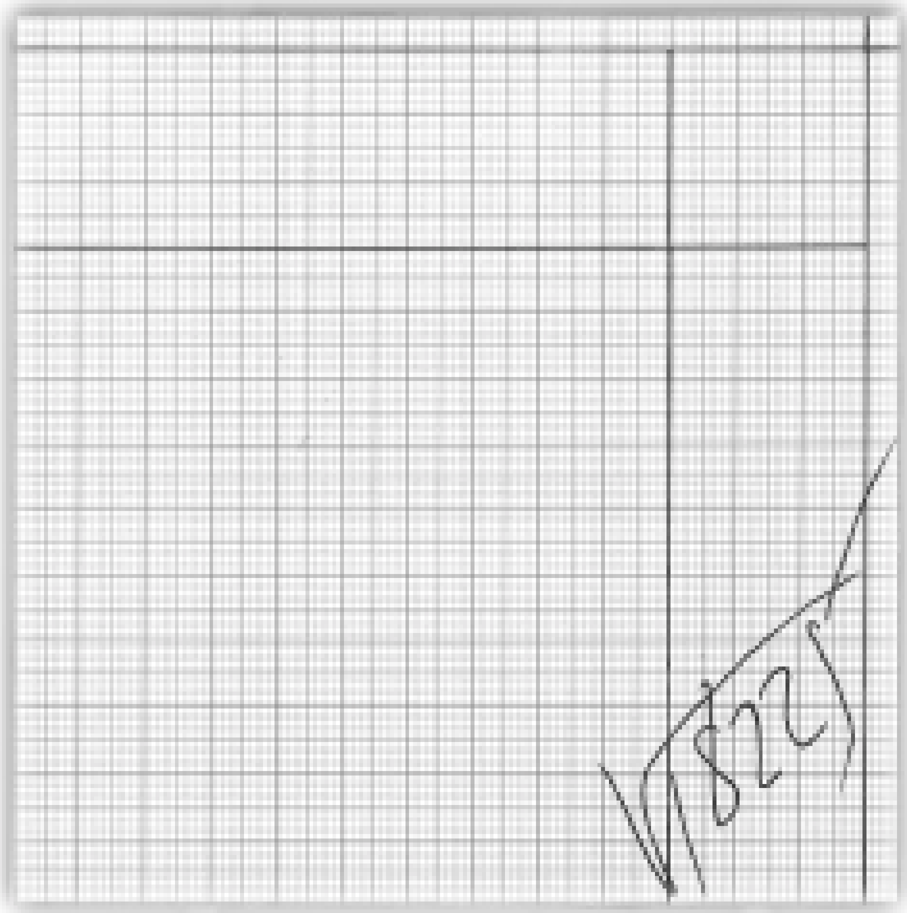
Un paseo por las formas cuadradas sirvió para encontrar una aplicación de esta herramienta matemática. En el siguiente esquema vemos gráficamente los orígenes de los cuadrados perfectos de los números enteros hasta el 100.



- JOAQUÍN: Ahora, a mis veintitantos años me entero de un significado de la raíz cuadrada, que es sencillamente la orilla de una cosa cuadrada, ahora lo entiendo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La raíz cuadrada de un número, independientemente de sus aplicaciones a los cuadrados, es otro número que al multiplicarlo por sí mismo nos da el número al que le sacamos la raíz, pero esta definición matemática es muy fría para recibirla así de entrada, sin más. Es mucho más agradable para el entendimiento empezar por una imagen. En este caso también es válida la expresión de «vale más una imagen que mil números».

- EL MAESTRO: La forma más natural de hacer una raíz cuadrada es probando a cuadrar «orillas» mentalmente por tanteo, hasta que te aproximes o consigas el valor exacto de la superficie del cuadrado. Aprender la mecánica de cómo se hace una raíz cuadrada es algo lioso pero enseguida lo consigues con unos pasos ordenados. También la calculadora te la resuelve rápidamente al presionar la tecla que lleva «una especie de V con raya a la derecha». Todo eso está muy bien pero hoy os invito a entrar en la belleza de la mecánica de la resolución de la raíz cuadrada, leyendo el significado del siguiente cuadro, que parece sacado de una galería de arte abstracto.



EL PAISAJE DE LAS FORMAS
(PLANETA DE LA GEOMETRÍA)

El maestro, para empezar, repartió un texto que había escrito previamente:

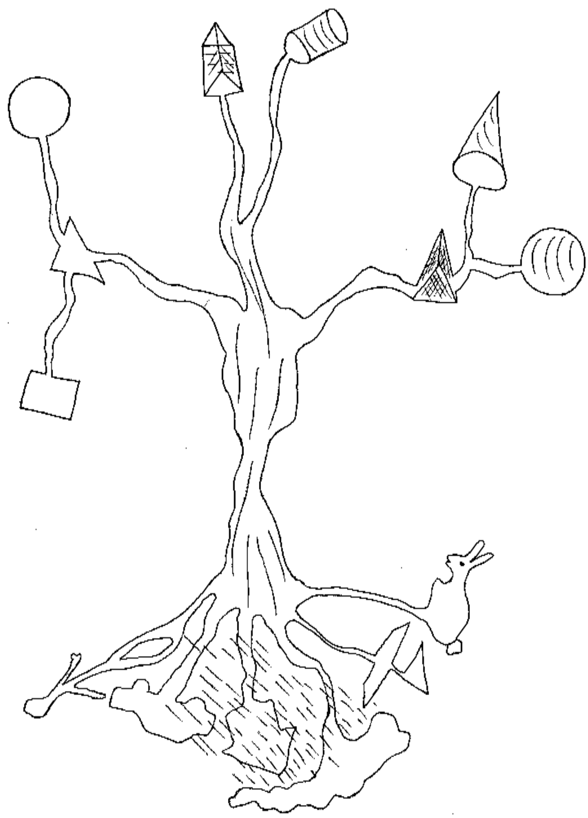
TEXTO: «EL PAISAJE DE LAS FORMAS»

«?, big-bang, nacimiento y expansión del Universo, estrellas, el Sol y sus planetas, la Tierra, el paso del tiempo, rayos y truenos, la ebullición de la vida multiforme y variopinta, las plantas, los animales, nosotros; óvulo y espermatozoide, nacer, abrir los ojos, ver los colores, absorber las formas, tocar, notar las cosas, rozar las formas otra vez... Y la vida sigue envuelta en paisajes de colores y en paisajes de formas, formas en la Naturaleza y en los inventos; formas en lo urbano y lo rural, en los pueblos, las huertas, los campos, las montañas, las nubes y la Luna; formas en la Tierra y en el Universo; formas en la arquitectura, la escultura y la pintura; bellas formas y otras menos aunque todo es relativo; formas en las viviendas y en el jardín; formas en el trabajo, en el ocio, en los viajes, en el deporte, en las vacaciones; formas en el vestido y el calzado; formas en la comida y en la bebida; formas en los instrumentos de música para darle belleza al sonido; fotografías, formas fijas, cine, formas en movimiento, formas quietas y dinámicas; formas en nuestro cuerpo geométrico y dentro del universo de nuestro cuerpo; formas en las flores y formas revoloteando alrededor de las flores en primavera; formas, formas y más formas; formas arrugadas, montañas, formas planchadas, los llanos, la superficie del mar en calma; formas rellenando trozos de espacio, formas de cuerpos; elementos adheridos a las formas como puntos, líneas generatrices, aristas, cantos, lados, puntas, vértices, ángulos, catetos, hipotenusas y demás palabras. Formas en dos dimensiones, formas de triángulo musical, de trípode, de trébede, de disco que viene curva, de Triángulo de las Bermudas, de sombra de cipreses, del triángulo de tu sombra, formas de triángulo dibujado en un papel o recortado en cartulina; formas de tableros de mesas, de puertas y ventanas, de suelos, solares y terrenos, de cosas cuadradas y rectangulares, formas de cometas, de rombos, romboides, trapos, trapecios y trapezoides; formas de pentágonos, de celdillas de abejas, de hexágonos; formas de anillos, de ruedas, de plazas, de cinturones, de niñas de tus ojos, de redondeles, de círculos... Formas en tres dimensiones, cúbicas, de cubo o de dado, de prisma sacándole los colores a la luz del sol, de cajas de zapatos, de habitaciones, de prismas que acaban como empiezan; formas de troncos, de dedos, de brazos y piernas, de botes y bidones, de gusanos y serpientes, de salchichas, de cilindros; formas de pirámides que empiezan en su base y terminan en nada; formas de cucuruchos, de gorros de payaso, de piñas, de conos; formas de frutas, de cabeza, de cuerpos celestes, de esfera... Formas de todo, todas las formas».

Este texto hizo de trampolín para lanzarnos a conocer mejor la esencia de las formas, nos ayudó a clasificarlas y a descubrir la manera de calcular áreas y volúmenes.

- EL MAESTRO: ¿Qué os parece si destilamos la savia bruta de todas las formas posibles en savia elaborada?

Entre todos diseñamos el árbol de la esencia de las formas:



- **EL MAESTRO:** Hoy os propongo un juego, el de las sillas, en versión muy particular, para descubrir el origen de las formas planas.

- **PAQUI:** No salgo de mi asombro. ¿Quién me iba a decir a mí que esto eran Matemáticas? Salgo voluntaria al juego a ver que pasa.

- **MARI:** ¿En qué consiste el juego?

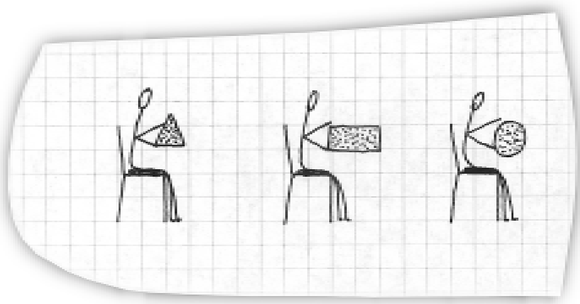
- **EL MAESTRO:** Es muy sencillo, las reglas son las siguientes:

1) Se sientan tres personas en tres sillas, representando tres formas básicas: el triángulo, el rectángulo y el círculo.
2) El jurado, todo el grupo, emite juicios sobre la pérdida de identidad por descomposición de una de alguna de las tres formas en otra.
3) La persona que represente la forma que haya perdido su identidad se levanta de la silla quedando fuera de juego.

4) En este juego de competencia de identidad o esencia de las formas planas, no nuestra, gana la persona que representa la forma plana irrompible, origen de las demás.

- **MARI:** Comprendido. Me apunto.

El trío compuesto por Paqui, Mari y Paco se sentaron en las sillas teniendo en sus manos el triángulo, el rectángulo y el círculo respectivamente.



- **EL MAESTRO:** El juego o el juicio ha comenzado. Tenemos que empezar descubriendo la pérdida de identidad de una de las tres formas.

- **JUANA:** Lo que está claro es que el rectángulo se puede romper en dos triángulos, si lo imaginamos seccionado por una diagonal.

Juana sentenció la pérdida de identidad del rectángulo y nadie alegó nada en contra porque era evidente. Mari dejó libre la silla. La cosa no estaba tan clara en el triángulo ni en el círculo. Ambos se resistían en nuestro pensamiento a perder su identidad, el uno a favor del otro. Pasó algún minuto y tanto Paco como Paqui seguían sentados en la silla, escudados por la identidad de sus formas. El maestro quiso dar una pista, mostrando un cartoncillo triangular, y simulando un juego de magia dijo, enseñando sus manos abiertas: nada por aquí, nada por acá, nada en ésta, nada en la otra. Empezó a mover aquel cartoncillo triangular en la jaula de sus manos y no sacó un conejo pero sí un círculo de papel. Risas, aplausos. Pero, ¿dónde estaba el truco?

- **PEPE:** El truco está en el entretenimiento que el maestro ha tenido doblando y redoblando varias veces la cajita de la magdalena del desayuno, para disfrazar el círculo de triángulo. ¿Acaso no hemos practicado esto alguna vez?

Paco se levantó de su silla porque acababa de darse cuenta como los demás, que la forma circular estaba generada por un triángulo bailarín que giraba sobre su vértice fijo, o por el adosado de muchísimos triángulos hasta rellenar el círculo.

Paqui permaneció sentada porque por muchos cortes imaginarios que proponía-

mos siempre reaparecían triángulos aunque más pequeños.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Por tanto nos quedó claro que el origen de todas las formas planas estaba en el triángulo. Podemos concluir diciendo que lo indivisible de la forma plana, su átomo, es el triángulo.

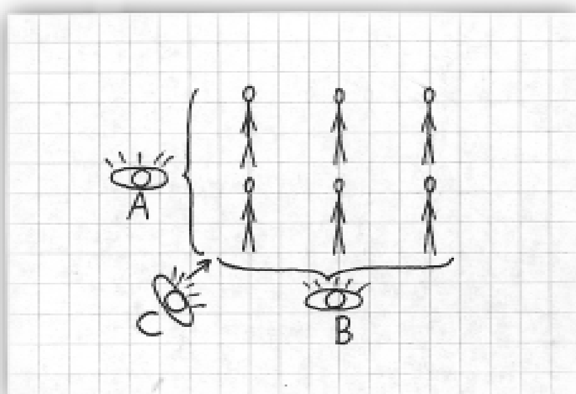
- EL MAESTRO: Si en la gran variedad de formas planas no se diera ningún parecido, si no tuvieran relaciones entre sí, si fueran extrañas entre ellas, si no se pudieran descomponer, romper, o bien generarse con la composición de otras, a la hora de calcular tamaños, extensiones, superficies o áreas, lo tendríamos que hacer de mil maneras diferentes.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Pero afortunadamente es bastante más sencillo. Si todas las formas planas, por complejas que sean, se pueden romper en rectángulos y en triángulos, sabiendo calcular la superficie de éstas, basta para encontrar la de cualquier figura.

- EL MAESTRO: Igual que hemos descubierto la esencia de las formas para ganar en sencillez, también podemos descubrir la esencia de las extensiones.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Para esto debemos pensar que las superficies habitan en un mundo muy sencillo de dos dimensiones, el largo y el ancho, están en el cruce perpendicular del «hacia acá» con el «hacia allá».

- EL MAESTRO: Os propongo una experiencia que invite a la reflexión. Necesito seis voluntarios/as para formar un rectángulo humano. Loli, Flora, Paco, Antonio, Angeles y Juanfran, formaron un rectángulo así:



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Si el lector se situara en el punto de vista A y tuviera que hacer una descripción cuantitativa de lo que observa, ¿qué diría?, ¿y si el punto de observación estuviera en B? Si el punto de observación estuviera en C la cosa estaría más dudosa porque si la vista se le va a un lado ve tres personas en una orilla y si se le va a otro ve dos en la otra orilla. No se sabe la respuesta que dará cada cual aunque hay cierta probabilidad de que diga que «tres personas por dos personas, igual a seis personas».

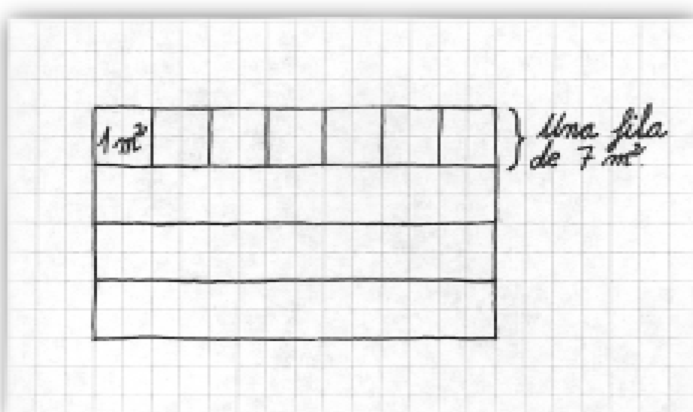
- EL MAESTRO: Analicemos las posibles respuestas desde cada uno de los tres puntos de observación:

Desde A) «Dos filas con, o por tres personas en cada una igual a seis personas». Indiscutible.

Desde B) «Tres filas con, o por dos personas en cada una igual a seis personas». Eso también es verdad.

Desde C) Si la respuesta es cualquiera de las dos anteriores, sin comentario. Ahora bien, si la respuesta es «Tres personas por dos personas igual a seis personas» sí merece comentario ya que la única posibilidad de que esto ocurra es que haya una sola fila con tres personas embarazadas.

Una vez que hemos analizado el cálculo del contenido del rectángulo, en su esencia, es un buen momento para ver mejor cómo se combinan dos longitudes para dar lugar a una superficie. Decimos que el suelo de una habitación de 7 metros de larga y cuatro metros de ancha mide 28 metros cuadrados, 7 m x 4 m = 28 metros cuadrados. Esta expresión matemática es correcta, pero si le hacemos una radiografía contribuiremos a que todos la puedan entender mejor. No podría haber 28 metros cuadrados si no hubiera 1 metro cuadrado, que es la unidad principal de superficie. Un metro cuadrado es el descendiente de un metro de largo y un metro de ancho, es en este caso concreto un trozo de suelo barrido por un cepillo imaginario de un metro de ancho al deslizarse un metro a lo largo. La segunda parte del razonamiento la podemos entender mejor con un dibujo, estructurado en filas.

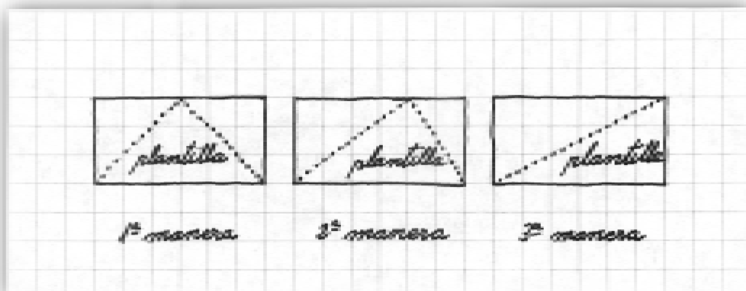


EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En la expresión de 7 m x 4 m = 28 metros cuadrados, lo que se esconde a la sombra de dicha expresión es 7 metros cuadrados por 4 filas igual a 28 metros cuadrados, o bien 4 metros cuadrados por 7 filas igual a 28 metros cuadrados. En este caso, la desintegración del suelo en filas puede mejorar la comprensión del concepto de superficie, basado en su unidad, su uno, su metro cuadrado.

- **EL MAESTRO:** Vista en esencia, a lo claro, por dentro, la superficie de las formas y de las cosas rectangulares, nos queda pendiente entender a fondo el área del triángulo. Para eso propongo hacer un rompecabezas.

- **TERE:** ¿Dónde están las piezas?

- **EL MAESTRO:** Las puedes conseguir metiéndole la tijera a una hoja de papel (rectangular) de una de las siguientes maneras:



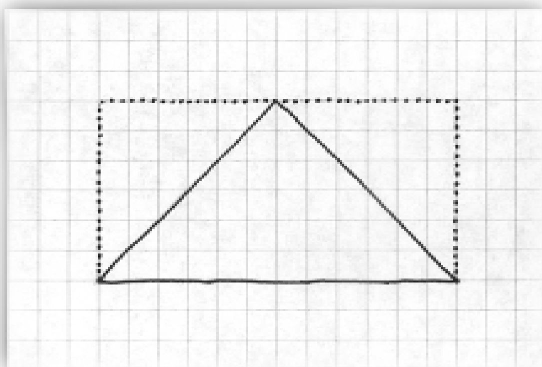
Una vez cortado el papel disponemos de las piezas con las que podemos probar a montar el rompecabezas sobre la plantilla.

- **TERE** (que cortó el papel de la primera manera)**:** No me sale, no puedo encajar las piezas, ¡y eso que parecía tan fácil! Por fin, ya lo tengo.

- **CARMEN** (que probó de la segunda manera)**:** Creo que estas no combinan, voy a probar dándoles la vuelta, tampoco, a ver así... ya me ha encajado una... ahora, ya está bien.

- **ANTONIO** (que optó por la tercera forma)**:** ¿Será posible? Si tiene que coincidir. Lo conseguí.

- **EL MAESTRO:** El rompecabezas encaja, el rectángulo se compone de dos triángulos exactamente iguales, cortes por donde cortes, siempre que coincida la base del triángulo con la del rectángulo. Por otra parte sabemos calcular la superficie de un rectángulo. ¿Cómo podemos encajar ahora este rompecabezas de ideas? ¿Cómo nos las podemos ingeniar para calcular el área del triángulo con autonomía de pensamiento?



- TERE: Podemos situar el triángulo dentro de un rectángulo imaginario cuyas dimensiones sean el largo de su base y el ancho de su altura. Ahora calculamos la superficie del rectángulo. Pero ¿para qué? ¡Ah, sí, ya! ¡La del triángulo es justo la mitad según acabamos de comprobar gracias al tijereteo!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Estos razonamientos te emocionan, te ponen los pelos de punta, porque demuestran que el cerebro tiene capacidad de tejer razonamientos con los hilos de la imaginación. Ese es el proceso inteligente a seguir, el que nos ayuda en la autoconfección del tejido matemático.

- PEPE: ¿Dará igual que si se aplica la fórmula del triángulo, de la que a malas penas me acuerdo? ¡Es tan difícil recordar tantas fórmulas!

- FELIPA: Te recuerdo que el área del triángulo es:

- EL MAESTRO: Dará exactamente igual el resultado, es fácil comprobarlo. Lo que no da igual, sino todo lo contrario es el procedimiento. Una buena cosa es descubrir tu manera y la manera inteligente de calcular el área del triángulo, y otra bien distinta es que se la administren directamente a tu memoria hecha papilla, sin que tu pensamiento tenga el gusto de masticarla, saborearla y digerirla.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Cuando haces cuentas dejándote llevar a ciegas por la corriente turbulenta de un río de fórmulas mal o nada comprendidas, corres el riesgo de aplicarlas al revés, de engañarlas sin querer y que te mientan, de que éstas sean inútiles para ti, estás predestinado a la deriva. Piensa que cuando nace una fórmula, muere el proceso de investigación que ha llevado a descubrirla, piensa que una fórmula es el fruto de una flor ya marchita.

Cuando haces cuentas ayudándote de fórmulas bien comprendidas, analizadas, radiografiadas, mamadas por ti, puedes seguir tranquilamente adelante concentrando la energía de tu pensamiento en el planteamiento, resolución e interpretación de problemas, situaciones, casos...

Cuando haces cuentas haciéndole caso a tu mente, desarrollas tu personalidad, tu autoestima, tu ser, eres tú mismo, aprendes de tus errores y aciertos, investigas, descubres, vives, creces, eres autónomo y autosuficiente. ¡Tú puedes descubrir las fórmulas!

- **EL MAESTRO:** Veamos ahora un par de casos que sirvan para ilustrar el cálculo de áreas en figuras planas más complejas que el triángulo y el rectángulo.

<u>Caso 1.</u> Una figura hexagonal, por ejemplo...

- **ALGUNOS:**

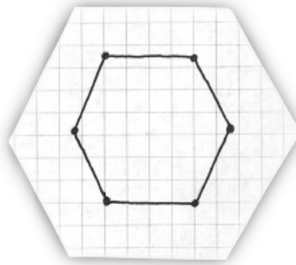
  - La tapa de una celdilla de abeja.
  - La tapadera de una caja de bombones.
  - Un patio muy particular.
  - Un parque.
  - El diseño del trazado de una plaza.
  - Una loseta.

- **EL MAESTRO:** Bien. ¿Y por qué no trazamos nosotros un hexágono con lados y ángulos iguales?

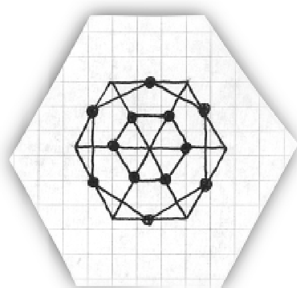
- **PEPE:** ¿En el papel?

- **EL MAESTRO:** Mejor lo delimitamos en el suelo si queréis. Lo podemos hacer en la entrada del Centro, que hay anchura. Venga, ideas para trazarlo.

- **ANTONIO:** Se me ocurre que podemos utilizar una cuerda cerrada con seis nudos equidistantes, colocada en el suelo. Para conseguirlo basta con hacer coincidir la longitud de las tres diagonales, que parten la figura en dos partes iguales.



- PAQUI: También podemos formar un corro de seis personas con los brazos abiertos en cruz. Cada persona ocupa un lado del hexágono. Otras seis personas se sitúan en las tres diagonales largas para hacerlo regular, siempre que las doce tengan igual medida de mano a mano. Uniendo con la mirada las cabezas de las seis del centro se forma otro hexágono dentro. Y un tercer polígono de seis lados se dibuja uniendo con la vista las cabezas del grupo externo.



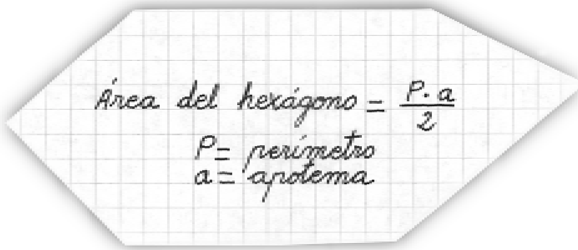
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Muy bien, el teatro y las matemáticas. Esta es una forma estupenda de hacer teatro para construir la matemática, para que deje de ser algo externo a nosotros mismos, para dejar de sentirla como un molesto cuerpo extraño.

- CARMEN: Yo sé que se puede formar un hexágono cortando una circunferencia en seis trozos con la medida de su propio radio. Me gustaría que lo comprobáramos en el suelo. Podemos improvisar un compás con un hilo girando sobre un extremo fijo. Con la otra punta del hilo en movimiento, la mano dibuja una circunferencia blanca de tiza.

Después de materializar las ideas anteriores, decidimos hacerle números a la extensión del hexágono de tiza. Dejamos un tiempo libre, como en los viajes, para que cada cual lo intentara a su manera.

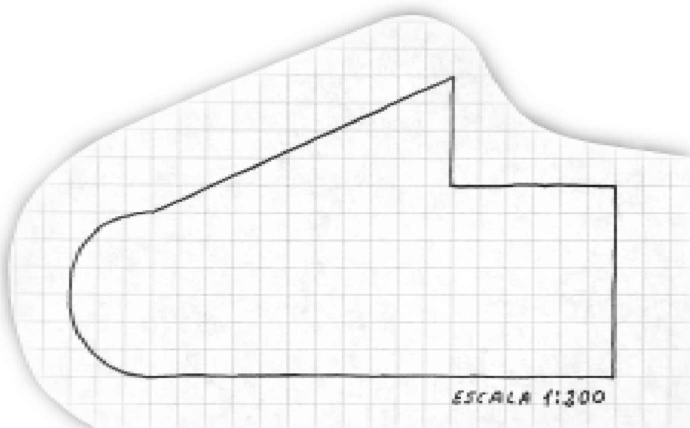
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El tiempo libre para la reflexión matemática puede que te haga sentir una sensación de vacío al principio, pero es condición indispensable para que aprendas los senderos matemáticos sin ser llevado de la mano, o lo que es peor, de la mente de los demás, que piensan por ti.

- **PERICO:** He buscado en la enciclopedia la fórmula del área del hexágono.



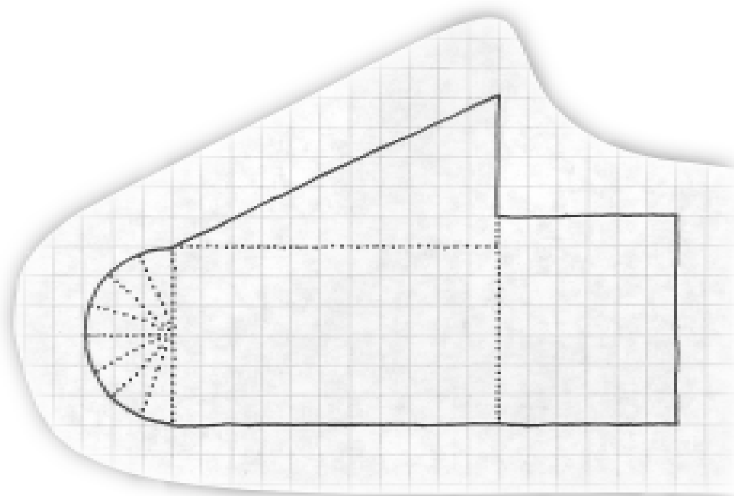
- **MIGUEL:** Yo he optado por calcular el área con mis propios medios. He pensado, sin sudar mucho, que el hexágono se puede descomponer en seis triángulos iguales. Luego el problema se reduce a calcular el área del triángulo, que es la mitad de un rectángulo de dimensiones el lado y la altura de éste. Después he multiplicado el área del triángulo por seis veces. El área es...

Caso 2. Una figura real, la forma de la terraza solana de un bloque de viviendas.



Tras un breve comentario del croquis llegamos a la conclusión de que cada cual, como si de bocadillo se tratara, podía digerir muy fácil el cálculo de su área, reduciéndolo a sus bocados esenciales: triángulos, rectángulos y círculos. El barrido del rec-

tángulo. El triángulo como mitad de rectángulo imaginado. El círculo, que en esencia es un triángulo. Sin pegas, a la sencillez no hay forma compleja que se le resista. Todos los trozos pueden pasar por la garganta de la forma del rectángulo.



- EL MAESTRO: Seguimos en el árbol de la esencia de las formas. Hoy os propongo un salto de la rama plana de dos dimensiones a la rama tridimensional. Dos son las ramas secundarias que podemos considerar saliendo de la misma, una representa «los cuerpos que acaban como empiezan», y la otra «los que empezando en algo terminan en nada».

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Como vemos la estructura es extremadamente sencilla. Si a este árbol abstracto le ponemos un injerto de realidad las ramas se le multiplican sin fin hasta cubrir todos los cuerpos del mundo. Los tallos que brotan de la rama de «lo que acaba como empieza», surgidos de la yema del prisma triangular son todos los prismas, el de base cuadrada o rectangular, de pentágono, de hexágono, de bases con más y más lados, hasta llegar al límite de tantos lados, infinitos si se puede, que se trasforme en un solo lado curvo, que contiene el círculo, integrado por la suma de infinitos triángulos, y que toma cuerpo con la altura, dando lugar a infinitos prismas triangulares, que unidos en haz forman el cilindro. Los tallos que salen de la rama que «empieza en algo para terminar en nada» surgidos de la yema de la pirámide triangular, son todas las pirámides que tienen por base diversos polígonos, cuyo número de lados va creciendo hasta transformarse también en círculo, y con la altura en cono; y una piña de muchos, muchísimos conos se transforma en esfera.

- **EL MAESTRO:** Las cuentas que se pueden hacer en los cuerpos geométricos son por una parte las referidas a las superficies o áreas de éstos, y por otra las que sirven para calcular su volumen.

- **PACA:** Perdón, maestro, el párrafo que acaba de pronunciar, me ha entrado por los oídos pero no engancha bien en mi mente, lo noto resbaladizo, como si se estuviera produciendo un fundido en negro en el ojo de mi entendimiento.

- **EL MAESTRO:** Llevas toda la razón, es normal que te haya ocurrido eso porque he utilizado palabras que están demasiado desgastadas por el uso, vamos que están tan oídas en las conversaciones matemáticas, que apenas rozan en la mente del que las escucha y tal vez tampoco mucho en la del que las pronuncia. Cuando digo área de un cuerpo geométrico, me refiero al «continente» o si se entiende mejor a la «envoltura», al «forro» de una figura, a «lo de fuera»; y cuando digo volumen me estoy refiriendo al «contenido», al «relleno», a «lo de dentro».

- **PACA:** Si me llego a callar me quedo a oscuras, con lo fácil que es. Hablando en lenguaje normal y corriente se entienden muy bien las matemáticas.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En las conversaciones matemáticas se debe ajustar la sintonía, para coger la onda. Si no es así el maestro habla en una emisora y los «radioyentes» escuchan otra o incluso desconectan. Lo mejor para una buena comunicación es hacer lo que Paca, una llamada de atención, una lección a tiempo para el maestro.

- **PERICO:** Tengo miedo por no decir pánico, de la cantidad de fórmulas que tendré que volver a aprender otra vez, para saber calcular áreas de las bases, áreas laterales, áreas totales y volúmenes tanto de los prismas como de las pirámides; área y volumen del cilindro, área y volumen del cono, y área y volumen de la esfera. Más o menos las entiendo al principio, las recuerdo a duras penas hasta que apruebo el examen, si me acompaña la suerte. Pero con el paso del tiempo, un mes, un trimestre, un año, dos... se van mezclando y difuminando en mi mente, y como son tan parecidas se me van enredando en un ovillo imposible de desliar, hasta que desaparecen en el olvido. Es un rollo impresionante, superior a mis fuerzas.

- **EL MAESTRO:** No te preocupes, hombre. Hay un truco para que no se olviden las fórmulas.

- **ALGUNOS:**

  - ¡Qué raro!
  - ¿Qué truco es ese?
  - ¡No puede ser!

- ¿Es tomando algún brebaje?
- ¿Con qué clase de pastillas?
- ...

- EL MAESTRO: Ni pastillas, ni brebajes, ni nada. Es mucho más sencillo. Es como el truco del almendruco, y consiste simplemente en «no aprenderlas», por lo menos de memoria.

- ALGUNOS:

- ¡Ja, ja, ja ...!
- Así cualquiera.
- ¿Y cómo podremos hacer los cálculos entonces?
- Eso no tiene gracia.
- ¿Dónde está el truco?

- EL MAESTRO: No tendrá gracia, pero sí tiene truquillos y con muchas ventajas para no hacer los cálculos a ciegas:

1ª) No se pueden olvidar porque no te las aprendes de memoria.

2ª) Agudiza tu ingenio para descubrir cómo hacer los cálculos de superficies..., de volúmenes...

3ª) Te libera de la dependencia de ataduras preestablecidas, de lo que te dicta el papel donde están escritas, favoreciendo tu autonomía.

4ª) Te permite ser partícipe en la construcción del edificio matemático, y sentir la alegría del descubrimiento, cabalgar la matemática a tu propio ritmo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Un exceso de fórmulas aprendidas casi de memoria, puede producir en la mente un efecto parecido al que provoca en el estómago un atracón de comida mal digerida, por muy exquisito que sea el manjar.

- EL MAESTRO: Y si admitimos que no es bueno atracarse con un exceso de fórmulas, estaremos dispuestos a poner manos a la obra, a resolver los problemas sobre prismas y pirámides con nuestras propias fuerzas, con nuestra energía mental, con la fuerza del pensamiento. Bien, nosotros estamos aquí ahora, pero ¿dónde están los prismas?

- JOSÉ: En la página 137 ...

- MARÍA: En la lección 8 ...

- EL MAESTRO: Me refiero a prismas adheridos a cosas reales, en su ambiente, en su salsa, no en el papel.

- JOSÉ: En una caja de zapatos.

- **MARÍA:** No hay que irse muy lejos, la sala donde estamos tiene forma de prisma.

- **ANDRÉS:** En el colchón de mi cama.

- **TOÑI:** En la piscina de tu tía.

- **ALGUNOS:**

  - En las cajas de la fruta.
  - En la caja del camión.
  - En las habitaciones.
  - En ... casi todas partes.

- **EL MAESTRO:** Ya que ahora nos encontramos en esta sala, si os parece podemos calcular la superficie de su suelo, que es como la de su techo, el área de las cuatro paredes, donde por cierto no debemos estar siempre encerrados en las sesiones de Matemáticas; así como el volumen donde nos encontramos nosotros, el mobiliario y sobre todo el aire que respiramos.

Se admitió la propuesta por el grupo, fue un acierto zambullirnos en un prisma real y concreto, que nos acogía y en el que respirábamos su oxígeno.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Sumergirse en un buen ambiente garantiza un mejor entendimiento de la cosa matemática.

- **EL MAESTRO:** Podríamos empezar por calcular el continente, suelo, techo y paredes; se trata sencillamente de hacer cuentas de multiplicar las unidades de superficie que hay en la fila de la orilla por el número de filas de ese suelo, lado o techo.

- **JUAN:** Tendremos que tomar medidas.

Entre Juan, que sacó la cinta métrica de la caja de herramientas, y Mari, midieron las tres distancias de la habitación:

Largo: 7 metros.

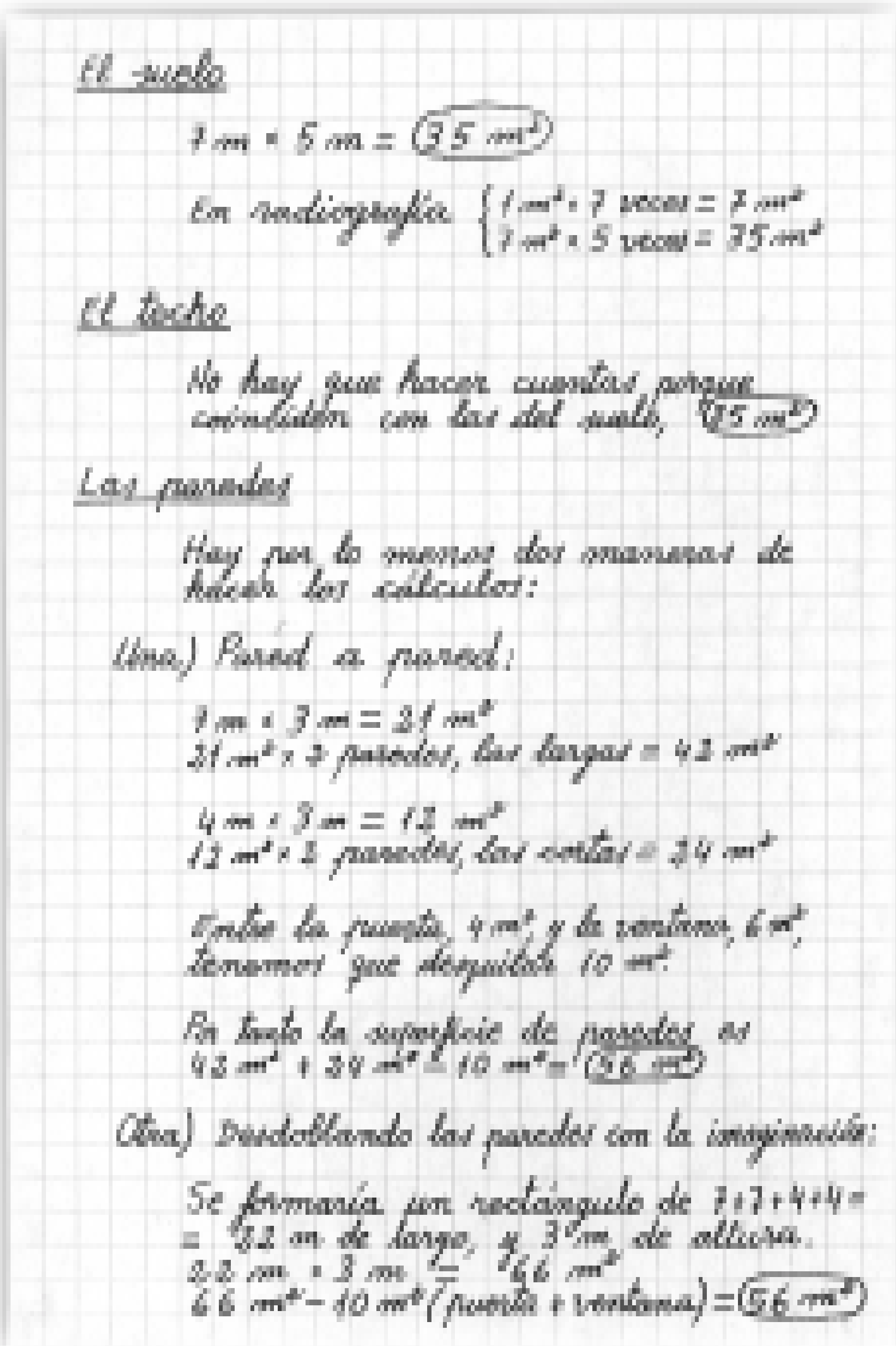
Ancho: 5 metros.

Alto: 3 metros.

Puerta: 2m x 2m.

Ventana: 3m x 2m.

En cada uno de los grupos de trabajo se afrontó la tarea en equipo, tanto con papel y lápiz como con cartulina regla y tijeras para la construcción de una maqueta en la que se acortaron 25 veces las distancias reales (escala 1:25). En la puesta en común, los razonamientos quedaron reflejados en la pantalla de la pizarra:



El suelo

$7\ m \times 5\ m = 35\ m^2$

En radiografía $\begin{cases} 1\ m^2 \times 7 \text{ veces} = 7\ m^2 \\ 7\ m^2 \times 5 \text{ veces} = 35\ m^2 \end{cases}$

El techo

No hay que hacer cuentas porque coinciden con las del suelo, $35\ m^2$

Las paredes

Hay por lo menos dos maneras de hacer los cálculos:

Una) Pared a pared:

$7\ m \times 3\ m = 21\ m^2$
$21\ m^2 \times 2$ paredes, las largas $= 42\ m^2$

$4\ m \times 3\ m = 12\ m^2$
$12\ m^2 \times 2$ paredes, las cortas $= 24\ m^2$

Entre la puerta, $4\ m^2$, y la ventana, $6\ m^2$, tenemos que desquitar $10\ m^2$.

En todo la superficie de paredes es
$42\ m^2 + 24\ m^2 - 10\ m^2 = 56\ m^2$

Otra) Desdoblando las paredes con la imaginación:

Se formaría un rectángulo de $7+7+4+4 =$
$= 22$ m de largo, y 3 m de altura.
$22\ m \times 3\ m = 66\ m^2$
$66\ m^2 - 10\ m^2$ (puerta + ventana) $= 56\ m^2$

- **EL MAESTRO:** Es justo el momento para dar un paso más, para adentrarnos en el concepto del volumen. Para esto necesitamos unos cinco minutos o tal vez menos, pero eso sí, de mucha concentración.

El grupo, ante la advertencia, intuyó la importancia que podía tener el mensaje, y reinó el más absoluto silencio, abriendo bien los ojos y los oídos, respirando profundamente, para así poder empezar a captar mejor el concepto de volumen en toda su esencia, o para ser más exactos, de la unidad, del «uno» del volumen.

- **EL MAESTRO:** Lo que voy a decir ahora seguramente sonará un poco raro, chocará con algún esquema previo que podamos tener en la mente, pero os pido que las preguntas las dejéis para cuando acabe de exponer en unos cinco minutos, gracias. Para calcular el volumen de esta habitación hace falta una unidad de medida, pongamos «un metro cúbico». Se da por hecho que 1 metro de largo por 1 metro de ancho y por 1 metro de alto es 1 metro cúbico, pero de alguna manera eso no puede ser verdad, si analizamos su significado. Un metro de largo es una longitud, que podríamos materializar en un hilo fino; un metro de ancho es otra longitud, otro hilo; y un metro de alto, otra longitud, otro hilo. Cuando intentemos explicar a alguien que el combinado de esas tres dimensiones, de esos tres metros, de esos tres hilos, es «un metro cúbico», ese alguien, si por casualidad se para a pensarlo, nos puede decir que no lo entiende, que más bien el resultado debe ser tres metros de hilo, tres metros de longitud.

- **LUCÍA** (que no se pudo aguantar)**:** ¿Es que un metro, otro metro y un tercer metro no son tres metros?

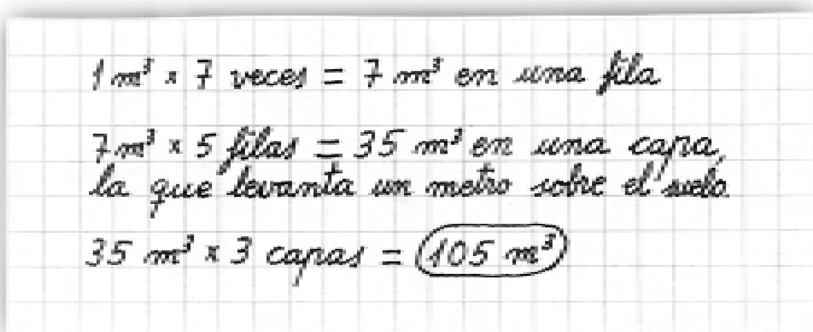
- **EL MAESTRO:** Tranquila, espera un momento, sigo: Yo propongo otra manera de explicar el ente, el ser de un metro cúbico, ya que soy consciente de la dificultad de la reflexión anterior, que puede lanzar a la mente a un salto en el vacío. Digo esto porque puede tener cierto paralelismo con el razonamiento que ese alguien pensante pudiera hacer si se planteara multiplicar 1 patata por 1 patata y por 1 patata; y que está muy claro que la mente no traga que esas tres patatas, por mucho que se multipliquen entre sí, sean una patata cúbica; eso sería absurdo, sería un razonamiento patatero. Por eso planteo una forma alternativa, pienso que más coherente para el entendimiento. El metro cuadrado es una especie de barrido que hace un metro de longitud al desplazarse un metro al frente. De la misma forma y continuando con el razonamiento, podemos pensar en el metro cúbico como el rastro, como la huella que deja el metro cuadrado al deslizarse un metro, a modo de émbolo, en su perpendicular.

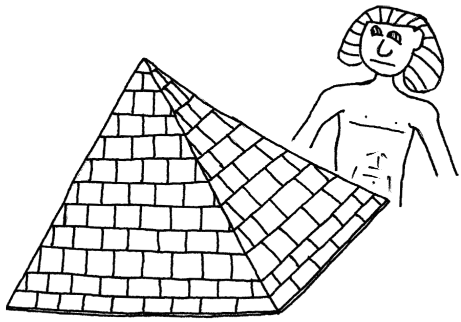
- **LUCÍA:** Con razón no lo entendía. Mi pensamiento caminaba a lo largo de los tres metros, sin entender el salto cualitativo que cambia la esencia de metro al pasar a metro cuadrado, y mucho más al adquirir volumen en el ser del metro cúbico. Ahora si lo entiendo, lo veo muy claro. Un metro por un metro y por un metro adquiere sentido cuando tu mente lo desliga de tres metros de longitud, que están en las orillas, al margen de la esencia del metro cúbico, y lo asocia con el contenido, vacío o lleno, con lo de dentro. Estoy segura de que lo he entendido bien, por eso no lo olvidaré jamás.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: De alguna manera se puede decir que la base de la cantidad es la cualidad. Sería un absurdo la expresión «30 metros cúbicos» si no existiera «un metro cúbico».

- EL MAESTRO: Bien, muy bien, ya que hemos entendido la esencia de la unidad de volumen, será fácil calcular el de esta habitación, ¿verdad?

Después de unos instantes, los suficientes para el cálculo, se hizo la puesta en común. Las cuentas se detallaron en la pizarra:





- **EL MAESTRO:** Hoy podemos hacer un viaje en el tiempo y en el espacio, si os apetece, un regreso al pasado, junto al Nilo.

- **JAVIER:** ¿Para qué? ¿Cuál es el objetivo?

- **EL MAESTRO:** Para analizar la savia, la esencia de la rama de las pirámides, del árbol de las formas.

Superados los pequeños problemas técnicos en la búsqueda del canal para vídeo, durante unos quince minutos nuestras mentes viajaron cinco mil años atrás, situándose cerca del Nilo. Grandiosidad y esclavitud, poder y sudor de trabajo duro, luces y sombras, desierto y pirámides, la vida y la muerte, humanidad y deshumanización, antes y ahora, las pirámides y la Historia de la Humanidad, Geografía e Historia, Sociedad y Matemáticas. Algunos datos concretos para subrayar la grandiosidad de estos monumentos faraónicos, nos dieron pié para el tanteo, la imaginación, la comparación, la investigación y el descubrimiento con minúscula sobre el área y el volumen de la pirámide como cuerpo geométrico.

- **EL MAESTRO:** Además de en Egipto, ¿dónde las pirámides, completas o truncadas?

- **ALGUNOS:**

  - En algunas farolas antiguas de las plazas.
  - En los recipientes en embudo piramidal de las fábricas.
  - En algunos pedestales.
  - En los tejados de las torres.
  - En los obeliscos.
  - En las formas de algunos adornos.
  - En la estructura del riñón.
  - En los libros de Geometría.
  - En cualquier lugar, sembradas por la semilla de la imaginación.

- **EL MAESTRO:** Ahora viene el análisis del cuerpo pirámide, tanto en el «forro» como en «el contenido», «por fuera» y «por dentro». Para eso os propongo una manualidad: construcción de una pirámide de base cuadrada. Materiales: cartulina, regla y papel. Sin instrucciones para que cada cual se busque su propia estrategia.

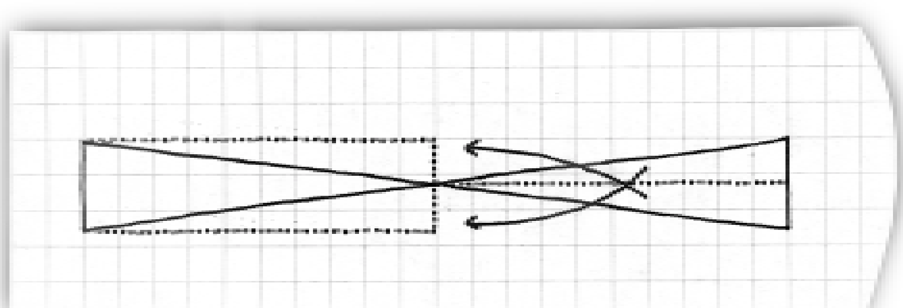
Entre todos se acordaron las medidas: 5 centímetros del lado de la base y 20 centímetros de altura de la cara triangular lateral.

Sensibilizados con las pirámides de la Historia, y manoseadas con las manualidades, estábamos preparados con la suficiente fuerza creativa para descubrir la superficie o área del continente como el volumen del contenido, sin necesidad de que nadie nos lo diera masticado, como si nosotros no fuéramos capaces de desarrollar procesos de investigación.

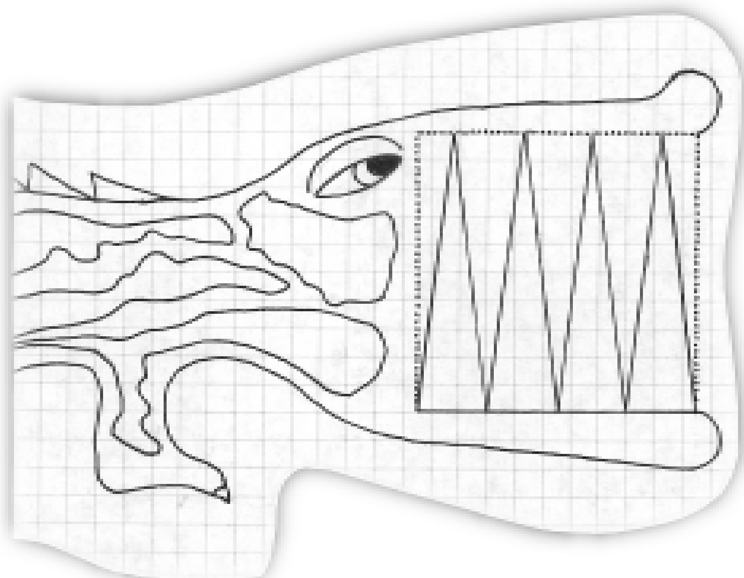
Lo primero que hicimos fue centrarnos en la manera de calcular el «forro» de cartulina. Cada cual lo intentó, consiguiéndolo o no, con la fuerza de su intelecto. En la puesta en común vamos a recordar las aportaciones de Miguel, Antonia y Pepe.

- **MIGUEL:** La forma cómo la he construido me ha dado la clave. He recortado cuatro triángulos iguales y una base cuadrada para hacer la pirámide. El área de la base es 5 por 5 igual a 25 centímetros cuadrados. Cada cara triangular mide 5 por 20 entre dos triángulos, porque sólo me interesa uno de ellos, igual 100 entre dos, igual a 50 centímetros cuadrados. Las cuatro caras miden 50 por cuatro igual a 200 centímetros cuadrados. Total, 25 por un lado, mejor dicho en la base, y 200 por otro lado, por los cuatro lados, igual a 225 centímetros cuadrados. Por cierto, esta cartulina ocuparía aproximadamente las dos palmas de nuestras manos.

- **ANTONIA:** Yo apunto una idea para calcular la extensión de las caras, combinándolas de dos en dos. Así se forman dos rectángulos, cada uno de 5 por 20 igual 100 centímetros cuadrados. Por tanto dos por 100 igual a 200 centímetros cuadrados. Este es el dibujo del combinado:



- PEPE: Mi manera de calcular el área lateral es desdoblando las cuatro caras para situarlas dentro de un rectángulo, así:



Los cuatro triángulos me recuerdan el perfil de la dentadura de un cocodrilo, más o menos, media dentadura, claro, incrustada en una mandíbula de longitud igual a la unión de los cuatro lados bases de los triángulos, que es también la medida del alrededor o perímetro del cuadrado sobre el que se apoya la pirámide. Si el cocodrilo imaginado tuviera la boca cerrada nos daría menos miedo, y además su dentadura completa vista de frente se asemejaría a un rectángulo, en el que una longitud es la suma de los cuatro lados y la otra es la altura de cada diente, visto de perfil. La superficie del rectángulo es muy sencilla, vimos en su momento que se obtiene multiplicando largo por ancho. Para saber el área de los cuatro triángulos de nuestra pirámide, equivalente a media dentadura de cocodrilo, basta con dividir entre dos, evidentemente. Matemáticamente podemos expresar:

$$\text{Área lateral} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{altura (apotema)}}{2}$$

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Ojo!, esta fórmula ha sido investigada y redescubierta por Pepe, con creatividad, con el esfuerzo de su imaginación. Será difícil que la olvide porque las conexiones que sus neuronas han puesto en juego están bien enlazadas, y seguro que serán mucho más fuertes que si Pepe las hubiera recibido ya masticadas y digeridas para evitar su esfuerzo intelectual. Todo tiene su precio.

La investigación sobre el volumen parecía más difícil, era más difícil, pero precisamente por eso resultó muy enriquecedora para el desarrollo intelectual. Dicha investigación pasó lógicamente por la comparación del volumen de un prisma con el de una pirámide, siempre que tuvieran la misma base y altura.

- EL MAESTRO: Aquí tenéis cinco juegos en cartulina (para cada uno de los cinco grupos de trabajo) de distintos tamaños, compuesto cada uno por un prisma y una pirámide. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas dos figuras: prisma y pirámide?

- PEPE: Se parecen en que empiezan igual, vamos que tienen la misma base, y también la misma altura, son como prismas hermanas, perdón, quería decir primas hermanas.

- CARMEN: Se diferencian en la terminación, el prisma acaba en un cuadrado, como el de la base, mientras que la pirámide lo hace en vértice, en un punto, en una punta, en nada.

- EL MAESTRO: Ahora, que cada cual aporte su dosis de ingenio para calcular el volumen de la pirámide. Una pista: comparar el volumen del prisma con el de la pirámide para ver si tienen alguna relación. Materiales posibles para la experiencia: puñados de arroz, una balanza, o agua y bolsas de plástico. Ayuda: la que necesitéis de mi parte. Límite de la ayuda: no revelaré la «fórmula» hasta que vosotros la sudéis, la comprobéis y la descubráis.

Cada grupo autónomo hizo de su capa un sayo. Unos grupos rellenaron de arroz los recipientes, otros los llenaron de agua, otros pesaron, y todos probaron, llenaron, vaciaron, algunos se mojaron, todos compararon, encontraron relaciones, e hicieron trabajo de investigación en equipo. En los ojos de los participantes se reflejaba la alegría del descubrimiento.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Algunas veces basta con mirar los ojos de la gente para evaluar en vivo cómo van las cosas. Y de paso ahorramos papel de examen.

A continuación se detalló la experiencia de tres de los grupos contada por sus tres portavoces: Felipa, Sebastián y Encarna.

- FELIPA: Al colocar las dos figuras, una junto a otra, y tocarlas también, la vista y el tacto nos han llevado a pensar, dejándonos llevar más bien por la percepción, que en la caja del prisma entraba el doble de arroz que en la de la pirámide. Después nos hemos dado cuenta de que eso hubiera sido así en un mundo plano, de dos dimensiones, como en el caso de la comparación de un rectángulo y un triángulo de la misma base y altura. El segundo paso ha sido la comprobación concreta. Hemos llenado la pirámide de arroz para vaciarla en el prisma, y para asombro nuestro el nivel de arroz no ha alcanzado la mitad sino más bien la tercera parte. Hemos vuelto a llenar por segunda vez la pirámide y no se ha llenado el prisma. Por fin lo hemos conseguido justo hasta el borde al verter la tercera pirámide de arroz. Después ha sido muy fácil hacer los cálculos.

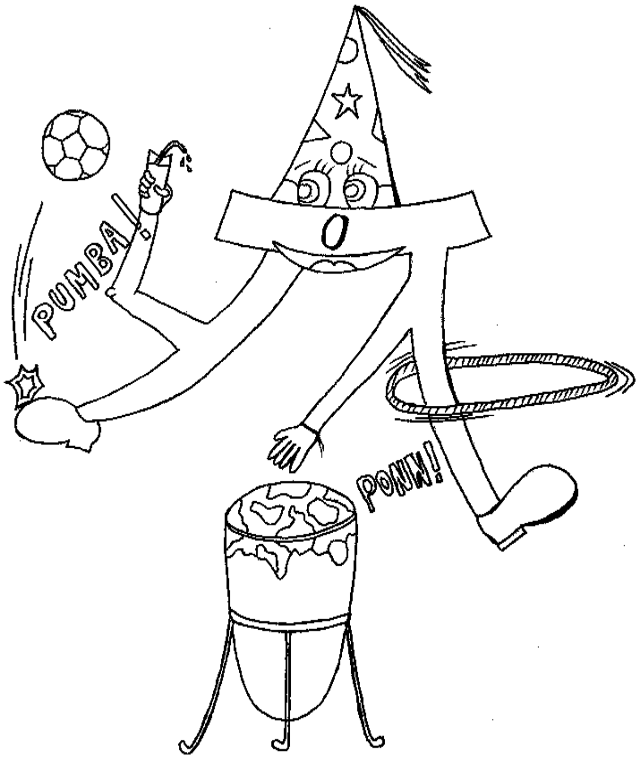
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Que la capacidad del prisma sea triple que la de la pirámide, posiblemente choca tanto en algún lugar de nuestro cerebro, que pone a trabajar algunos circuitos de neuronas haciéndonos caer en la cuenta que nuestro pensamiento tiene que saltar del mundo plano al tridimensional, escalando desde la base a la punta de la pirámide, notando la reducción al subir por el plano inclinado de las cuatro caras triangulares, haciéndonos intuir que se nos ha roto el esquema del doble.

- **SEBASTIÁN:** Nosotros hemos seguido un proceso paralelo, sólo que hemos probado con agua. Hemos comprobado que caben tres pirámides de agua en el prisma. Esto ha sido la sorpresa. Como el volumen del prisma lo sabemos calcular, multiplicando la base, que es la capa de agua del fondo, por la altura o número de capas, para obtener el de la pirámide basta sencillamente con dividirla entre tres, las tres pirámides que entran en el prisma, descubriendo así la capacidad de una.

- **ENCARNA:** En mi equipo hemos pesado los dos arroces, comprobando también con sorpresa, que el peso de la pirámide es la tercera parte del otro peso.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Sorpresa, sorpresa, sorpresa! Son las sorpresas agradables que se sienten cuando entramos en el juego de replantearnos situaciones concretas, de experimentar, de cuestionar, de poner en tela de juicio; razonamientos que en caso contrario haríamos a la ligera, sin analizar, sin hacer altos en el camino, sin profundizar, sin ejercitar nuestra propia mente, sin utilizar nuestra propia energía mental, sin aprovechar nuestro propio saber, sin...

LO REDONDO Y EL PI
(SATÉLITE DE LA GEOMETRÍA)



Lo redondo empieza en pi,
lo redondo empieza en ti,
en las niñas de tus ojos,
en las formas de tu cara,
en las curvas de tu cuerpo,
cuando me envuelves con tu mirada
y mi brazo rodea tu cintura,
cuando fundimos nuestras miradas en el cielo
para contemplar la redondez de la noche
en los cuerpos celestes.

Pedro Buendía Abril

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Parece como si los dos primeros versos quisieran unir lo matemático con lo humano, como si el poema entero fuera un canto que quisiera hacer caer el muro artificial entre la Matemática y la Literatura. A propósito, un paseo por el diccionario con ánimo de acercar la Geometría al Lenguaje y las palabras a sus significados, buscando la fusión de las ciencias con las letras, seguro que es bueno para una formación más equilibrada.

- **EL MAESTRO:** Sería conveniente buscar en el diccionario palabras referidas a todo lo redondo (lat. rotondus), lo cilíndrico, lo cónico, lo esférico...

No habiendo alegaciones en este caso por parte del grupo, la búsqueda comenzó. Minutos después la puesta en común llenó la pizarra: Redondo, redondear, letra redondilla, redondel, redondez, circo romano, circuito, circular, circulatorio, circumpolar, circuncisión, circunferencia, circunscribir, circunvalación, perímetro, rodar, rueda, rodada, rodaja, rodamiento, rodear, rodeo, rodilla, rodillo, cilindro, cilindrada, cono, cónico, esfera, esférico...

Para completar el cuadro de lo redondo nos hicimos una pregunta: ¿dónde lo redondo?

Las respuestas surgieron en cascada:

- En la Tierra, en la Luna, en el Sol, en los planetas, en las estrellas, en los cuerpos celestes, en la bóveda del cielo...
- En las células, en las plantas y en los animales.
- En los troncos, tallos y raíces de las plantas.
- En los frutos.
- En nuestro cuerpo, cabeza, tronco, brazos, piernas, dedos, pelos...
- Dentro de nuestro cuerpo, en los órganos y células.
- En casi todo.
- Vivimos en un mundo redondo, comemos cosas redondas, somos redondos.

- **EL MAESTRO:** La circunferencia, el círculo, el cilindro, el cono y la esfera constituyen la esencia geométrica de todo lo redondo. Unas cuantas experiencias, algún cuento y un poco de reflexión, podrían ser los ingredientes ideales de la lección de «lo redondo y el pi».

PRIMERA EXPERIENCIA: MEDIR EL ALREDEDOR Y EL ATAJO DE TODO LO REDONDO QUE ENCONTREMOS A NUESTRO ALREDEDOR.

Entre Juana y Perico materializaron la circunferencia y el diámetro de la boca de la papelera, en forma de hilo. Los estiraron para hacer la comparación, comprobando que *el hilo del diámetro estaba contenido tres veces y pico en el de la circunferencia.*

Miguel y Luisa compararon los dos hilos cortados a la medida de la boca del bote lapicero. El hilo largo lo era tres veces y pico más que el corto.

Paqui y Mari cortaron hilos a la medida del reloj de esfera de esta última. También se cumplía el tres y pico.

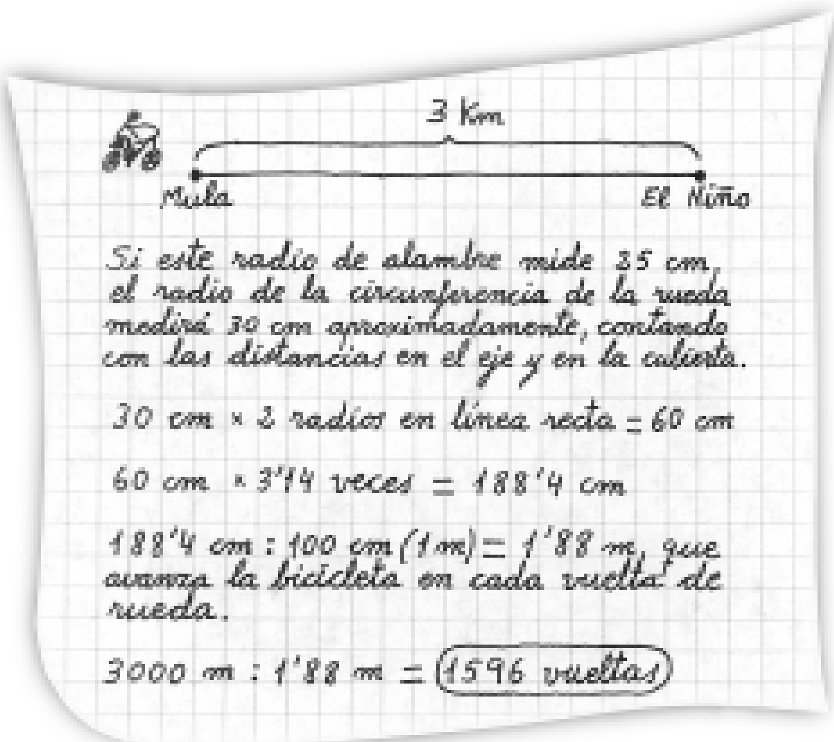
Juan y Felipa, fulanita y menganito..., un redondel trazado en el suelo con compás de hilo y tiza, un círculo recortado en una cartulina... Siempre tres y pico.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El tres y pico, el pi, el 3´14 veces aproximadamente, es el cordón umbilical que enlaza el «alrededor» y el «atajo», la circunferencia y su diámetro. Esto no es una fórmula para memorizar sino una realidad comprobada. Saber la relación «pi» puede ayudar en muchos cálculos sobre cosas redondas, a nuestra mente en reflexión. Nuestro propio razonamiento nos dirá si el pi multiplica o divide, repite o reparte.

EJEMPLO DE APLICACIONES DE LA PRIMERA EXPERIENCIA.

- EL MAESTRO: Este alambre es uno de los radios de la rueda trasera de mi bicicleta. ¿Cuántas vueltas girará la rueda cuando voy de Mula a «El Niño», que dista 3 Kilómetros?

Pasado el tiempo necesario, Ana detalló los cálculos en la pizarra:



UN CUENTO: EL CARPINTERO AL QUE LE ENCARGARON UNA MESA DE CAMILLA.

El maestro, en vez de explicarnos la superficie del círculo, nos contó un cuento, que nos ayudó a entenderla sin explicación. Por cierto, empezó a contarlo él, pero acabamos contándolo entre todos:

- EL MAESTRO: «Había una vez un carpintero que fabricaba mesas de tablero cuadrado. Para calcular el precio de éste multiplicaba el largo por el ancho, normal, sin problemas. Hasta que un día un caprichoso le encargó una mesa camilla. El carpintero también multiplicó el largo por el ancho, mejor dicho el ancho por el ancho, para saber lo que tenía que cobrar a su cliente por el tablero redondo, pensando que lo hacía bien».

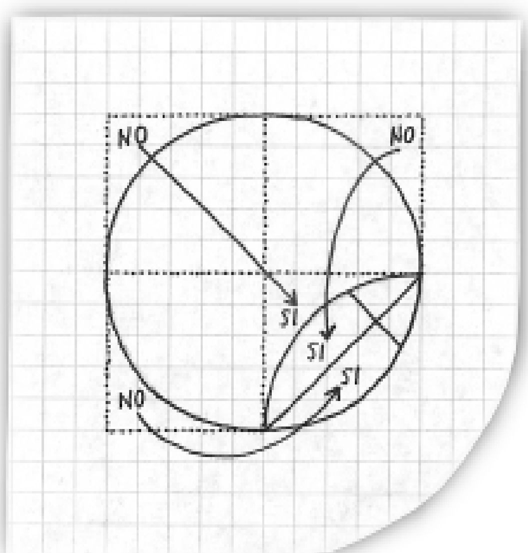
- PILAR: «Pero el cliente le protestó con razón, porque estaba claro que le había cobrado más de la cuenta».

- EL MAESTRO: «El carpintero cayó en la cuenta, pidió disculpas y se las tuvo que ingeniar para no pasarse. Pensó y pensó».

- JOAQUÍN: «Y después de mucho pensar llegó a la conclusión de que si reducía la anchura a la mitad, del diámetro al radio, y lo multiplicaba por sí mismo, seguro que no se pasaba».

- EL MAESTRO: «Al contrario, le faltaba mucho para llegar a cubrir el círculo entero».

- PEPE: «Y observó con ojo de buen cubero, con ojo de buen carpintero, que todo el tablero redondo era tres veces y pico más grande que la tabla del cuadrado del radio».



- EL MAESTRO: «Así aprendió el carpintero a calcular el tablero de la mesa redonda. Y colorín colorado este cuento que pudo ser real, se ha terminado».

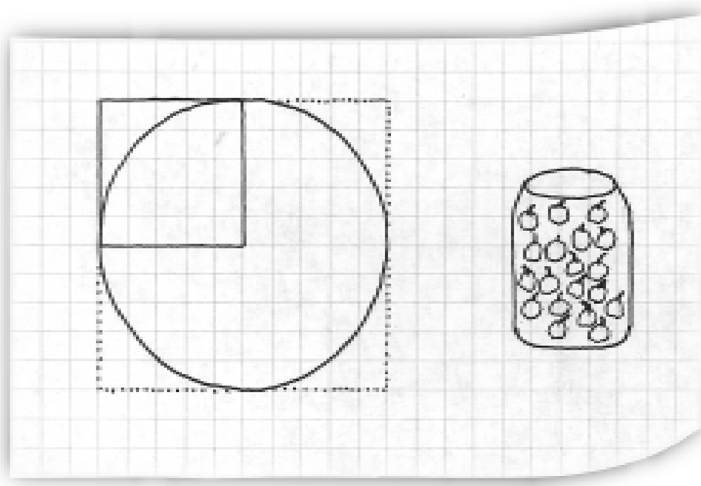
SEGUNDA EXPERIENCIA O COMIDA: PLATO DE GARBANZOS.

- EL MAESTRO (mostrando una bolsa de garbanzos)**:** El carpintero del cuento hizo los cálculos por tanteo, a ojo de buen cubero. ¿Qué podemos hacer nosotros con esta bolsa de garbanzos para afinar el cálculo del área del círculo a partir de su radio? Hay cinco bolsas, una para cada grupo. Los materiales que podemos utilizar son: garbanzos, cartulina, tijeras y un peso (este último opcional).

Paqui, en nombre de su grupo expuso la experiencia paso a paso:

- PAQUI:

1º) Hemos dado forma de cuadrado a los garbanzos, delimitando con una cartulina el círculo interior de dicho cuadrado. Así:



2º) Hemos hecho el recuento de los garbanzos para encontrar relaciones en la comparación:

En el cuadrado del radio hay 80 garbanzos.

En el plato del círculo hay 252 garbanzos.

3º) Hemos encontrado la relación de las 3´1 veces (3´14 veces aproximadamente), que el círculo contiene al cuadrado de su radio, al repartir los 252 garbanzos entre 80 garbanzos.

Antonio, representando a su grupo, nos comunicó la manera de cómo afrontaron ellos la experiencia:

- ANTONIO:

1º) Hemos delimitado el círculo inscrito sobre el cuadrado de garbanzos.

2º) Hemos pesado garbanzos:

a) Los del cuadrado del radio.

b) Los del círculo.

3º) Al comparar los pesos hemos obtenido una relación similar, es decir que los garbanzos del círculo pesan unas tres veces y pico más que los del cuadrado del radio.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Contar garbanzos, pesar garbanzos, tocar con las manos y pensar, comparar cantidades o pesos, es un buen ejemplo de lo concreto hilvanándose con lo abstracto.

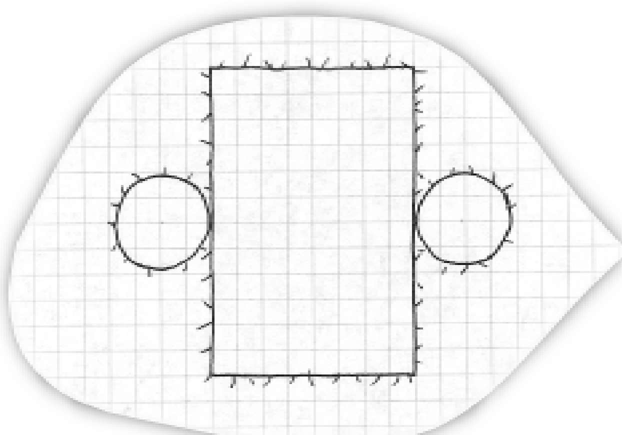
TERCDRA EXPERIENCIA O RECUERDO DE CÓMO SE PELA UN HIGO CHUMBO.

- EL MAESTRO: ¿Habéis oído alguna vez lo que dicen algunas personas cuando pelan un higo chumbo?

- PEPE: ¡Ah, sí! Ahora recuerdo que mi abuelo decía más o menos algo así cuando pelaba un higo: Te corto cabeza y culo, por el centro te rajo, te desnudo y así te zampo.

- EL MAESTRO: Aunque en realidad el higo chumbo se asemeja más a un tonel, también tiene cierto parecido con un cilindro. La corteza del higo hecha trozos nos va a servir para trocear el área del cilindro. Os propongo que puesto que no tenemos aquí un higo para pelarlo ahora, imaginéis la corteza troceada, que podéis dibujar sobre el papel.

Antonia lo dibujó con pinchas y todo:



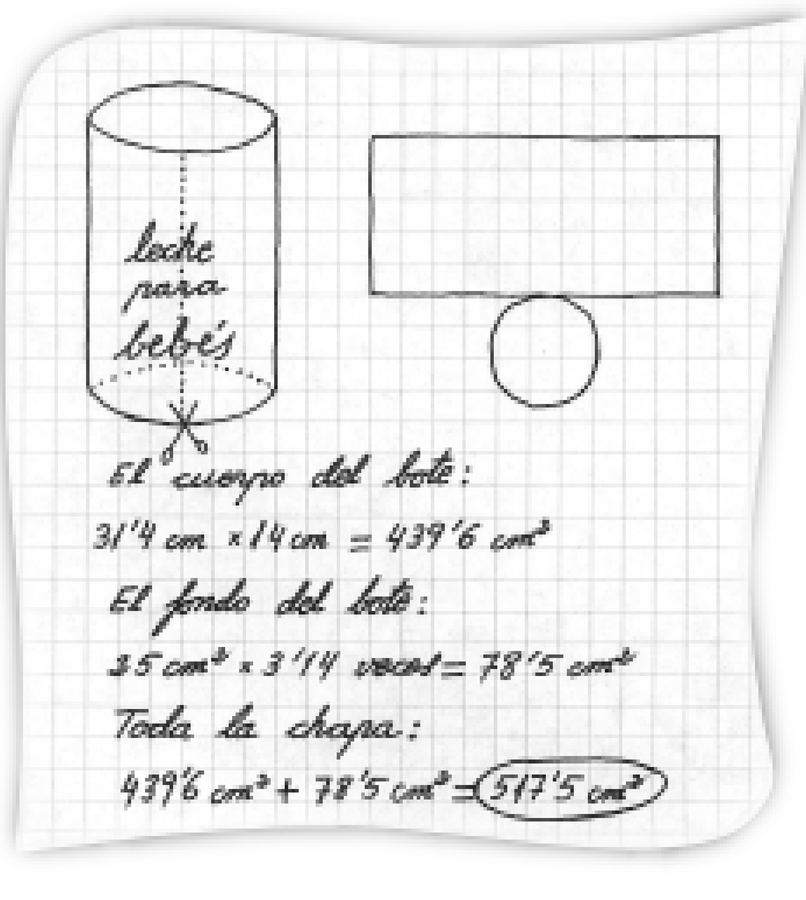
EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA TERCERA EXPERIENCIA.

- **EL MAESTRO:** Esto que tengo en la mano es un bote de leche preparada para bebés a partir del primer día. ¿Cuánta hojalata se ha necesitado para fabricar el bote si mide 14 centímetros de alto y 10 de ancho?

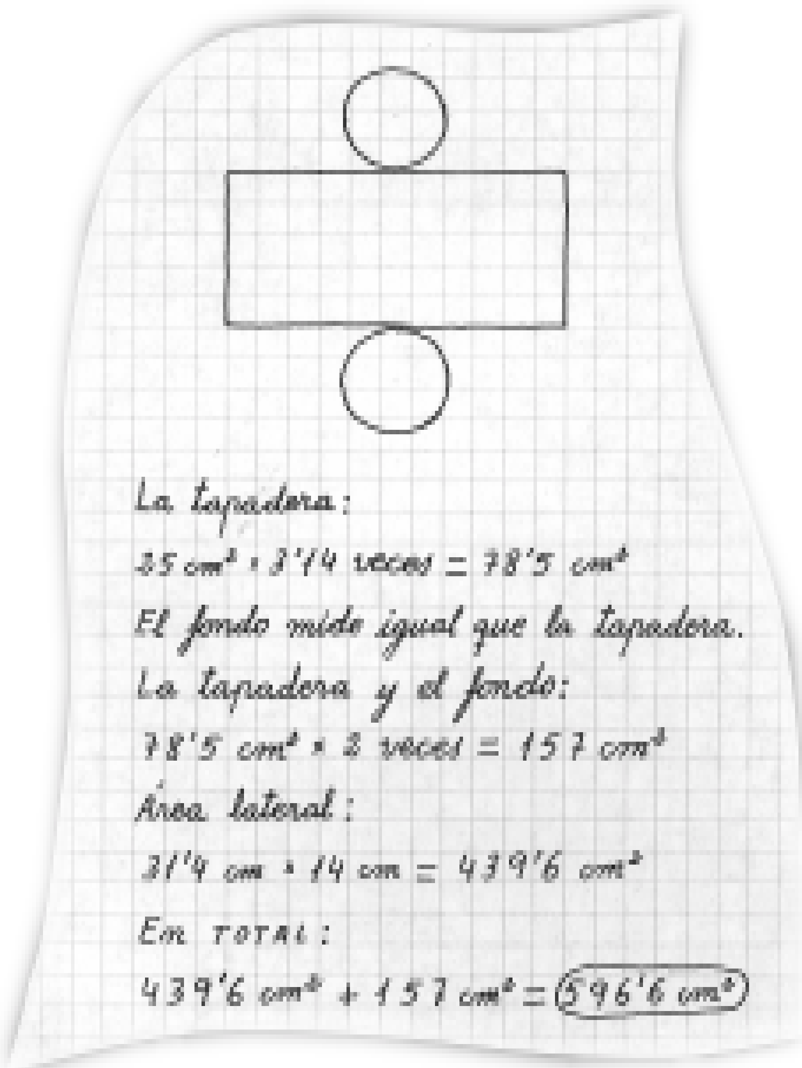
- **PACA:** Os recuerdo que no debemos olvidar las ventajas de la leche materna, por su contenido nutritivo, afectivo y en defensas.

La frase de Paca generó un debate de la leche, de la leche materna y la leche preparada, que sirvió para contrastar puntos de vista diferentes y avivar las reflexiones sobre la salud. Después se calculó la chapa precisa para hacer el bote.

- **TOÑI:** Yo entiendo que es sin tapadera, ya que la suelen llevar de plástico. Lo he resuelto así:



- **ANDRÉS:** Si la tapadera fuera de chapa, tal como he considerado, las cuentas serían estas:



CUARTA EXPERIENCIA: LA BOMBA DE LA BICICLETA.

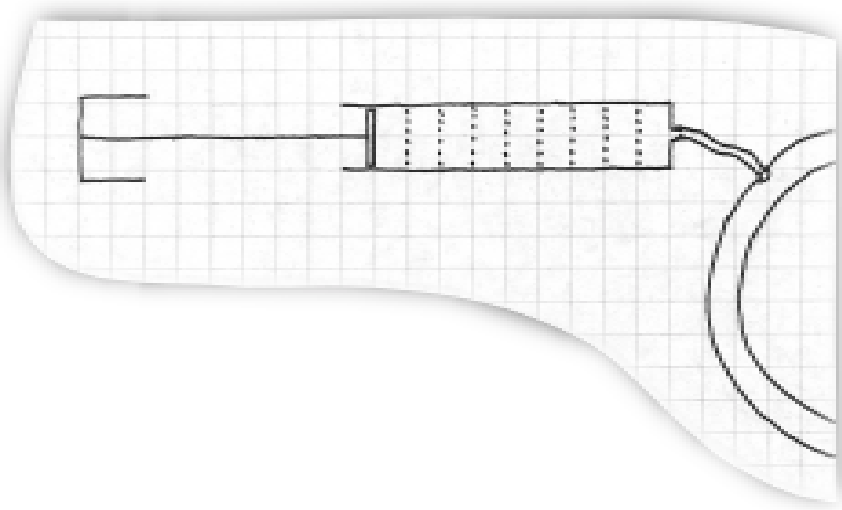
Al finalizar la clase del día anterior, el maestro se quedó hablando con un grupo de alumnos, y le pidió a Antonio, aficionado a las bicicletas, que trajera la rueda delantera vacía y la bomba de dar aire, para explicar el volumen del cilindro. Al día siguiente:

- EL MAESTRO: La sabiduría popular nos recuerda que se aprende a montar en bicicleta montando en bicicleta, intentando mantener el equilibrio, cayéndote alguna que otra vez, viviendo la nueva experiencia, notándola en tu cuerpo y en tu mente. Así aprendemos muchas cosas en la vida. Al hilo de esto, recuerdo que me compré un libro sobre natación porque yo no sabía nadar, y mi amigo Diego me dijo: Pedro, ¿cómo lo haces?, ¿con el libro en una mano y con la otra dándole al agua? Está más claro que el agua que a nadar se aprende nadando, aunque el libro te puede servir después para ayudarte a perfeccionar el estilo. Bien, aprovechando que Antonio ha traído hoy una rueda de bicicleta vacía, que no pinchada, y una bomba de dar aire, seguro que podemos hacer alguna experiencia con esto para notar, para sentir el volumen de un cilindro a través del tacto de nuestras manos. ¿Qué podemos hacer?

Algunos participantes le dieron aire a la rueda, era un buen momento para analizar el funcionamiento de la bomba.

- EL MAESTRO: Os propongo que dibujéis esquemáticamente el mecanismo de empuje de aire en esta bomba.

Sobre la pizarra María hizo este dibujo:



- LUCÍA: Está claro, el volumen de aire es introducido en la rueda conforme se desplaza el émbolo. La superficie de la «zapatilla» en centímetros cuadrados realiza un barrido en centímetros cúbicos cada vez que se desliza un centímetro por el tubo de la bomba. Cuando llega al fondo, todo el volumen de aire introducido en la rueda en ese bombeo, es el que resulta de repetir el anterior tantas veces como centímetros se haya desplazado el émbolo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El artilugio de la bomba de bicicleta permite que la mente aprecie el volumen a través del tacto, es una forma de agarrar el aprendizaje con las manos.

QUINTA EXPERIENCIA: CUENTAS PASADAS POR AGUA.

- **EL MAESTRO:** Podemos decir que un cilindro es un cuerpo geométrico redondo que acaba como empieza, es el pariente redondo de los prismas. Podemos decir que también es un prisma que tiene tantos lados que no se pueden contar.

- **JUAN:** De ahí se deduce que lo que sabemos del volumen del prisma es válido para el cilindro.

- **EL MAESTRO:** Este bote, al que se le ha caído la etiqueta, era de melocotón en almibar. ¿Cómo podemos saber su capacidad?

- **PEPA:** ¡Qué rico está el melocotón en almibar!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Es agradable endulzar el pensamiento matemático de vez en cuando.

- **JOSÉ:** Tomando unas medidas al bote y haciendo unos números.

- **PEPA:** Calculo que ese bote es de medio litro, más o menos.

José tomó las medidas que dijo en voz alta para el resto del grupo: 10 centímetros de ancho y 11 centímetros de alto. Mientras cada cual hacía sus cuentas, el maestro fue al grifo a llenar el bote de agua para hacer la comprobación real. Una vez terminados los cálculos, vació el agua en una jarra graduada en centímetros cúbicos. Las cuentas coincidieron con el agua contenida en el bote.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esto anima mucho más que si se hacen las cuentas a secas y ya está.

SEXTA EXPERIENCIA: LA MANGUERA Y LA BOTELLA.

El maestro llegó aquella tarde con una manguera más bien fina, de 2 metros y 40 centímetros de larga.

- **EL MAESTRO:** ¿Dónde pensáis que cabe más agua, en esta manguera o en la botella de un litro?

La respuesta generalizada fue: ¡En la botella, por supuesto! Se hicieron los cálculos por libre. El resultado era increíble. Por eso hicimos la comprobación. El agua de la manguera llenó la botella y un vaso de un cuarto de litro.

- **TODOS:** ¡Si no lo veo no lo creo!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Son cosas de la percepción, de la experiencia y de la inexperiencia.

SÉPTIMA EXPERIENCIA: EL HILO MÁGICO O NO TE CREAS NI LO QUE VEAS.

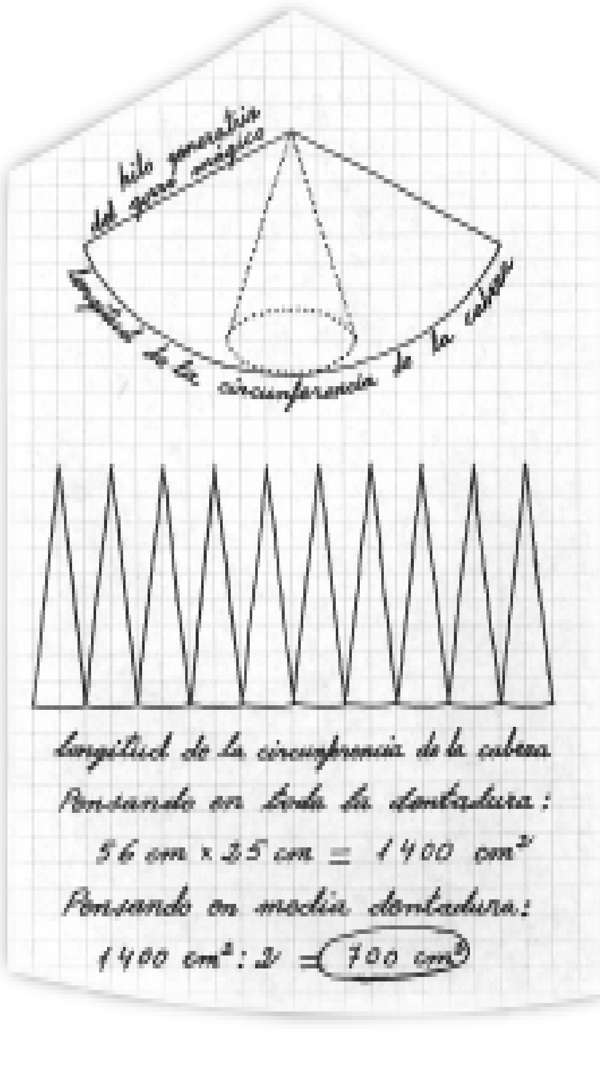
El maestro mostró un hilo verde de 25 centímetros de largo con un pequeño plomo en un extremo. Sosteniéndolo entre el pulgar y el índice por el otro extremo le impul-

só un aire mágico, haciendo aparecer un gorro de payaso al instante, con la particularidad de que podía crecer o menguar a voluntad del «mago».

- LUIS: Yo gasto una talla 56 de sombrero. Me gustaría tener uno como ese.

- EL MAESTRO: Este que sostengo en mi mano no es real, sólo existe en la imaginación del espectador. Pero tú te puedes y nosotros nos podemos hacer uno de cartulina para ponérselo al «payaso» que llevamos dentro. ¿Por qué no hacemos uno a la medida de cada cual?

Se decidió de hacer un gorro por grupo, tomándole la medida del contorno de la cabeza a uno de ellos. Y se hizo el cálculo imaginando el gorro integrado por la suma de muchos triángulos, que formaran algo parecido a media dentadura de cocodrilo.



OCTAVA EXPERIENCIA: EL EMBUDO.

- **EL MAESTRO:** Cuando hay que embotellar el líquido de una garrafa utilizamos un embudo para facilitar el trasvase. A veces ocurre que éste ajustan tan bien que no deja escapar el aire de la botella, presionado por el líquido que le roba el espacio, tendiendo a llenarse el embudo hasta rebosar. Nuestro ojo de buen cubero es el que nos avisa si salta el líquido de la botella cuando se vacíe el embudo. No sé si os ha pasado alguna vez algo así.

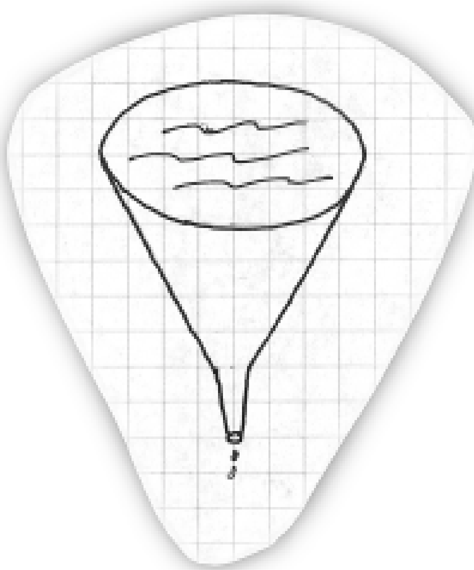
- **ANGEL:** Claro, cuarenta veces, por poner un número.

- **JUANA:** Si lo que salta es aceite te da un gusto...

- **EL MAESTRO** (mostrando un embudo de plástico azul, que sacó de la caja de herramientas): Os propongo unas cuentas al hilo de estos recuerdos. Se trata de calcular la capacidad de este embudo, y comprobarla después con agua. A veces conviene mojarse un poco.

Se tomaron las medidas:

- Diámetro de la boca: 15 centímetros.
- Altura: 12 centímetros.
- Nota: La capacidad del tubillo de salida se considera despreciable.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El cono es un pariente de las pirámides.

La evaluación de esta experiencia fue bastante buena, y además pasada por agua. La mayoría de los cálculos coincidían con el agua del embudo. Y los demás fueron revisados para vencer los errores.

NOVENA EXPERIENCIA: EL CORTE Y LA CORTEZA DE NARANJA.

Era el tiempo de las naranjas, aunque hoy en día hay naranjas en todo tiempo. Tocaba estudiar la superficie de la esfera. El maestro preguntó al grupo como aquel que no quiere, si alguien recordaba la fórmula del área de la esfera. Los pocos que creían recordarla estaban inseguros, en muchas caras se dibujaba el olvido, en otras algo de subestima mezclada con sensación de impotencia, e incluso en algunas se notaba un cierto miedo y hasta odio a esa geometría sellada con recetas.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: No es justo que algo tan hermoso como la geometría, tenga que verse tristemente enjaulado bajo barrotes en forma de fórmulas. No es justo que las bellas ideas de la geometría dejen de revolotear en la mente, antes de descubrir o de intuir las fórmulas.

- **EL MAESTRO:** Comprendo y me sumo a vuestra reacción. Lo normal es que lo que se aprende de memoria nada más, se olvide. Un planteamiento alternativo es aprender a calcular, en este caso la corteza o forro de la esfera, que es lo más redondo de las formas, haciendo alguna experiencia, que refuerce la memoria con los lazos del entendimiento. En concreto, aquí tenemos una bolsa con naranjas y un cuchillo. Os propongo la siguiente experiencia:

1º) Dar un corte a la naranja por la mitad.

2º) Recortar un círculo de papel a la medida del corte.

3º) Intentar forrar media naranja con ese círculo de papel.

4º) A ojo de buen cubero, ¿qué se observa?

5º) ¿Cuántos círculos piensas que hacen falta para liar toda la naranja?

El grupo intuyó que para liar la corteza de media naranja hacían falta aproximadamente dos círculos de papel, por tanto la relación entre el círculo y toda la naranja sería de uno a cuatro. Algunos como Francisco Juan, hasta se comieron la naranja.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esto no es exacto pero le falta poco; esto no es ciencia exacta pero refuerza los cimientos para acercarse y construirla, esto no es Matemática pero ayuda a quererla.

Si el lector tiene una naranja a mano y le pica la curiosidad, puede realizar esta experiencia para comprobarlo con sus propios ojos. ¡Ánimo!

DÉCIMA EXPERIENCIA: BOLA DE CUCURUCHOS.

(Experiencia para hacerla realidad en el tiempo de los helados; aunque con la imaginación se puede hacer en cualquier momento.)

Hacía calor, mucho calor, muchos llegaron chupando helados de cucurucho. El maestro propuso después apiñar todos los cucuruchos como símbolo de unión. El invento quedó redondo, demostrando que la esfera es una suma de conos.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Es más, con la fuerza de la imaginación podemos intuir fácilmente que la esfera está integrada por muchísimos, muchísimos conos, llegando a las mismísimas puertas del cálculo infinitesimal.

- EL MAESTRO: La esfera ha perdido su identidad, su esencia como forma, aunque no su realidad, su funcionalidad, su abundancia y su belleza; está formada por infinitas células de cono. Lo único que debemos hacer es seguir los pasos siguientes:

1º) Área del corte de la esfera: 3´14 veces el cuadrado del radio.

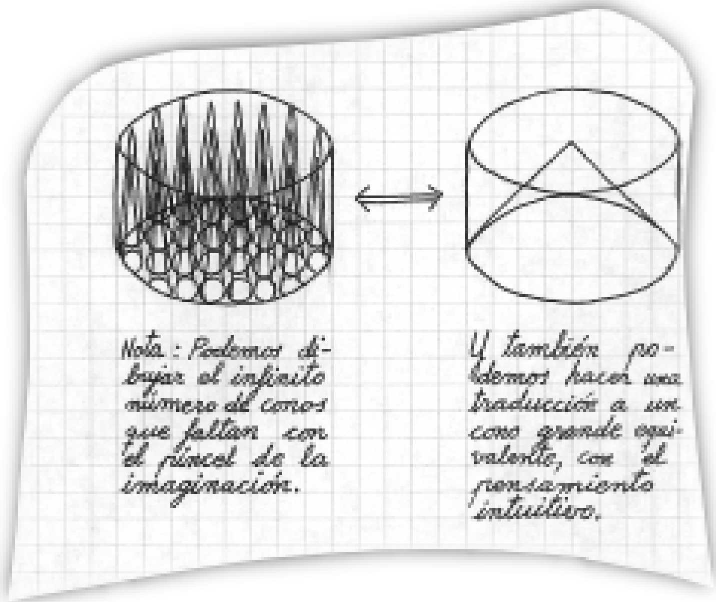
Área del círculo (corte de la esfera) $= \pi r^2$

2º) Área de la esfera: 4 veces el área del círculo del corte.

Área de la esfera $= 4 \pi r^2$

3º) Volumen de un cilindro que tuviera de base el área de la esfera y de altura el radio de ésta: área de la esfera por el radio.

Volumen de este cilindro $= 4 \pi r^2 r = 4 \pi r^3$



4º) Como el cono tiene un volumen tres veces más pequeño que el cilindro, lo dividimos entre tres.

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4 \pi r^3}{3}$$

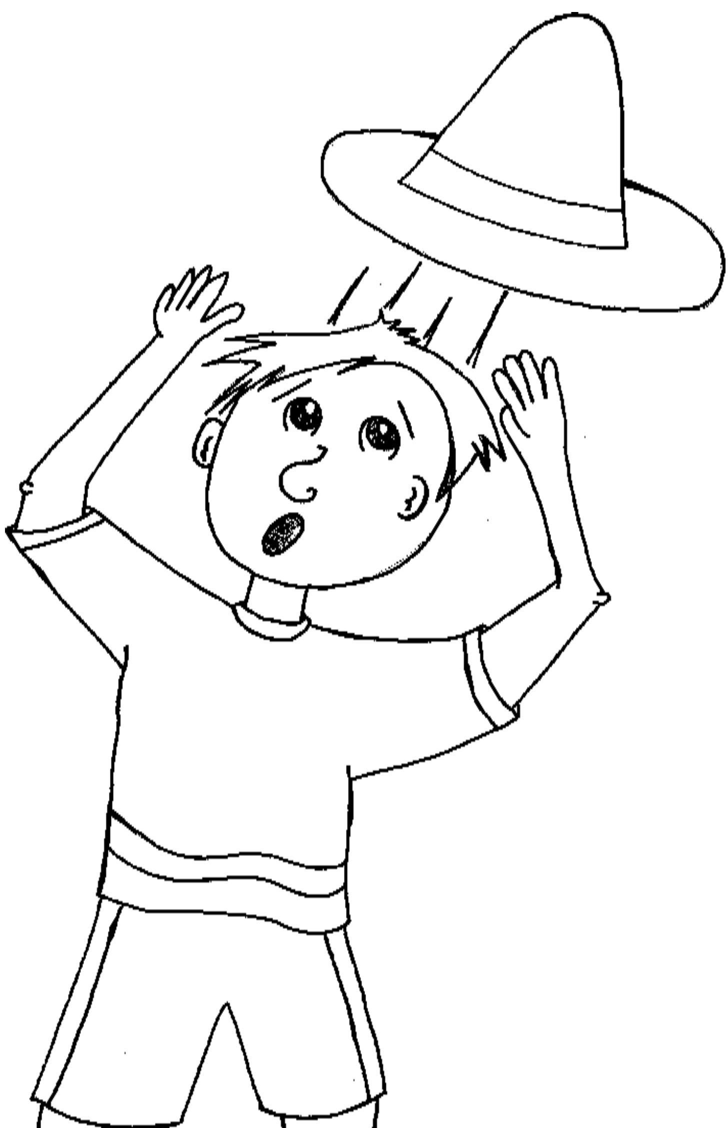
- **PACA:** El frescor de los helados es agradable pero las fórmulas te dejan desagradablemente helada.

- **EL MAESTRO:** Como sería muy frío terminar un tema con una fórmula, propongo que lo hagamos con unos deseos.

- **EL GRUPO:**

  - Que se limen las rigideces cuadriculadas.
  - Que todo circule sobre ruedas, aunque sean de bicicleta.
  - Que los que pasan hambre se pongan redondos de tanto comer.
  - Que se redondeen las mentes cuadradas.
  - Que todos podamos dialogar de tú a tú como se hace en la mesa de camilla.
  - Que disfrutemos de un mundo redondo de humanidad.
  - Que...

JUSTICIA MATEMÁTICA
(PLANETA DE LA PROPORCIONALIDAD)



Al entrar a clase sonaba en el radiocassette la música del Último de la Fila, gracias a la cinta que nos había dejado Ana. A todo esto entró el maestro con un gorro improvisado de papel de periódico, como barruntando el Carnaval, al tiempo que con una precisión casi matemática, se impregnaba el ambiente musical de una melodía que combinaba parejas de cosas, que posibilitaron una cierta sintonía en nuestros pensamientos:

«Como la cabeza al sombrero,
como el lápiz al papel,
como el susurro al rincón...»

Ya metidos en ambiente, comenzamos el trabajo de la sesión, como aperitivo de todo un planeta de números, de toda una parcela del saber matemático, referida a las comparaciones, las proporciones, lo desproporcionado, lo justo...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Lo justo, la justicia matemática, los números no mienten, eso es matemático, por eso nos pueden ayudar a leer el mundo, a comprenderlo, a humanizarlo cada vez más, practicando la justicia social y viviendo en armonía con todos los seres en la casa grande de la Naturaleza.

Lo primero que hicimos fue atrevernos a continuar nosotros inventando más letra, pareja a pareja. Al decir cada una, teníamos que emitir un pequeño juicio: «proporcionado al derecho», «proporcionado al revés» o bien «no tiene nada que ver».

- **EL GRUPO:**

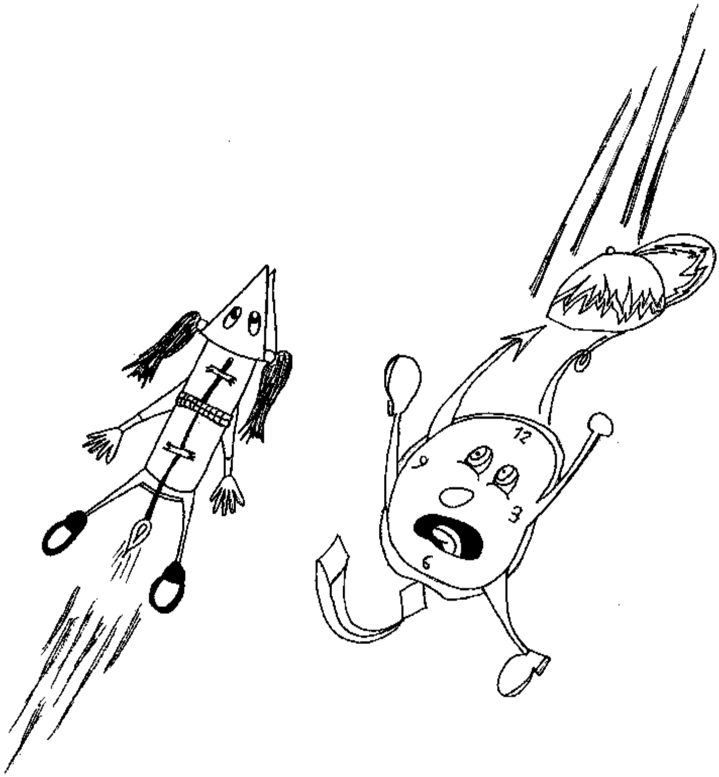
  - Pie y zapato, que no apriete ni se te salga. Proporcionado al derecho o te tienes que descalzar.
  - Espectadores y asientos ocupados. Proporcionado al derecho y a disfrutar de la película.
  - Alimentos y hambre. Proporcionado al revés, y el hambre significa injusticia social, clama al cielo y a las administraciones del mundo.
  - Velocidad y tocino. No tiene nada que ver.

- **JUAN:** No estoy de acuerdo, Pepa, si tienes la mala suerte de resbalarte en una corteza de tocino, y si ésta es más grande y grasienta, la velocidad con la que te caes al suelo es también mayor, por tanto la velocidad en este caso es directamente proporcional al tocino.

- **PACA:** Velocidad y distancia. Proporcionado al derecho.

- **EL MAESTRO:** ¿Eso quiere decir que cuánto más rápido vayas, por ejemplo de Mula a Murcia, que dista unos 40 Kilómetros en principio, más se estirará esta distancia? ¿Acaso estás bromeando con la teoría de la Relatividad?

- **PACA:** No, no, me refería a la velocidad y el camino que recorres en un tiempo determinado.



- **ALGUNOS**:
  - Velocidad y tiempo. A más velocidad, menos tiempo tardas en llegar. Proporcionado al revés.
  - Camino recorrido y tiempo. A más largo el camino, más tiempo tardas en recorrerlo. Proporcionado al derecho.
- **OTROS**:
  - El trabajo pendiente y la mano de obra que precisa para acabarlo. Proporcionado al derecho.
  - Las «prisas» y los contratos. Si corre mucha prisa para sacar adelante un cierto trabajo, en una fábrica por ejemplo, se contratará a más personal. A menos tiempo, más personal. Proporcionado al revés.

- **PACA:** Las bocas y los bocadillos. Directamente proporcional.
- **PEPE:** ¿Estás segura?
- **PACA:** Pues claro, no es justo que se quede nadie sin almorzar.
- **PEPE:** No necesariamente está proporcionado al derecho en todas las

partes del mundo por desgracia y sobre todo por injusticia. Piensa en el Tercer mundo.

No sabemos lo que opinará de todo esto el que lo lea.

Y continuó el desfile de dos en dos. Fue como un baile por parejas en cada una de nuestras mentes. Unas bien avenidas, al derecho, como el tiempo para el camino, la faena para el número de trabajadores, la hacina de alfalfa y el tiempo que el ganadero puede mantener alimentada a la manada, o los pies a los zapatos. Otras parejas como haciéndose la contra, como enfrentadas, del revés, tal es el caso de la velocidad desafiando al tiempo, la duración de la jornada laboral interfiriendo con la de la temporada de trabajo y hasta con la creación de empleo, el ancho con el largo de una misma cantidad de tela por ejemplo, el ritmo de gasto de agua de riego y el tiempo que durará la reserva en el embalse, el gasto de agua potable y el tiempo que tardará el depósito de agua en vaciarse, el número de cosas que entran en un recipiente y su tamaño, el número de cucharadas que vacían el plato en el ir y venir a la boca y su tamaño, el número de camiones y su capacidad de carga, y hasta lo que gastas y el tiempo que tardas en vaciarte el bolsillo... Era un desfile interminable.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En el ecosistema de los números, que se pegan como lapas a las variantes del entorno socionatural, en el mundo del trabajo, en la producción y el consumo, en las fábricas, en los transportes y en los viajes, en los oficios..., se da a veces una situación en la que se conocen los valores de todas las variantes que influyen en ella, y otra situación paralela, parecida, que trata de lo mismo y en la que se conocen todos los datos menos uno. Es el aventurero matemático quien podrá descubrir con su ingenio y con su saber, utilizando las herramientas adecuadas, ese dato desconocido, de incógnito, la incógnita.

- EL MAESTRO: El caso más sencillo que se puede presentar en este tipo de planteamientos paralelos es cuando se conocen los dos datos de la primera situación; y de la segunda se sabe un dato y queremos descubrir el otro. Por tanto conocemos tres datos que nos sirven para encontrar el cuarto, a modo de detectives. Si en vez de tratarse de números fuera una pandilla de amigos, para descubrir cómo es el desconocido y según la sabiduría popular nos acordaríamos del dicho de «dime con quién te juntas y te diré quién eres». Con los números pasa algo parecido, conociendo esos tres datos y combinándolos adecuadamente, podemos descubrir el cuarto sin necesidad de ser adivinos.

- LUIS: Lo de la pandilla lo entiendo, pero con los números a secas..., así de entrada, me estoy perdiendo.

A muchos les había pasado igual, se habían perdido, se había perdido la sintonía, estábamos patinando en el barro de la incomunicación, y hasta la clase estuvo a punto de perderse en el vacío de los números vacíos.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Estos vacíos enrarecen y contaminan el saber matemático de incomprensión, de apatía, de pérdida de sentido y de tiempo, asfixiando lentamente al matemático que se lleva dentro, resbalando hacia el fracaso tontamente. Y el porcentaje de fracasos en el aprendizaje de las Matemáticas no es muy bajo por desgracia.

- EL MAESTRO: Perdón, lleváis mucha razón, lo que pasa es que los números están vacíos de contenido y sentido si no llevan apellido, si no van pegados a algo, por lo menos en los cimientos del edificio matemático que se va construyendo cada aprendiz. Así, la raya del uno no es nada o puede ser cualquier cosa; sin embargo «1 pan» te puede quitar el hambre, y «1 vaso de agua» te apaga la sed. Teniendo en cuenta que los números existen gracias a que hay cosas para acompañar, lo vamos a entender muy bien con un ejemplo concreto, aterrizando en la panadería artesana de un pequeño pueblo perdido en la sierra.

- EL PANADERO: En los días de semana amaso 60 panes, para abastecer a las 20 familias que viven aquí. Para este fin de semana, contando con los domingueros que acuden al lugar, a los que les gusta el pan artesano, tengo que cocer para 40 familias. ¿Cuántos panes tendré que preparar, si el consumo de pan por familia lo consideramos igual?

A continuación analizamos cómo afrontar problemas como éste. Básicamente hay tres maneras de resolver éste y otros parecidos, aunque aumente su complejidad. El que este sea tan sencillo es para verlo más claro.

<u>Una.</u> El panadero no tiene que hacer ninguna cuenta para saber que ha de preparar 120 panes. Este es el método del tanteo, en este caso exacto por lo sencillo, en el que entran en juego conceptos tan familiares y fáciles como doble, mitad, tercio...

<u>Dos.</u> También lo podemos saber haciendo unas cuentas:

1º) De la situación de los días de semana, tomamos los dos datos que conocemos, repartiendo 60 panes entre 20 familias, resultando 3 panes por familia de media. De alguna manera el número 3 es como el jugo que resulta de escurrir el 60 con el 20 en el exprimidor de la división. Igual que tiramos la corteza y las otras partes inservibles de la naranja que exprimimos para el desayuno, tomándonos el zumo, también nos podemos olvidar de los 60 panes y las 20 familias, centrando la atención y la punta del lápiz en los 3 panes que come cada familia, el dato que no varía, el fijo, el constante, la constante.

2º) Para el fin de semana, con una situación alterada por los domingueros, el panadero conoce un dato y debe calcular el otro. Tiene que abastecer de pan a 40 familias, como ya sabe que cada una necesita 3 panes, tendrá que amasar y cocer 3 panes por las 40 familias, igual a 120 panes. En este caso no hace falta ni coger el lápiz, pero si los números hubieran sido más engorrosos, el panadero hubiera hecho una primera cuenta de reparto para saber lo que consume cada unidad familiar, y una segunda para saber lo que tiene que preparar; ambas cuentas acorde con los esquemas autónomos de razonamiento, bajo el control de su cerebro.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Este proceso es un poco artesano, como este pan, bastante artesano, algo lento pero muy seguro, seguro de sentirte seguro, seguro de ti mismo, de entender paso a paso el sentido total de cada cuenta que haces, de conducir tú tu propia situación.

Tres. Lo que es menos probable es que este panadero utilizara una especie de regla de tres datos conocidos para descubrir el cuarto dato.

20 familias...........................60 panes

40 familias........................... x panes

x = 40 por 60, dividido entre 20, igual a 120 panes.

Sin embargo para casos difíciles, esta regla de tres, de cinco, de siete, de... impares, puede ser una especie de herramienta industrial bastante útil, digo lo de industrial por su rapidez, que es su ventaja. El único inconveniente que puede tener es que sea mal aplicada, que se utilice a ciegas, que como humano te dejes llevar por la comodidad de una receta no bien acabada de comprender. Si el problema que has de resolver es relativamente sencillo, no hay problema, valga la redundancia; pero como tenga cierto aire de dificultad, a modo de zancadilla, te puede hacer caer en el error con mayor probabilidad que si empleas métodos artesanos de razonamiento, al margen de las fórmulas preestablecidas por otros.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Sólo en caso de que comprendas el mecanismo de la regla de tres, como apéndice del Álgebra, que la conozcas por dentro, en su esencia, desnuda de vestidos artificiales con pinta de fórmulas vacías de significado para ti, que la hayas vuelto a descubrir sintiendo la alegría de quienes la diseñaron, sólo entonces te encontrarás a la altura de las circunstancias, pudiéndote permitir el lujo de utilizarla como una herramienta que conoces bien. Si no es así, si la utilizas a ciegas, corres el peligro de emplearla inadecuadamente, de que se vuelva contra ti, de que tú la engañes sin querer y ella te salga por las lunas de Valencia, y hasta de que este bello apéndice del Álgebra sufra de apendicitis.

- ANTONIO: A mí me gustaría, y pienso que a todos, comprender el mecanismo de la regla de tres, conocerla en radiografía, que conectara con los razonamientos de mi mente, que le hiciera tilín a mi cerebro, porque yo me la aprendí de rutina y eso hace que a veces me líe un poco y otras me líe del todo.

Todo el grupo manifestó la misma necesidad que Antonio.

- EL MAESTRO: De acuerdo, es una buena actitud. Para empezar a entenderla es mejor que nos apoyemos en algún ejemplo sencillo. Podemos imaginar una pandilla de personas aficionadas a la bicicleta y que a su vez se haya propuesto colaborar en la reforestación de un bosquecillo, que esté más pelado que un calvo, con plantas autóctonas. Por imaginación que no quede.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Si suponemos que esa pandilla somos nosotros mismos, mejor todavía, porque es una manera de acercarnos a la situación, de meternos en ella, de ser los protagonistas del problema que tenemos que resolver. Lo mejor sería que el problema no fuera supuesto sino real, pero a falta de pan buenas son tortas.

- EL MAESTRO: Y supongamos además que están o que estamos dispuestos a repoblarlo en dos sábados seguidos, llevando las encinas desde el vivero municipal hasta el monte, que dista un par de leguas, en los portaequipajes de las bicis. Si en el primer día participaran en esta digna labor medioambiental 15 ciclistas plantando 150 encinas, que seguro que agradecerán nuestros hijos, nietos..., para el segundo día quedaría pendiente trasplantar 50 encinas. ¿Qué necesitaríamos saber? ¿Cuál sería la pregunta que nos plantearíamos?

- EL GRUPO: ¿Cuántos ciclistas tendrán que participar si se transporta el mismo número de encinas por bicicleta?

- EL MAESTRO: Nuestro ordenador personal, el que llevamos incorporado en la cabeza, puede resolver este problema por distintos caminos, poniendo en juego distintos razonamientos; algo así como un ordenador de verdad que pudiera activar diferentes programas, que sirvieran para obtener un mismo resultado en función de los datos introducidos vía teclado. Uno de estos razonamientos posibles, eso sí, algo rebuscado, no nos engañemos, conecta con el mecanismo interno de la regla de tres, que es como la descarga de un razonamiento a través de la punta del lápiz, fruto de imágenes que afloran en la mente:

15 bicicletas..150 encinas

? bicicletas.. 50 encinas

Este razonamiento pasa por la comparación de las encinas transportadas y plantadas el primer sábado con las del segundo, compara las 150 encinas de «antes» con las 50 encinas de «después», compara esas dos cantidades de encinas, saltando inmediatamente a la luz del razonamiento que las encinas de la primera vez son el triple que las de la segunda. Sólo en caso de cantidades más difíciles la mente exige la ayuda del lápiz o la calculadora para hacer el reparto con una división. En dicho razonamiento está la verdadera «razón de proporcionalidad», que sencillamente consiste en comparar ambas cantidades, repartiendo la primera entre la segunda, pudiéndose dar tres casos, tres resultados, tres números: menos de uno, uno o más de uno; perder, empatar o ganar.

Caso 1. Si la cantidad primera es menor que la segunda, el razonamiento de comparación te indica que la cantidad primera es menos de una vez la cantidad segunda, puede ser más de la mitad, la mitad, menos de la mitad, la tercera parte...

Caso 2. Si son iguales, si se da empate, la comparación te lleva a uno, o sea que la cantidad de la primera contiene una vez la cantidad de la segunda.

Caso 3. Si la cantidad de la primera es mayor que la de la segunda, el razonamiento de comparar te informa que la contiene una vez y pico, doble, dos veces y pico, triple...

A este razonamiento que nos sirve para encontrar la «razón de proporcionalidad» -valga en este caso el juego de palabras, aunque nos recuerde aquello de la razón de la sinrazón, como expresión vacía de significado de algunas novelas de caballerías anteriores al Quijote- la mente encadena otro paralelo, está segura de que si comparamos el «antes» y el «después» de las dos cantidades de bicicletas, se dará la misma relación, la misma proporción que cuando hemos comparado el «antes» y el «después» de las cantidades de encinas.

- ANA: ¿Por qué?

- EL MAESTRO: Sencillamente por lógica, rollos aparte, la misma proporción que guardan entre sí las encinas, deberán guardar las bicicletas, que por eso las han llevado sobre sus portaequipajes. Ambas proporciones están en equilibrio. En el ejemplo se ve muy claro, si las encinas del primer sábado son el triple que las del segundo, las bicicletas del primer día también serán a la fuerza triple que las del segundo, si porta cada una igual cantidad de encinas, es lógico, es justo y es una proporcionalidad al derecho. Por tanto:

1º) Comparar las cantidades de encinas es como comparar las de bicicletas. Equilibrio. Ecuación.

$$\frac{150 \text{ encinas}}{50 \text{ encinas}} = \frac{15 \text{ bicicletas}}{x \text{ bicicletas}}$$

2º) Si sabemos un poco de Álgebra, de baile de números y letras que juegan a ser equilibristas, podemos quitar los números y letras de abajo, de los denominadores, para dejar una expresión más sencilla. Esto se consigue multiplicando las dos partes de la ecuación, para mantener el equilibrio, por el número que estorba abajo, con la buena idea de anularlo.

$$\frac{150 \cdot \cancel{50}}{\cancel{50}} = \frac{15 \cdot 50}{x}$$

$$150x = \frac{15 \cdot 50 \cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$$150x = 15 \cdot 50$$

3º) Despejar la incógnita es quitarle los estorbos a la «x», dejarla sola en una parte del signo igual para saber lo vale ella solita.

$$\frac{\cancel{150}\, x}{\cancel{150}} = \frac{15 \cdot 50}{150}$$

$$x = \frac{15 \cdot 50}{150} = \frac{75\cancel{0}}{15\cancel{0}} = 5 \text{ bicicletas}$$

- PACA: He seguido el razonamiento hasta el planteamiento de la ecuación, que entiendo como una igualdad. Pero me pierdo en los pasos mecánicos de su resolución. Lo siento pero se me nubla la mente.

La realidad es que se cargó el ambiente con unos nubarrones negros de líos mentales que amenazaban tormenta. La voz de Paca fue el primer relámpago...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: ¡Maestro de Matemáticas!, ¿maestro de Matemáticas? ¡Peligro! Situaciones así pueden enturbiar la claridad de la belleza y la poesía matemática.

- EL MAESTRO: El que lo siento soy yo, por querer acelerar artificialmente el proceso de aprendizaje de la regla de tres, por intentar ganar tiempo a costa de perder comprensión, por cortar vuelos al pájaro de vuestra intuición, por enjaular el descubrimiento personal, por estar a punto de marchitar las flores del jardín de la democracia matemática... Ahora que me doy cuenta a tiempo, menos mal, pienso que es mucho más sensato esperar a que trabajemos el tema del Álgebra antes de hacer reglas de tres. Mientras podemos resolver estos mismos problemas de otras maneras, que ya vimos el otro día. En todo caso podríamos llegar a plantear la ecuación, como mucho, de momento.

- JUANA: ¡Que alivio! Efectivamente para encontrar esta solución basta con pensar que si el número de encinas que hay que transportar es tres veces más pequeño, también lo será el número de bicicletas. Por tanto está muy claro que hay que dividir 15 bicicletas entre tres veces, igual a 5 bicicletas.

- ANGEL: Yo he pensado otro problema de velocidad y tiempo, que están proporcionados al revés. Cuando fuimos de excursión en bicicleta desde Mula al Berro, como hicimos algunas personas del Centro de Educación de Adultos «Río Mula», el 24 de abril de 1996, con motivo de una convivencia, dentro de la Semana Cultural, tardamos 1 hora sacando una media de 20 kilómetros por hora. ¿Cuánto hubiéramos tardado en caso de ir andando a 5 kilómetros por hora? ¿Sería un buen ritmo de paso?

- EL MAESTRO: Por supuesto sabemos que para calcularlo no hace falta ni siquiera hacer cuentas, y en caso de que se hagan deberían estar de acuerdo con nuestros propios y elegantes razonamientos, en principio. Sin embargo podemos llegar a plantear una ecuación, que nos deje abierta una vía alternativa de solución por los caminos del Álgebra, cuando entendamos bien el baile de los números con las letras.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Jamás se deberá utilizar la regla de tres como una receta que no se entiende; para aplicarla mecánicamente es preferible ganar el tiempo en cualquier otra cosa.

- **EL MAESTRO:** Una pista os puedo dar en forma de pregunta. ¿En qué se parecen estas dos sillas?

- **EL GRUPO:** En que son iguales.

- **EL MAESTRO:** ¿Y en qué se diferencian?

- **EL GRUPO:** En que una está al derecho y la otra está al revés.

- **EL MAESTRO:** ¿Qué habrá que hacer para que queden igual?

- **EL GRUPO:** Darle la vuelta a la que está boca abajo y así sirven las dos para sentarse.

También se podría poner boca abajo la que está derecha pero eso parece que tiene menos gracia.

- **EL MAESTRO:** ¿Está claro ahora cómo hay que colocar los datos de la excursión al Berro para combinarlos en equilibrio?

Llegó el momento de plantear el problema:

20 kilómetros por hora...1 hora

5 kilómetros por hora...x horas

Y fue tan atractivo para la mente como difícil comprender que se podía establecer una relación de equilibrio, una ecuación entre la comparación de las velocidades y la comparación de los tiempos. Nuestra lógica nos decía que daría el mismo número de veces si repartíamos la velocidad de la bicicleta entre la del caminante, tantas veces más rápida aquella que éste; que si dividíamos el tiempo del caminante entre el de la bicicleta, las mismas veces mayor el de aquel que el de ésta. La condición, que se deduce de este razonamiento es que se le tiene que dar la vuelta, se tiene que poner del revés para que de igual, la pareja de datos de los tiempos, que es como poner las dos sillas del revés. Retorciendo un poco más el pensamiento, al estilo barroco también te dice la lógica que si repartes el tiempo de la bicicleta entre el del caminante te dará «cero coma y pico», exactamente igual que si divides la velocidad del caminante entre la de la bicicleta, el mismo «cero coma y pico», que es como poner las dos sillas del derecho.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Las fronteras entre las distintas parcelas del saber matemático, se difuminan muchas veces en los razonamientos, como acabamos de comprobar en este ejemplo. Se podría decir que la cosa matemática vive en una especie de aldea global en la mente humana.

- **EL MAESTRO:** Por tanto la ecuación que se plantea es esta:

$$\frac{1 \text{ hora}}{x \text{ horas}} = \frac{5 \text{ Km/h}}{20 \text{ Km/h}}$$

- **PEPE:** Me pica la curiosidad por saber cómo se resuelve esta ecuación.

- **EL MAESTRO:** Pienso que para eso debemos trabajar primero y con calma el tema del baile de los números con las letras, el Álgebra, que lo haremos próximamente. Sólo a modo de curiosidad la voy a resolver en la pizarra algebraicamente, siguiendo unos pasos ordenados. Pero aviso que mientras tanto, mientras no aprendamos a caminar por las sendas del Álgebra, debemos ser conscientes, si utilizamos esta resolución, de que estamos aplicando una receta.

$$5x = 20 \cdot 1$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4 \text{ horas}$$

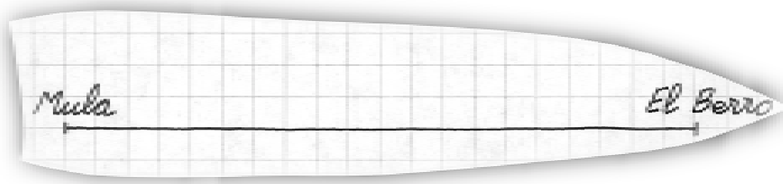
- **PACA:** Con todos mis respetos hacia el señor maestro, no aplico yo esa receta ni de broma, hasta que no la entienda, aunque se me garantice que funciona, porque para mí supone dar un paso en falso, un paso de espaldas a mi razonamiento, un salto en el vacío. Pienso que puedo sentir una sensación de impotencia hacia ese tipo de cuentas. No quiero ser tan dependiente de esos artilugios -lo dijo como lo sentía- porque quiero tener autonomía de razonamiento matemático.

- **EL MAESTRO:** Magnífico, maravilloso, chapeau, para quitarse el sombrero, actitudes tan valientes como esta, son capaces de engrandecer la cultura matemática humana. Debemos animarnos a resolver este miniproblema como a Paca le gustaría.

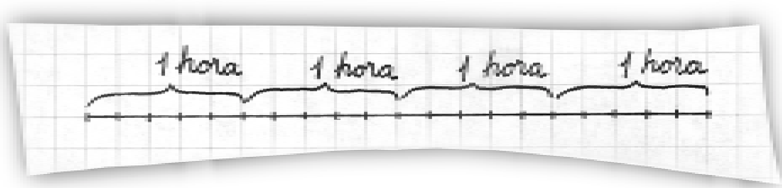
Un estallido de cultura matemática floreció al momento. Cada uno, con talante democrático, siguiendo las reglas no escritas de la democracia matemática, expuso su *razonamiento. Se dice que todos los caminos llevan a Roma, y en este caso podemos decir que todos los procesos nos informaron que podíamos llegar andando al Berro en 4 horas.*

- MIGUEL: Si en bicicleta, que avanzamos a un ritmo de 20 kilómetros por hora, tardamos una hora es porque hay 20 kilómetros de Mula al Berro -distancia real aproximada-. Si andando nos comemos 5 kilómetros, con los pies claro, cada hora que pasa en el reloj, para comernos los 20 kilómetros que hay en total, que son 4 tramos de 5 kilómetros, tardaremos 4 horas; tantos tramos, tantas horas, tanteo exacto, tiempo justo.

- CARLOS: Mi enfoque ha pasado por un dibujo esquemático. Lo he trazado así, recto, aunque en realidad tiene más curvas que la carretera de Gebas, como dicen las gentes de este lugar.



Lo he repartido en 20 trozos, que he agrupado de 5 en 5 kilómetros.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esta manera de afrontar los problemas con un dibujo o con un esquema es genial, que te lo digo yo que soy el genio matemático; Esto ayuda mucho, sobre todo cuando las situaciones planteadas son más complejas. Y si no piensa en el número 1, que es una raya, un pequeño dibujo, gracias al que ha sido posible desarrollar todo el universo matemático.

- ANTONIA: Lo que debemos tener claro es que se trata de repartir el camino en tramos. Sencillamente, 20 kilómetros entre 5 kilómetros, igual a 4 tramos. Solución: 4 tramos, 4 horas.

- PACO: Yo lo resuelvo doblando y cortando hilo, para notar un poco el camino entre mis dedos.

- JOSÉ: Yo no necesito hacer cuentas ni tanteos en este caso porque este camino forma parte de mis caminatas, sé que tardo 4 horas porque lo he experimentado paso a paso.

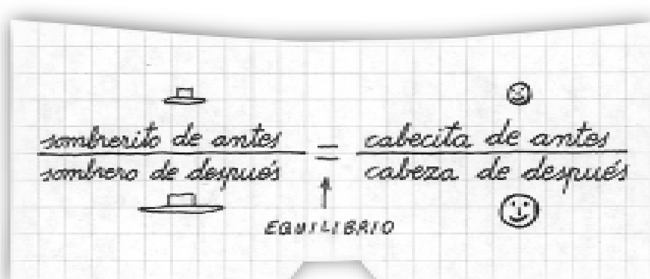
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Acabamos de comprobar que es bueno respetar la autonomía de razonamiento porque así cada cual utiliza sus propias herramientas. Pero tampoco es malo enseñarse a manejar otras herramientas nuevas como las ecuaciones, que pueden abrir nuevas posibilidades en el cálculo, pero no a destiempo.

- EL MAESTRO: Tanto en el problema de la panadería, como en el de la repoblación de encinas como en el de la caminata al Berro, hemos golpeado la puerta del Álgebra, nos hemos asomado un poco pero con la luz apagada, por eso lo hemos visto negro y nos hemos echado atrás, con el temor de la incomprensión. Las ecuaciones que hemos dejado planteadas, o resueltas a la ligera que da lo mismo, nos han dejado con la miel en los labios, con sensación de vacío. Pienso que es un buen momento para entrar en el tema del «baile de los números con las letras», que os propongo empezar próximamente.

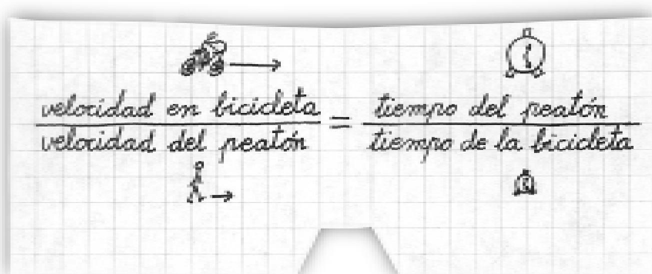
Durante el mes siguiente danzaron nuestras mentes al ritmo de los números con las letras.

Pasado este tiempo, volvimos al tema de la «justicia matemática», pudiendo resolver claramente este tipo de problemas de proporcionalidad también por la tercera vía de la regla de tres, pero no utilizándola como receta a ciegas sino como herramienta algebraica bien comprendida. Hicimos un repaso de los equilibrios en las comparaciones de las «parejas»:

<u>Caso 1.</u> En proporciones como la cabeza al sombrero, si comparas el sombrerito de cuando tenías la cabeza pequeña con el que te pones ahora cuando hace sol, ahora que tienes la cabeza más grande, no necesariamente por ser más cabezón sino porque te has hecho mayor, seguro que ambos sombreros guardan entre sí la misma proporción que si comparas tus cabezas, la de antes y la de ahora, ¿o no? El sombrerito de antes es al sombrero de después como la cabeza de antes es a la cabeza de después. Esta es la ecuación.



Caso 2. En proporciones como en las que la velocidad desafía al tiempo, como ocurrió en la excursión al Berro, si al comparar repartes la velocidad que consigues en bicicleta (mayor) con la velocidad de cuando eres peatón (menor), dará igual que si repartes el tiempo que tardas andando (mayor) entre el tiempo que tardas en bicicleta (menor), por pura cuestión lógica. ¿No te parece? Observa que se le da la vuelta a los tiempos porque están proporcionados al revés respecto de las velocidades.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Estos dos casos son puros, sencillos, con una proporción al derecho o con una proporción al revés, pero a veces la realidad es más compleja, pudiendo entrar en juego más de dos parejas e incluso mezclando la proporcionalidad directa y la inversa, metiéndonos en un buen berenjenal.

- **EL MAESTRO:** A ver, entre todos podemos inventar una situación lo más cerca posible de la realidad para analizar cómo se comportan los datos, los del derecho y los del revés, respecto de los que están en el punto de mira, compuesto por la comparación entre un dato conocido y una incógnita, para pasarlos por el equilibrio de una ecuación, con el objetivo de descubrir al desconocido, mediante la regla de tres.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La utilización de la regla de tres no debe restarle ninguna importancia al método del tanteo ni al de las cuentas pasadas por el uno, dicho de otra manera no debe quitarle protagonismo alguno a ninguno de los razonamientos autónomos del ser humano.

- **EL MAESTRO:** Mediante la regla de tres o de cualquier otra forma.

- **PAQUI:** Este verano pienso hacer senderismo. Posiblemente en dirección al Río Cuervo, en Cuenca.

- **ALGUNOS:** Buena idea, nos apuntamos a la caminata.

- **ANGEL:** Tengo unas amistades en Toledo, que practican este ejercicio físico. Si nos ponemos en contacto, podríamos tener un encuentro en Cuenca.

- LOS INTERESADOS: Vale, nos parece muy buena idea.

- ANGEL: Ellos suelen ir cada año. Me contaron que el año pasado estuvieron andando de lunes a viernes a razón de 8 horas diarias para cubrir el recorrido de Toledo al Río Cuervo, de unos 200 kilómetros. ¿Cuánto tiempo tardaríamos nosotros, los murcianos, en caminar los 400 kilómetros que nos separan, si andamos sólo 4 horas al día para no cansarnos mucho, siempre que llevemos el mismo ritmo de paso?

Lo primero que hicimos fue plantear la situación paralela de ambos grupos:

Toledanos	5 días	200 kilómetros	8 horas diarias.
Murcianos	? días	400 kilómetros	4 horas diarias.

De tres maneras se llegó al mismo resultado:

Una. Por tanteo. Si los murcianos tenemos que recorrer el doble de camino, tardaremos el doble de días, siempre que moviéramos las piernas durante 8 horas cada día; pero como tenemos previsto moverlas la mitad de horas, tardaremos otra vez el doble de días, lógico. Por tanto tardaremos el doble del doble de 5 días, o sea 20 días.

Dos. Haciendo unas cuentas pasadas por el uno.

1º) Descubrimos el uno sacándole el jugo a los datos de los toledanos. 5 días a 8 horas diarias, igual a 40 horas en total, en todo el camino. Repartiendo, por lógica, todo el camino entre todas las horas, 200 kilómetros entre 40 horas, igual a 5 kilómetros en una hora. Ese es su ritmo de paso, que coincide con el nuestro, por tanto hemos descubierto el punto de enlace a través del ritmo de paso que se sigue en las dos caminatas, lo que no cambia, lo que se conserva, lo constante, el jugo del camino al repartirlo entre el tiempo.

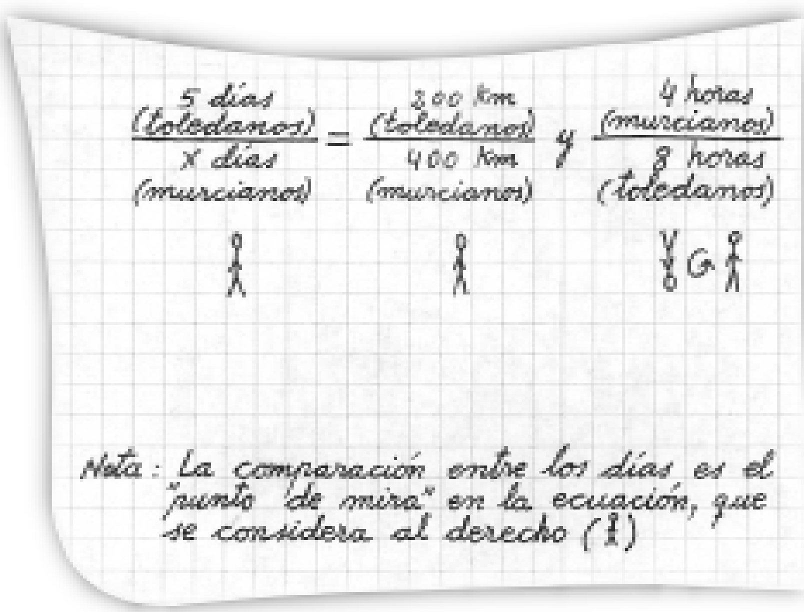
2º) Aprovechando ese dato común de toledanos y murcianos, podemos hacerle unos números a la caminata de estos últimos. 5 kilómetros en 1 hora, por 4 horas al día, igual a 20 kilómetros al día, lógico. Para dejar atrás 400 kilómetros, día a día, uno detrás de otro, basta con hacer un simple reparto. 400 kilómetros entre tramos de 20 kilómetros, igual a 20 tramos, 20 días, y lo hemos conseguido.

Tres. La regla de tres o el equilibrio de dos caminatas.

Datos de ambas caminatas:

Toledanos	5 días	200 kilómetros	8 horas diarias
Murcianos	? días	400 kilómetros	4 horas diarias

Para equilibrar los datos de las dos caminatas:



Notas para aclarar la relación de las distancias y las horas diarias con el punto de mira de los días:

1. A más camino, más días, pareja al derecho. Está en equilibrio con el punto de mira.
2. A más horas al día, menos días, pareja al revés. Para mantener el equilibrio con el punto de mira se le da la vuelta, lógicamente.

En esta intuición queda un cabo suelto, entender por qué se multiplican entre sí las parejas que están al otro lado del punto de mira. Ejemplos concretos nos pueden ayudar a entenderlo, eso sí, dentro del plano intuitivo, que no es poco.

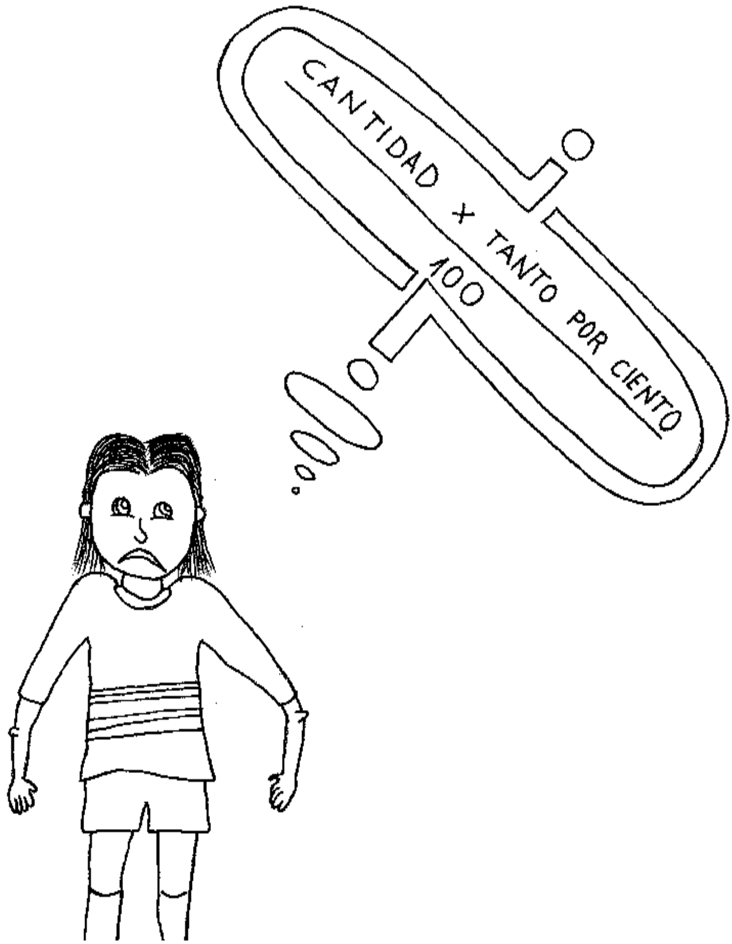
<u>Ejemplo 1.</u> Los bocadillos dependen del número de bocas y del número de comidas al día. Si se dobla el número de bocas y se triplica el número de comidas, el número de bocadillos se multiplicará por 2 veces y por tres veces, en total se multiplicará por 2 por 3, igual a 6 veces.

<u>Ejemplo2.</u> Los días que dura una caminata dependen del camino y de las

horas que se camine al día. Si el camino es el doble, el número de días se multiplicará por 2 veces. Y si las horas que caminas al día se reducen a la cuarta parte, el número de días se incrementará por 4 veces (inverso, del revés), en total se multiplicará por 2 y por 4 veces, o sea por 8 veces.

Esta es una forma intuitiva de comprender el sentido del planteamiento equilibrado de las parejas proporcionadas. La resolución de la ecuación del encuentro de toledanos y murcianos es muy fácil, siguiendo el ritmo del baile de los números con las letras.

EL PORCENTAJE
(SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)



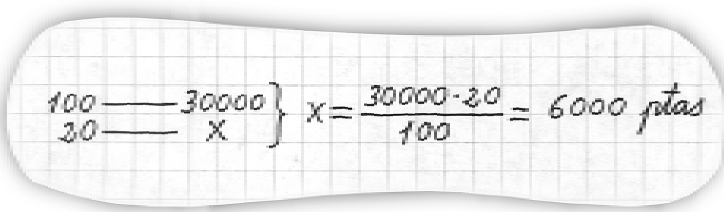
- **EL MAESTRO** (Con los papeles un poco cambiados)**:** El tanto por ciento se puede calcular con una simple regla de tres. Es muy fácil, la regla te lo da hecho. Es muy sencillo, no tienes que pensar nada. ¡El pensar se va a terminar! Basta con dejarse llevar por la comodidad de una receta.

Por las mentes de muchos miembros del grupo hubo un desfile de pensamientos, sin palabras, no comentados:

- ¡Qué raro! Este no es el maestro, me lo han cambiado.

- ¡No puede ser! Está irreconocible.
- ¡No puedo creer lo que oigo!
- ¡Eso es lo contrario de lo que predica!
- ¿Habrá cambiado su modo de pensar?
- ¡Esto supone un paso atrás!
- ¡Este discurso no le pega ni con cola!
- ¡Seguro que aquí hay gato encerrado!
- ¡¡¡???...

- EL MAESTRO (que sigue con los papeles del revés)**:** La calculadora también te lo da hecho. Por ejemplo si tienes que calcular el 20% de 30.000 ptas, basta con teclear 30000X20%, y en la pantallita aparece como por arte de magia 6000, que sabemos que son pesetas, ¡maravillas de la técnica! Si se le han gastado las pilas o no dispones de calculadora en ese momento, puedes seguir mecánicamente el esquema de la regla de tres:



Y si por desgracia no te acuerdas de la fórmula de la regla de tres «multiplicas la cantidad total de pesetas por el porcentaje y al final cortas dos decimales». Esta es la mecánica a seguir. Está muy claro, está clarísimo, clarísimo, y es sencillísimo.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Lo que no está tan claro es el valor didáctico de planteamientos así, que pueden adormecer bastante la reflexión personal, si te descuidas dejándote llevar por recomendaciones fáciles.

El resto de la sesión, contaminada por la ley del «déjate llevar por la comodidad de la aplicación de recetas hechas por otros», transcurrió con aparente normalidad, sin equivocarnos, sin fallar en las actividades rutinarias programadas a imagen y semejanza del ejemplo.

- EL MAESTRO: EN LA SIGUIENTE SESIÓN NOS AGUARDA UNA GRAN SORPRESA.

EL MAESTRO QUE NO SE SABÍA LA LECCIÓN
(Esta es la sorpresa anunciada en la sesión anterior, un entremés del tanto por ciento)
(COMETA DEL UNIVERSO MATEMÁTICO)

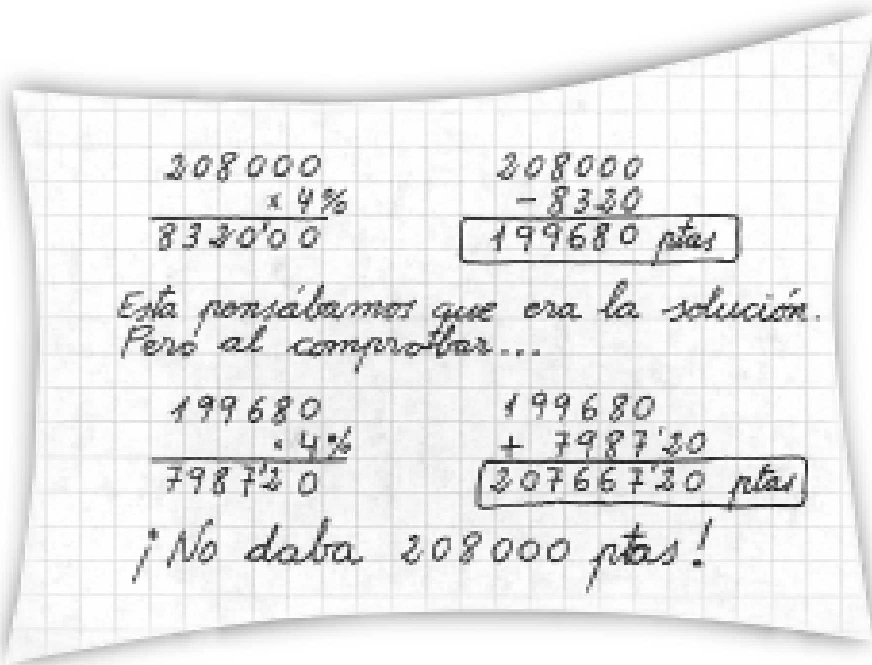
Aquel día entró el maestro con aire despistado, no sabemos si programado o real. Llevábamos una sesión estudiando porcentajes, aunque sin profundizar lo suficiente en sus entresijos, preocupándonos más de la mecánica que de su significado interno. A todo esto, Antonio, un alumno, de oficio camionero, propuso hacer un problema *real, de los de verdad, el mismo problema que se le planteó a él el día anterior, el desglose del 4% de I.V.A. (Impuesto del Valor Añadido) sobre el importe total de un camión de naranjas, que era de 208.000 ptas. Este tipo de problemas se daba en España desde el año 1.986, en relación con los impuestos y la integración europea.*

- EL MAESTRO: Como es habitual, que cada cual intente encontrar la solución por su cuenta. Nos podemos ayudar unos a otros por supuesto. Al final enriqueceremos nuestros puntos de vista en la puesta en común.

Al cuarto de hora aproximadamente, todos habíamos coincidido en desquitar el 4%al importe total de 208.000 ptas. creyendo encontrar así el valor de las naranjas sin I.V.A.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Parecía lógico aunque el razonamiento estaba equivocado, esto ocurre muchas veces cuando pensamos a la ligera. No obstante equivocarse es de matemáticos humanos y de sabios. Pero al hacer la comprobación, al añadir el 4% al importe de las naranjas faltaban 333 ptas., había un error que no era casi nada, pero lo suficiente como para crear una pequeña crisis en el pensamiento, necesaria para mover las neuronas hacia la búsqueda de la solución correcta.

Aquí están las cuentas para recrearse en detalles:



- **MARIANA:** ¡Maestro, necesitamos ayuda urgentemente!

- **EL MAESTRO** (que no sabía o jugaba a no saber hacer el problema)**:** Hoy no me sé la lección, hoy estoy un poco tonto. Hoy tendremos que intentar encontrar la solución entre todos. A ver que pasa...

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Pasó algo muy importante a nivel pedagógico, el maestro perdió un poco de su protagonismo, de su poder de saber, que lo ganó el grupo. Durante más de media hora, media hora dura, intensa y larga, cada uno de los miembros del grupo y también el maestro, viviendo viejos tiempos de alumno, tuvieron que poner a prueba todo su ingenio, buscaron la solución con esfuerzo y con paciencia, metiéndose en el papel de investigadores, con actitud de poner en duda, de no saberlo todo, de trabajo ilusionado, de sencillez, de entusiasmo, de resignación, de búsqueda permanente, de creer haber encontrado la solución y llevarse una desilusión, de volver a probar de otra manera, de notar como te acercas a lo que buscas, de cuestionar e investigar para descubrir. A veces no llegas al final, no encuentras lo que quieres o necesitas saber, pero en el proceso, en el camino te enteras de muchas cosas que tampoco sabías y que te pueden servir en algún momento, sintiendo la sensación de no haber perdido todo el tiempo. Otras tienes más suerte, lo consigues y sientes la inmensa alegría, casi indescriptible del encuentro con el saber. Estas alegrías no florecen cuando un maestro demasiado protagonista en el proceso de enseñanza-aprendizaje se acerca sin querer, o sin darse cuenta, o sin paciencia al sabelotodo que explica antes de la cuenta la manera de resolver el problema, sin dejar tiempo a sus alumnos, sin dejarlos de la mano, sin dejarlos de la mente, para que disfruten de lo que les pertenece, de la dureza y la alegría que hay en la búsqueda que lleva al encuentro con la solución. Pero en este caso, como el maestro no se sabía la lección no hubo contingencia de que la solución naciera antes de tiempo.

Fue casualmente, o no tanto, el propio Antonio, al que se le había planteado el problema real del precio de las naranjas, el que descubrió primero la manera de hacer la cuenta, gracias también a pequeñas aportaciones, ideas, sugerencias, pequeños descubrimientos de otros miembros del grupo y del maestro como uno más en este día y en este caso:

- **Mª CARMEN:** ¿Por qué no cuadrará la cuenta?

- **LUIS:** Si pensamos dónde está el cien por cien, nos tiene que salir.

- **FINA:** El 100% debe estar en las naranjas, en su importe.

- **MIGUEL:** ¿Metiendo o sin meter el I.V.A.?

- **FELIPE:** Sin meterlo, piensa que este impuesto es algo añadido, como un pegado postizo al valor de las naranjas, aunque de gran importancia para las cuentas que gestiona la Administración.

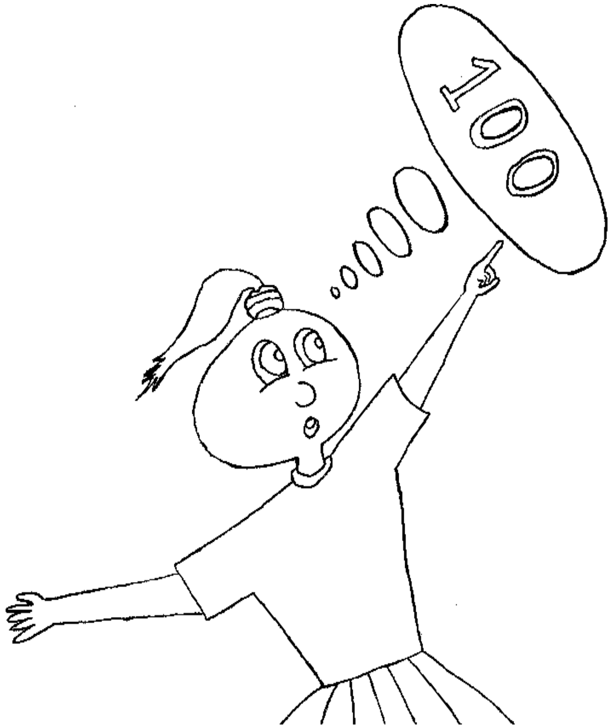
- **TOÑI:** Sin embargo al considerar las 208.000 ptas., que incluyen ya el I.V.A., como 100 partes, y descontar el I.V.A. sobre éstas, sin darnos cuenta hemos quitado I.V.A. al propio I.V.A., por eso no nos puede cuadrar.

- **EL MAESTRO:** Por otro lado, una cosa son las pesetas y otra son las partes sobre cien, son como dos enfoques sobre el valor de las naranjas.

- **ANTONIO:** Ya está, vuestras ideas han aclarado la mía, ahora lo veo muy claro. Las naranjas valen en tanto por ciento sobre 100 partes, todo lo que valen, es decir 100 partes de dinero, podemos pensar en 100 monederos iguales con 100 montoncitos de dinero. El I.V.A. es un impuesto que añade 4 partes, 4 monederos más a su valor. Por tanto las naranjas toman un valor total de 104 partes, de 104 monederos. En pesetas ese valor es de 208.000 ptas. Para calcular el valor de las naranjas sin I.V.A., que es de 100 partes, tenemos que encontrar primero lo que vale una parte en pesetas. Como corresponden 208.000 ptas. a 104 partes, basta con repartir las pesetas entre las partes, hallando una parte vale 2.000 ptas. Luego, 2.000 ptas. por 100 partes, igual a 200.000 ptas., que importa el camión de naranjas sin I.V.A. Por otra parte 2.000 ptas. por 4 partes, igual a 8.000 ptas. En total 208.000 ptas. ¡Estupendo, todo cuadra!

- **EL MAESTRO:** Hoy estoy un poco triste porque no me he sabido la lección, pero muy contento porque hemos formado un buen equipo para investigar, para descubrir, para aprender juntos de porcentajes, de números y también de colaboración.

LA MENTE SE PONE A CIEN (SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)



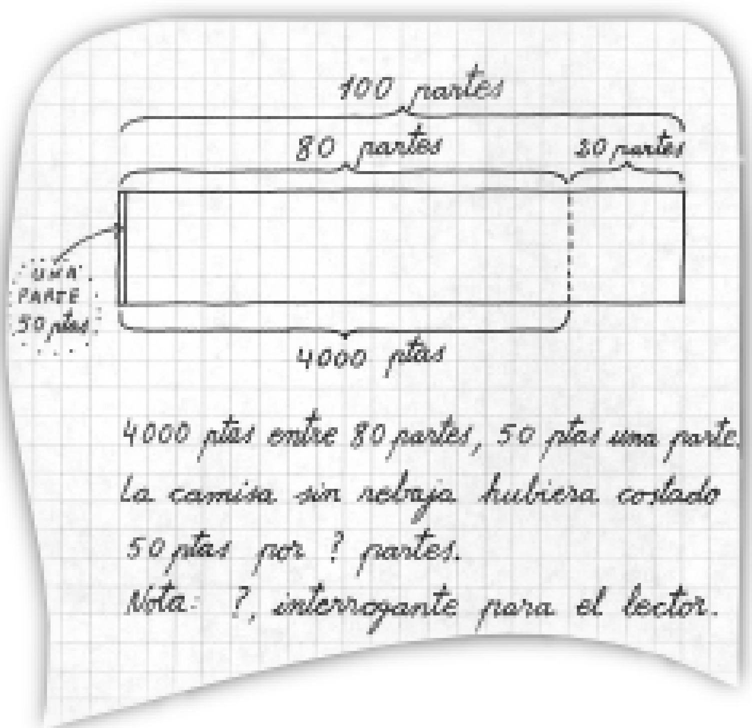
De cero a cien, en un minuto, al contar; de uno por uno a diez veces diez, al repasar las tablas de multiplicar; cuando pensamos «el todo» troceado en cien partes, para situar porcentajes en la vida; cuando cortamos los dígitos de dos en dos en una raíz cuadrada, para no pasar de 99 a la hora de encontrar un número, que al multiplicarlo por sí mismo, potenciándolo por dos, nos dé la pareja acotada; cuando de pequeños estamos aprendiendo a contar y el cien es grande, grande, está lejos, lejos..., en el infinito; cuando marcamos el paso de la Historia en siglos... ;nuestra mente piensa en cien, se sitúa segura sobre cien, se pone a cien.

- EL MAESTRO: En la sesión del porcentaje aprendimos una fórmula para calcular el tanto por ciento, ¿verdad? En la siguiente sesión, dicha fórmula, esa receta, resultó inútil, nos salió el tiro por la culata, y fue nuestro pensamiento libre de ataduras el que nos dio la solución, el importe del camión de naranjas sin el I.V.A., aunque eso sí, sudamos lo nuestro pero fue a cambio de pensar lo nuestro. Ahora que hemos vivido en nuestras mentes y en nuestras carnes el proceso que va de la dependencia de una fórmula fría y poco comprendida -en la sesión de «El porcentaje» -, a la liberación del pensamiento que se transforma en autónomo para descubrir la manera de afrontar situaciones problemáticas por ti mismo -en la sesión de «El maestro que no se sabía la lección»-, estamos mejor preparados para resolver casos de porcentajes.

Caso 1. En las rebajas.

- **PEPE:** La ropa está carísima. ¿Qué diréis que vale la camisa que llevo puesta? Me ha costado 4.000 pesetas y eso que estaba rebajada en un 20%. ¿Cuál será su precio sin rebaja?

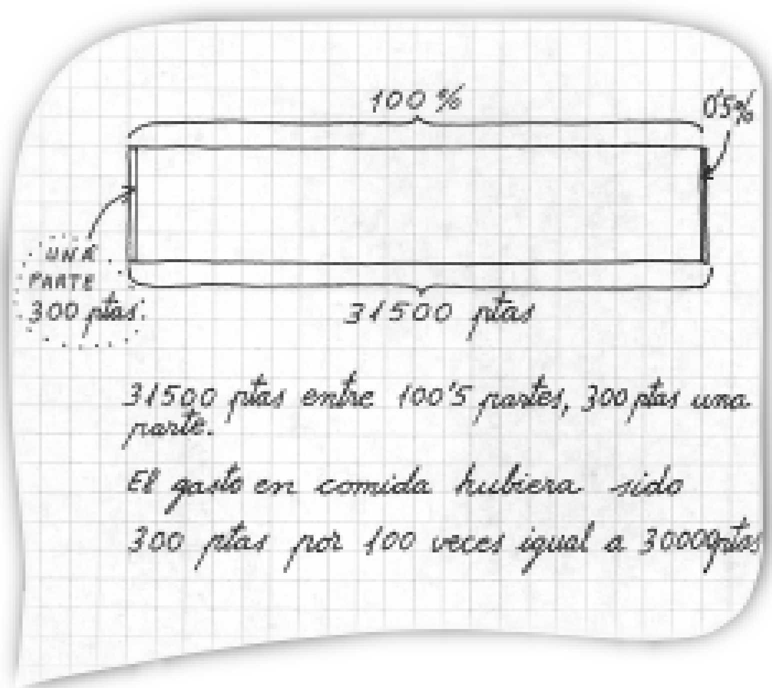
Unos minutos después Lucía lo explicó gráficamente:



Caso 2. En los gastos de la casa.

- **ANDRÉS:** En mi casa hemos gastado 31.500 pesetas en comida este mes. ¿Qué nos hubiéramos gastado si el I.P.C. (Índice de Precios al Consumo) no hubiera subido el 0´5%?

Un poco después, Rosa lo explicó sobre la pizarra:



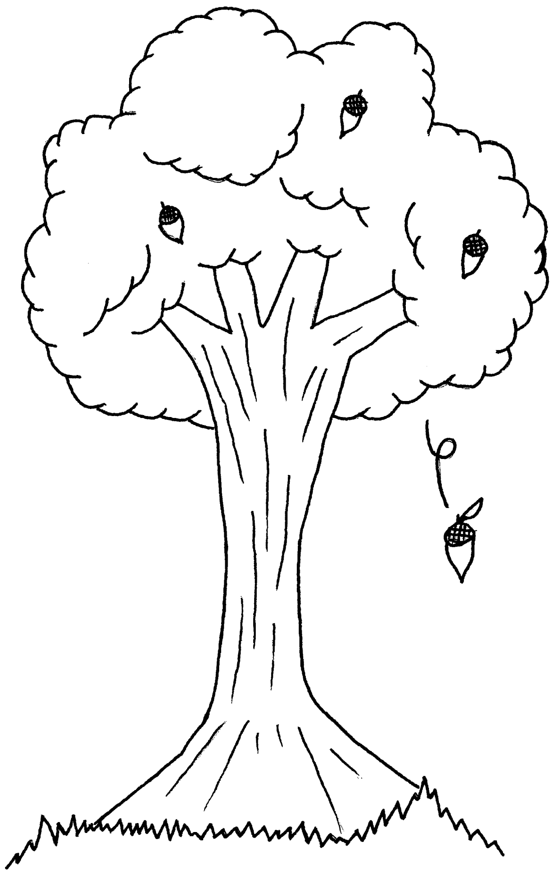
Caso 3. En la agricultura.

- **CARMEN** (que ya nos había llevado a su huerto para enseñarnos su nuevo sistema de riego por goteo): Como visteis el otro día, tengo un depósito abonadora de 500 litros en el cabezal de riego, que se vacía a un ritmo de 200 litros / hora, cuando la bomba inyector de abono está programada al 100% de su rendimiento en bombeo. ¿A qué porcentaje tendré que programarla para que tarde 10 horas en vaciarse la abonadora?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Este caso encierra un problema que es de tanto por ciento y de proporcionalidad. Eso que en principio es una dificultad, tiene la ventaja de ofrecer a la mente un plato combinado de pensamiento, que le exige un esfuerzo mental más intenso por no ser una de esas actividades repetitivas típicas para reforzar mecánicamente la explicación de un determinado tema. Y no es imprescindible haber estudiado previamente el tema de la proporcionalidad, para afrontar su resolución, puesto que la mente tiene recursos propios para masticar este combinado.

Efectivamente, reflexionando individualmente y en grupo, en poco tiempo fuimos capaces de resolver la programación de la abonadora de Carmen, tenía que hacerlo al 25%. Continuamos hasta el final de la sesión proponiendo y resolviendo más casos tomados de nuestra realidad, oscilando alrededor del cien, con el acelerador de nuestra mente.

NUESTRA EMPRESA PARTICULAR CON BENEFICIO ECOLÓGICO (SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)



- **EL MAESTRO:** ¿Qué empresa nos montamos hoy?
- **EL GRUPO:**
    - Una con beneficio económico.
    - Una que nos dé grandes beneficios.
    - Una que nos interese.

- Una en la que no nos crezcan los enanos.
- Una en la que si vamos al mar no se seque.
- Una que nos dé más dinero que trabajo.
- Una cuya producción tenga salida en el mercado.
- Una que nos guste.
- Una cuya producción sea necesaria y útil también para los demás.
- Una que sea beneficiosa para el mundo.
- Una con beneficio ecológico.

Las últimas respuestas y de forma punzante la ecológica, hicieron cosquillas en nuestras conciencias. Nuestro sueño o en el mejor de los casos, posible proyecto, entró en nuestro pensamiento y jugamos en esa sesión a ser socios de un vivero de plantas autóctonas, de encinas concretamente. Siete componentes del grupo se animaron como socios fundadores. Se hicieron unas tiras de papel. Cada tira suponía un compromiso de trabajo de una hora semanal en el vivero. Por otra parte se recortaron otras tiras de semana de almanaque. Cada socio tenía la posibilidad de elegir entre una y diez tiras de papel de cada clase.

El siguiente cuadro refleja la distribución de las acciones de trabajo y de tiempo en nuestra empresa, aunque ficticia, la empresa ENCINASO:

Socios.	**Nœmero de horas de trabajo semanal, a las que se compromete cada socio.**	**Nœmero de semanas, a las que se compromete a trabajar cada socio.**
Luis	1	10
Andr•s	10	1
Juana	5	5
Carmen	1	1
Paca	3	7
Pepa	10	10
Fernando	5	10

- **EL MAESTRO:** Supongamos que podemos controlar en este instante la máquina del tiempo y que le damos un avance de diez semanas.

- **PEPE:** ¡Mira que preciosidad de vivero!

- **CARMEN:** ¡Hemos conseguido sacar adelante 434 encinas!

- **PACA:** ¡Ese sí que es un buen beneficio, y además ecológico!

- **FERNANDO:** ¿Cuántas encinas habrán salido adelante gracias a la colaboración de cada socio?

En el tira y afloja de los razonamientos nos dimos cuenta enseguida de que no era justo asociar las encinas a cada socio teniendo sólo en cuenta el número de horas de trabajo semanal, ni el número de semanas, sino la combinación de multiplicar ambas variables.

- **EL MAESTRO:** Atención, Carmen tiene dos tiras de papel, una corresponde a una hora de trabajo semanal y la otra a una semana. Te sugiero que las mezcles en el vientre de tu mano.

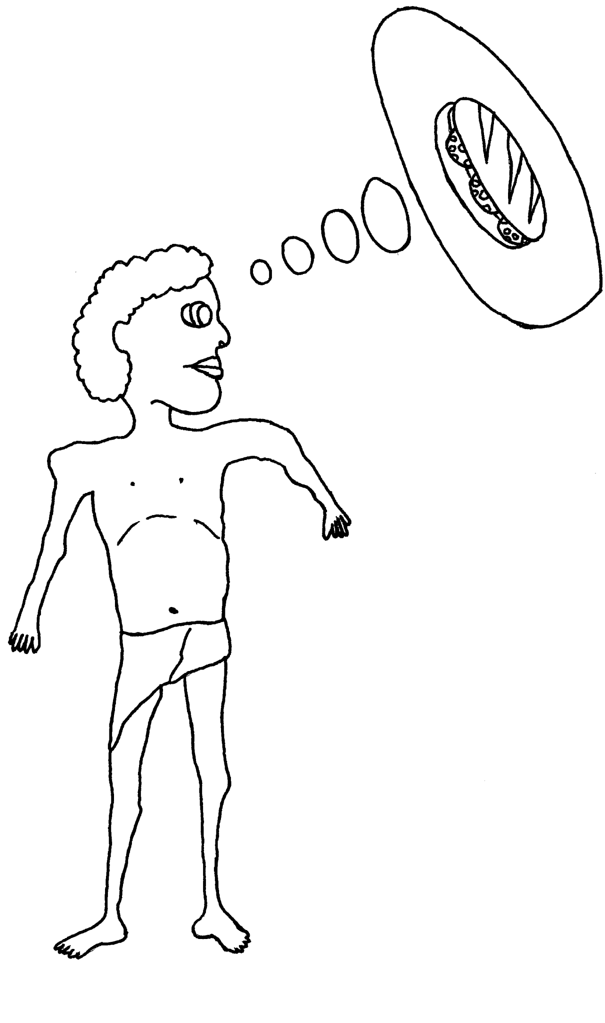
EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esa es una buena manera de empezar a digerir un concepto matemático, en este caso el concepto de unidad de reparto proporcional, que Carmen ha materializado en su mano en forma de una sola bola de papel, cual bolo alimenticio para el intelecto, que integra una hora de trabajo en una semana.

Este es el cuadro completo, que incluye el reparto de encinas:

Socios	Nœmero de horas trabajo semanal	Nœmero de Semanas	Partes	Nœmero encinas, sobre un total de 434
Luis	1	10	10	20
Andr•s	10	1	10	20
Juana	5	5	25	50
Carmen	1	1	1	2
Paca	3	7	21	42
Pepe	10	10	100	200
Fernando	5	10	50	100
		TOTAL	217 partes	434 encinas

- **EL MAESTRO:** Si esta clase anima a emprender pequeñas empresas con grandes objetivos como el de contribuir a que el planeta azul se tiña cada vez más de verde en beneficio de nuestros pulmones, habrá merecido la pena.

LAS MATEMÁTICAS EN ÁFRICA (SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)



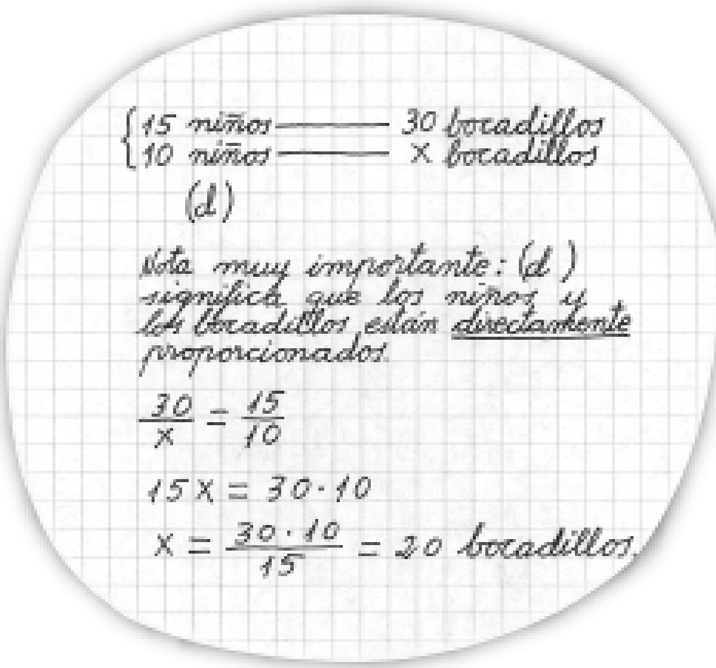
El siguiente texto pretende invitar a la reflexión y la acción.

TEXTO:

Se dice que las Matemáticas son una ciencia exacta, que nunca falla, que siempre cuadra, que es muy precisa. Veamos un ejemplo en el que la cosa no está tan clara, y la única duda es si no cuadran las Matemáticas o si no hay justicia social.

El ejemplo: Un grupo de 15 niños europeos de familias a las que no les falta el pan, dispone de 30 bocadillos para pasar un día de excursión. ¿De cuántos bocadillos dispondrá un grupo de 10 niños africanos pobres para pasar un día también si las necesidades nutritivas en buena lógica son las mismas?

A) Si afrontas la situación desde la lógica matemática, basta con hacer una regla de tres directamente proporcionada, o cualquier otro razonamiento personal.



Solución matemática: 20 bocadillos. Pero desgraciadamente no están los bocadillos.

B) Si afrontas esta misma situación desde la dura e injusta realidad de los países pobres, de los niños africanos que no tienen apenas nada para echarse a la boca, una de dos, o sobra la regla de tres, o tendremos que darle la vuelta considerando más bien inversa que directa la relación entre bocas y bacadillos, tendremos que inventar las matemáticas del revés.

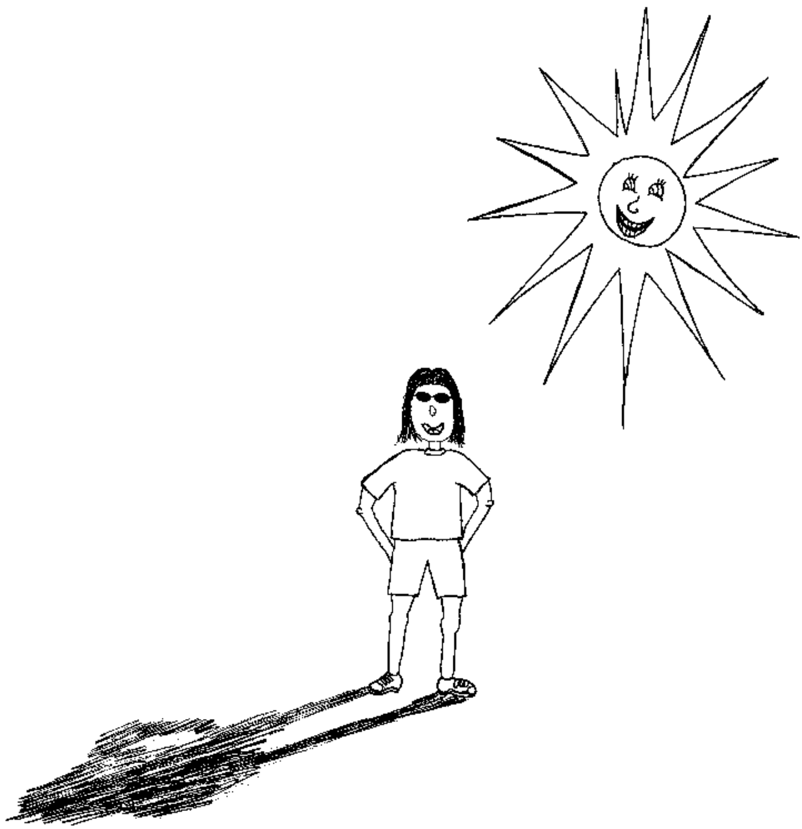
Solución deshumanizada: 10 niños pobres pasando hambre.

Si las matemáticas no fallan, ¿qué es lo que falla?

¿Qué pueden hacer las Administraciones de justicia social?

¿Qué podemos hacer nosotros?

NOS VAMOS A TOMAR EL SOL (SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)



- **ALGUNOS:**

  - ¡Hace una tarde preciosa de sol!
  - ¡Daban ganas de quedarse ahí fuera!
  - ¡Qué sol más agradable!
  - ¡Dan ganas de salirse a disfrutar del sol!

- **EL MAESTRO:** Si el cuerpo nos lo pide, no hay ningún inconveniente para que nos vayamos a tomar el sol.

- **PEPE:** ¿Y cuándo damos la clase de Matemáticas?

- **EL MAESTRO:** ¡Ahora, en la calle y al sol! Como los números están en todas partes, seguro que el sol también nos ofrece algunos, que no podríamos encontrar si nos quedáramos aquí en el aula, a la sombra.

Decidimos salir a la calle, al paisaje de sol y sombras.

- **PEPE:** Pues como no midamos sombras, no sé que números habrá por aquí.

- **EL MAESTRO:** Buena idea, podemos buscar la relación entre nuestras estaturas y las de nuestras sombras.

Por parejas, y con metro en mano, se procedió a medir la estatura y la sombra de cada uno y de cada una. Al compararlas repartiendo la altura de la sombra de cada cual con su estatura, nos sorprendimos porque las cuentas de todos daban el mismo resultado, «uno coma cuatro», 1´4 veces que la sombra era más alargada que la estatura.

- **JUANA:** Claro, es lógico porque la persona que es más alta tiene la sombra más estirada que si es baja. La sombra es directamente proporcional a la estatura.

- **LUIS:** La sombra del ciprés es alargada.

- **CARMEN:** No importa el alargamiento de la sombra, lo importante es tener «buena sombra».

- **ANTONIO:** Quien a buen árbol se arrima buena sombra le cobija.

- **PEPA:** Siguiendo el hilo lógico de Juana podemos saber la altura de ese edificio que tenemos enfrente, sin necesidad de medirlo.

- **PERICO:** ¿Mágicamente?

- **CARLOS:** No, midiendo la sombra del edificio con la cinta métrica.

- **PERICO:** Eso no tiene gracia.

- **PACA:** Pero tiene sombra.

Medimos la sombra del edificio e inmediatamente la de Pepa. La sombra de Pepa era en ese instante 1´5 veces más alargada que su estatura. La sombra del edificio medía 19´5 metros. Con una cuenta lógica, de las que vienen a cuento, supimos la altura del edificio sin que nadie nos la dijera y sin tener que subirnos a la terraza para ir dejando caer la cinta o un hilo a plomo hasta que tocara el suelo.

Aquella tarde de sol y sombras descubrimos que la altura de un edificio se puede saber «mágicamente» sin medirla. El «truco» consistió sencillamente en encontrar un nexo de relación, una constante, el número de veces que en cada instante de la tarde, cada sombra contiene a cada cosa que le da el sol.

Casi sin proponérnoslo empezamos a descubrir la proporcionalidad en el paisaje de las formas geométricas dibujadas en las sombras de las cosas, gracias a que nos dimos un paseo bajo el sol.

LA ESCALA O LA LÁMPARA DE ALADINO (SATÉLITE DE LA PROPORCIONALIDAD)

Aquel día tocaba estudiar la escala. El maestro repartió un mapa de la Región de Murcia a cada uno de los pequeños grupos de trabajo.

- **PEPA** (observadora)**:** ¿Qué significa la anotación ESCALA 1:200000,a pie de página?

- **JUANA** (con cara de pena)**:** No me acuerdo muy bien si 1 centímetro es 200.000 metros, o 1 centímetro es 1 metro, esto creo que es, o... ¡vaya, tan bien que me lo sabía!, ¡y el 10 que me saqué en el examen!

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Por desgracia, muchas veces no tiene casi nada que ver la nota de un examen con la sabiduría sobre un determinado tema matemático, sobre todo cuando el examen está contaminado de memorismo.

- **PERICO:** Es una opinión personal, pero pienso que el tiempo que se pierde haciendo tantos exámenes cargados de tanto contenido de memorismo, se debería ganar en despertar el interés y el cariño hacia los números, en hacer del aprendizaje de las matemáticas una fiesta y una aventura.

- **ANTONIO** (equivocado)**:** Yo también creo que 1 centímetro equivale a un metro.

- **ANDRÉS** (confiado en lo que decía Antonio)**:** Eso, eso creo yo también que es.

- **LUCÍA** (reflexiva)**:** No sé, no sé, yo lo dudo en cantidad.

- **JAVIER** (dudoso)**:** No sé si indica que el mapa es 200.000 veces más pequeño que la Región de Murcia -menos mal que Javier estaba equivocado porque si no la Región sería 200.000 veces más pequeña de lo que es, y la única manera de empaquetarse la gente en ella sería formando una torre humana.

- **EL MAESTRO** (convencido de que había acertado con este método de trabajo)**:** Os felicito, es una forma interesante de afrontar el tema. Estas actitudes de duda, de reflexión, de tomar conciencia de las dificultades, favorecen la investigación. Nos podemos hacer una pregunta tonta para empezar: ¿Se podría dibujar la Región de Murcia en un papel a tamaño real?

- **CARLOS:** No, porque no hay papeles tan grandes.

- **MARIANA:** Se puede dibujar con la misma forma pero reduciendo las medidas, acortando las distancias.

- **EL MAESTRO:** Acortar las distancias, tú lo has dicho, es la única posibilidad de meter la Región de Murcia en un papel.

- **PEPE:** Eso me recuerda el genio de la lámpara de Aladino.

- **EL MAESTRO:** Genial, es la mejor comparación con la escala que he oído en mi vida. Debemos tenerla muy en cuenta para entender la esencia de dibujar a escala. Una vez que tenemos esto bien claro sólo falta descubrir algo muy concreto, el significado de la expresión ESCALA 1:200000 en este mapa. ¿Qué podemos hacer?

- **LUCÍA:** No sé lo que pintarán los dos puntos de dividir, que separan ambos números, pero si los quitamos nos queda el 1 y el 200.000.

- **JAVIER:** ¿Guardará el 1 con el 200.000 la misma relación que este mapa con la Región de Murcia?

- **EL MAESTRO:** ¿Lo podríamos comprobar con datos?

No resultó difícil. Hicimos un cálculo aproximado de la superficie del mapa y buscamos la extensión real de la Región en la enciclopedia, comprobamos las veces *que la realidad contenía a la representación en el papel, mediante una simple división, dándonos cuenta que era unos 40.000 millones de veces más grande y no 200.000 veces como habíamos supuesto. A todo esto Javier se reía a carcajadas pensando que si la Región fuera sólo 200.000 veces más extensa que el mapa que teníamos delante de nuestras narices, sería en realidad como la extensión de unos grandes almacenes, y los murcianos, proporcionalmente empequeñecidos, estaríamos en el país de Liliput.*

- **PEPA:** Si no se cumple la relación una a doscientas mil veces (1:200000), comparando las superficies, los tamaños, propongo que comparemos las longitudes, las distancias, para ver si se cumple en éstas.

- **ANTONIO:** Para comparar necesitamos dos datos, dos medidas, una del papel y otra de la realidad. La del mapa es fácil, lo tenemos en la mano, pero la del terreno...

- **CARMEN:** La del terreno la podemos saber recordando la distancia entre dos pueblos. De Mula a Pliego por ejemplo hay 6 kilómetros más o menos.

- **ANTONIO:** Yo mido la distancia de Mula a Pliego en el mapa. Aquí la tengo, 2´5 centímetros aproximadamente.

- **JUANA:** Pero la carretera no es recta como la regla. Las curvas alargan la distancia. Pienso que para hacerlo bien debemos colocar un hilo siguiendo la línea de la carretera con sus curvas, y estirarlo después para medirlo.

- **ANTONIO:** Llevas toda la razón. Lo haremos así. Ahora mide 3 centímetros.

- **PEPA:** Yo haré la división. Primero traduzco los 6 kilómetros a centímetros, 6 kilómetros por 1.000 metros igual a 6.000 metros, y 6.000 metros por 100 centímetros igual a 600.000 centímetros. Ahora es cuando puedo comparar haciendo un reparto de los centímetros de carretera entre los centímetros del trazo que une Mula con Pliego en el mapa. Los 600.000 centímetros troceados de 3 en 3 igual a 200.000 trozos, 200.000 veces. ¡Eureka, el número de pie de página del mapa! La distancia real de Mula a Pliego es 200.000 veces más larga que la distancia dibujada en el papel, o bien ésta es 200.000 veces más corta que la real. Este último podría ser el sentido de la expresión 1:200000, una distancia real dividida entre 200.000 para encogerla ese número de veces.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El ¡Eureka! de Pepa es el fruto del esfuerzo colectivo de toda la clase, de la energía del equipo, gracias al ambiente oxigenado por una actitud de búsqueda en las esencias del saber matemático.

- **EL MAESTRO:** Cuando se descubre y se aprende así el concepto de escala, no son tan necesarias las reglas de tres, ni otras por el estilo, para calcular las medidas de la realidad o del papel. Nuestra mente nos dice si hay que multiplicar o dividir por el número de veces anotado en la escala. Propongo en este punto que analicemos el lío de centímetros, metros y kilómetros, que rondaba en nuestra mente olvidadiza al intentar acordarse desesperadamente de las fórmulas menos o más impuestas respecto a la escala, como jugando a los psicólogos. Propongo, digo, un análisis de nuestros recuerdos.

- JUANA: Creo recordar que en cierta ocasión, en el tema de la escala, leí un ejemplo de escala 1:100, donde explicaba que 1 centímetro en el papel equivalía a un metro en la realidad. ¡Ahora lo veo muy claro! Efectivamente, 1 metro es lo mismo que 100 centímetros, por eso en la escala 1:100, 1 centímetro en el papel equivale a 100 centímetros en la realidad, se estira 100 veces. Mi fallo fue quedarme más con el ejemplo que con la esencia.

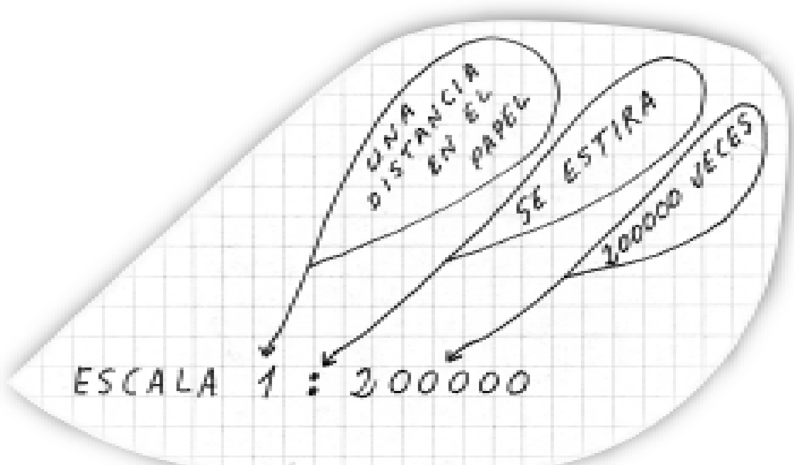
- PACO: Posiblemente los enlaces entre neuronas, de los que hemos hablado algunas veces, estén casi sueltos cuando intentamos recordar algún ejemplo suelto, provocando confusiones. Sin embargo cuando las neuronas se conectan con el «pegamento» del razonamiento, de la comprensión de un concepto y del esfuerzo mental, todo está más claro.

- EL MAESTRO: Sin ser psicólogos hemos intuido que lo más importante en un tema no son los ejemplos sueltos, que también pueden servir, sino la raíz de su significado, su sentido primero sin desnaturalizar, su esencia desnuda.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La escala es en esencia como el genio de la lámpara de Aladino, la escala tiene elasticidad.

- EL MAESTRO: La escala es en esencia como un elástico imaginario que estira para transformar una distancia en el papel a una distancia en la realidad, y encoge en el caso contrario. Siguiendo el elástico de esta comparación, ¿cómo podríamos interpretar la escala 1: 200000 de este mapa?

Después de analizar la expresión en grupo, se interpretó de la siguiente manera:



A continuación, el maestro propuso dos ejercicios para recalcar el concepto de escala:

- Ejercicio 1: El plano del tablero de tu mesa.

- Ejercicio 2: El cochecito de juguete de la tómbola.

Ejercicio 1.

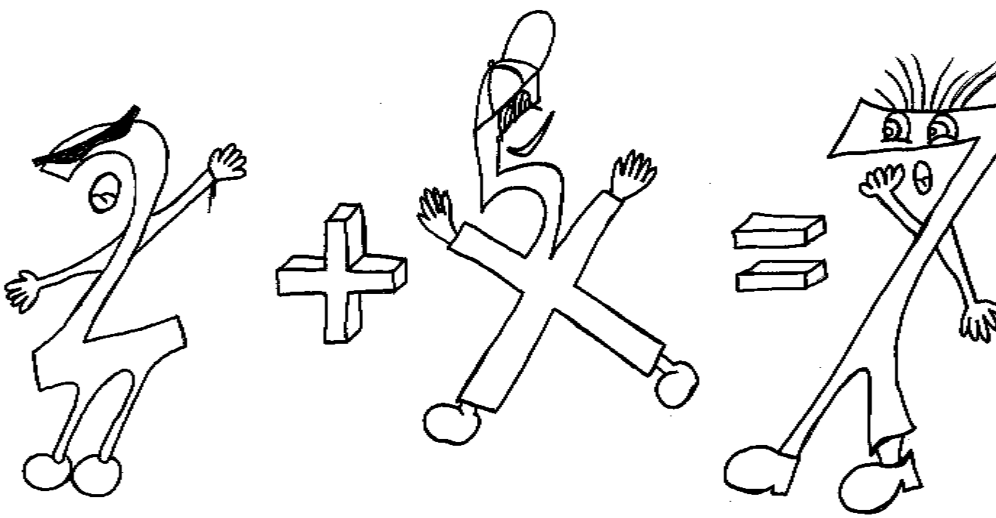
- **EL MAESTRO:** Si le encargamos a un carpintero un tablero igual que el de la mesa rectangular individual que tenemos delante, en una hoja de papel cuatro veces más pequeña que éste, le podríamos pedir que hiciera un tablero con la misma forma, sólo que cuatro veces más grande. Así no falla. Pero también podríamos expresar la relación entre el tablero que pedimos y su representación en el recorte de papel, a escala. ¿Qué escala deberemos anotar sobre el papel para que sepa el carpintero lo que tiene que hacer?

Nota: Ojo con la solución porque si nos equivocamos es posible que el carpintero nos traiga un tablero que apenas entre por la puerta.

Ejercicio 2.

- **EL MAESTRO:** Recuerdo que hace unos diez o doce años vi un juguete en una de las tómbolas de las Fiestas del Niño, en Mula. Era un cochecito del tamaño de un puño aproximadamente. Me fijé por curiosidad en un letrero incrustado en le plástico, ESC. 1:40. Continué dando vueltas en la feria, en los coches eléctricos, al mismo tiempo que me acordaba del pequeño letrero del coche de juguete, y pensé: ¡no puede ser!, ¡esa escala está equivocada! Seguí dando vueltas y más vueltas en la feria, en los carruseles, en la noria, y el cochecito y su letrero daban vueltas en mi mente hasta que caí en la cuenta: ¡sí puede ser!, ¡la escala está bien! ¿Qué explicación tendrán estos dos pensamientos opuestos?

EL BAILE DE LOS NÚMEROS CON LAS LETRAS (PLANETA DEL ÁLGEBRA)



TEXTO PARA LA INTRODUCCIÓN DEL TEMA:

«En la sociedad de los números con apellidos de cosas reales o ficticias, se establecen relaciones de sumar, de restar, de multiplicar, de dividir, de potencias, de raíces, de igualdades..., que son el reflejo de las relaciones de añadir, quitar, repetir, repartir, e igualar, que se dan en el entorno socionatural, en los proyectos, en la realidad, en la imaginación y hasta en los sueños de las gentes.

Los sabios de los números, con una madurez matemática paralela a la evolución de la humanidad, acostumbrados a relacionar, a bailar números por parejas y en grupo, y un poco hartos de los mismos bailes, inventaron uno nuevo en el que participaban personajes desnudos en forma de número y otros vestidos de letra, como queriendo hermanar las ciencias con las letras, ¡qué bien!

Al principio se introdujo una sola letra y el juego matemático consistía en desnudarla para descubrir el número que llevaba dentro, era el primer brote de una nueva rama matemática. Después se fueron introduciendo dos, tres y más letras, haciendo crecer poco a poco una rama grande y frondosa del árbol matemático, a la que los árabes le pusieron el nombre de Álgebra, que transforma la savia bruta de los números y las letras en savia elaborada de soluciones, gracias a una especie de fotosíntesis iluminada por la energía mental, capaz de bailar números y letras al ritmo del balanceo equilibrado de las ecuaciones».

- **EL MAESTRO:** Para aprender Álgebra tendremos que redescubrirla y vivirla entrando en sus entrañas.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La mente tiene que estar predispuesta a romper un poco con los bailes de los números concretos y volar en la abstracción para imaginar números escondidos en las letras y descubrirlos.

- **EL MAESTRO:** Algunas reflexiones y experiencias nos van a servir para aterrizar y despegar en el Álgebra.

LAS ECUACIONES DE LA VIDA. REFLEXIONES PREVIAS SOBRE EL EQUILIBRIO EN LA EBULLICIÓN DE LA VIDA Y EN LA SALSA DE LOS NÚMEROS.

El equilibrio y el desequilibrio son una especie de gases que forman la atmósfera de la vida en su mezcla de agitación y calma, sobresaltos y tranquilidad, alteraciones, revoluciones y normalidad, azar, accidentes, suerte, caos y orden, espontaneidad y programación, caídas, recaídas y recuperaciones, involución y evolución, tareas pendientes, trabajo y descanso, lo que se gana y lo que se pierde, lo que se gana y lo que se gasta, desequilibrios entre países desarrollados y Tercer Mundo, entre ricos y pobres, deshumanización y justicia social, dictaduras y democracias... Están presentes en las Ciencias y en las Letras, en la Física y Química, en las Naturales y en las Sociales, en lo material y en las ideas, en la ebullición de la vida y de la humanidad.

La tensión equilibrio-desequilibrio pasa por nuestras narices cuando entra polución o aire oxigenado, por nuestros ojos al observar el entorno que nos rodea o a través de imágenes filtradas por los medios de comunicación, por nuestras orejas al captar ruidos que te roen el cerebro o sonidos agradables que nos alegran la vida, entra por todos los sentidos.

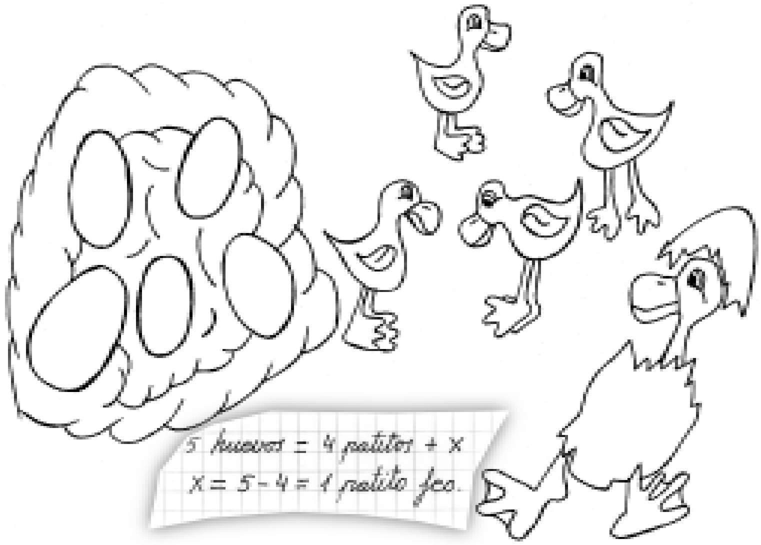
El equilibrio y el desequilibrio pasa por nuestras carnes y nuestras mentes como una corriente en forma de ritmos y arritmias, placer y dolor, alegrías y tristezas, crisis y equilibrios emocionales, enfermedad y salud, cuando nos mantenemos de pie, al andar, al montar en bicicleta, al tomar energía en las comidas y gastarla en el trabajo, el ocio y el tiempo libre; en las funciones de nutrición, reproducción y relación...

Si estas relaciones se dan en las cosas de la vida, que son como los apellidos de los números, como el alma de los números, es lógico pensar que también se dan entre ellos. Efectivamente es así y podemos establecer relaciones de igualdad, de balanceo en la salsa de los números, que guardan el equilibrio bajo la forma de las ecuaciones.

EXPERIENCIA 1: LA ECUACIÓN DEL PATITO FEO.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El Álgebra no es sólo una cosa de mayores, de estudiantes y de sabios, sino que nace en la mente de los niños.

- **EL MAESTRO:** Hoy os propongo como deberes que contéis el cuento del Patito feo a un párvulo, mostrándole uno de esos cuentos gráficos donde vea en una página el nido con los huevos, y en otra los patitos menos el feo. Debéis observar lo que piensa cuando compara el número de huevos que ha calentado mamá pata, con los patitos que nacen, sin contar el feo. Normalmente os llevaréis la sorpresa de que el párvulo hace una ecuación de huevos, comparando éstos con los patitos recién nacidos, descubriendo que falta uno. Es posible que se sienta aliviado al volver la hoja y descubrir al feo. Hasta puede decir: ¡aquí está el que faltaba!



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El pensamiento del niño opera ecuaciones sencillas sin necesidad de lápiz y papel.

<u>EXPERIENCIA 2: ECUACIONES ENTRE MANOS.</u>

- **EL MAESTRO:** Os propongo hacer un juego individual consistente en repartir al azar un puñado de pipas entre las dos manos. Aquí hay una bolsa de pipas que podemos repartir para todos, sin comerlas de momento, por favor.

- **LUCÍA:** Aquí tengo 14 pipas sobre la mesa. ¿Qué se hace ahora?

- **EL MAESTRO:** Separarlas al azar en dos puñados, sin contarlas, uno para cada mano.

- **LUCÍA:** Ya las tengo.

- **EL MAESTRO:** Ahora muestra tus manos, una abierta para que puedas contar las pipas que contiene, y la otra cerrada, con el otro puñado de pipas dentro.

- **LUCÍA:** En la mano abierta tengo 8 pipas.

- **EL MAESTRO:** ¿Y en la cerrada?

- **LUCÍA:** Tengo 6 pipas.

- **EL MAESTRO:** ¿Cómo has podido contar las que tienes en la mano cerrada si no las ves?

- **LUCÍA:** No las he contado pero sé que hay 6 pipas.

- **EL MAESTRO:** Entonces, ¿eres adivina? ¿Cómo sabes eso? ¿Te habrá pasado alguna ecuación por la cabeza?

- **LUCÍA:** No creo, porque jamás he estudiado ecuaciones, no sé ni lo que es eso.

- **EL MAESTRO:** Sin embargo tu cerebro acaba de hacer una ecuación.

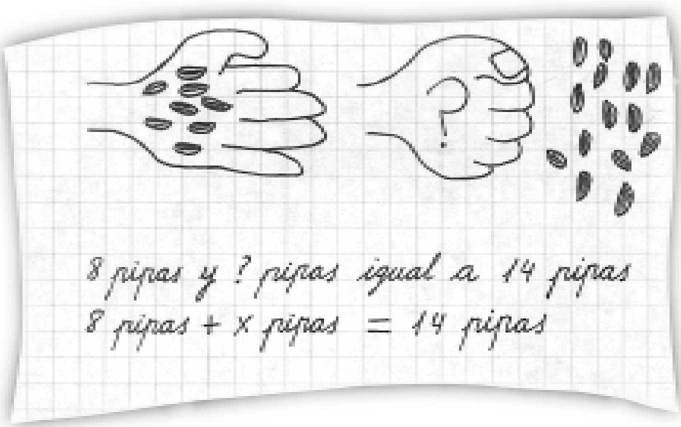
- **LUCÍA:** ¡Qué lista soy! Y yo sin saberlo.

- **EL MAESTRO:** ¿Nos puedes decir qué has pensado para decir lo de las 6 pipas?

- **LUCÍA:** Claro, eso sí lo sé. Si en el montón tenía 14 pipas y en la mano abierta tengo 8 pipas, sé que me faltan 6, ni más ni menos, porque no me he comido ninguna.

- **EL MAESTRO:** Ves, tu lógica te dice que el número de pipas del montón es igual al número de pipas repartidas en las manos, has establecido una igualdad muy lógica, tus neuronas han bailado las 8 pipas a la vista, las pipas escondidas, y las 14 pipas que recordaba en el montón del que han salido los dos puñados, construyendo un rompecabezas cuya última pieza en encajar ha sido 6 pipas. A la expresión matemática, traducción literal de tu pensamiento, en forma de números, signos y letra x, incógnita, vertebrados por el signo igual, se le llama ecuación, del latín aequare, que significa igualar.

El maestro hizo el esquema y la ecuación del pensamiento de Lucía en la pizarra:



- **EL MAESTRO:** El único valor de la x, sumes a 8 o restes a 14, es 6 pipas, es el único que encaja.

- **LUCÍA:** ¿Mi mente tenía dentro esa expresión tan rara?

- **EL MAESTRO:** Tu mente tenía dentro algo mucho más bonito, pensamiento humano, esta expresión matemática es una simple traducción, es una simple copia de tu reflexión.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Una ecuación o cualquier expresión matemática, por muy rimbombante, compleja o científica que sea, carecería de alma y de sentido, si no tuviera detrás un pensamiento.

EXPERIENCIA 3: ECUACIONES DE PAPEL.

- EL MAESTRO: ¿Qué os parece si recordamos o pensamos algún problema al que le podamos aplicar una igualdad mental para resolverlo?

- JUAN (representante de la Junta Económica del Centro)**:** Podría ser sobre el dinero que disponemos para este curso y la previsión de gastos.

Juan nos leyó la previsión de gastos de una forma muy sui géneris: «La mitad para material fungible, las tres octavas partes para actividades culturales y 100.000 pesetas para teléfono». El dato de los ingresos, coincidente con la previsión de gastos, se lo calló, para que intentáramos calcularlo nosotros.

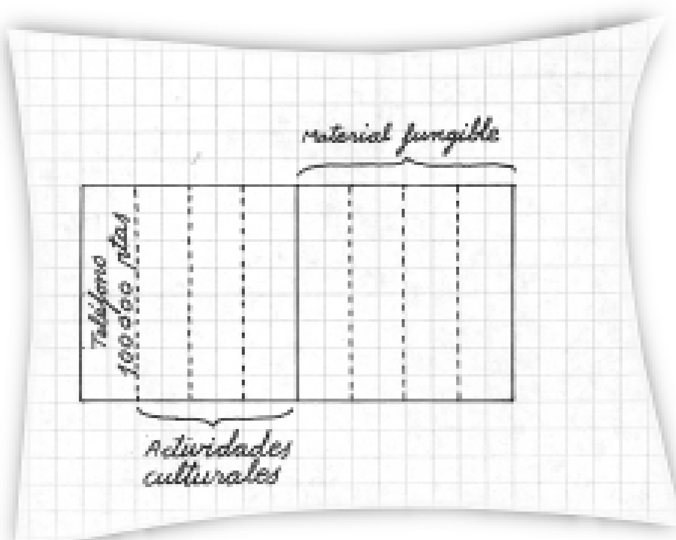
- CARMEN: El problema consiste en saber los ingresos, claro. Los datos que tenemos están expresados en fracciones y en pesetas, tenemos una madeja bien enredada para empezar.

- EL MAESTRO: Se trata de buscar la punta de la hebra y tirar.

- PEPE: A ver cómo podemos desliar 1/2, 3/8 y 100.000 pesetas.

- EL MAESTRO: Os propongo dejar el lápiz, y resolver el problema pensando y haciendo dobleces en una hoja de papel, que represente los ingresos y también la previsión de gastos. ¡Ánimo y a doblar papel!

Pasados unos pocos minutos, el que más y el que menos descubrió de forma sencilla y natural la solución entre dobleces de papel. Esta operación suele dar buenos resultados ya que hace de eslabón de enlace entre la situación real y la abstracción de las rayas de lápiz con forma de números.



EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Los estudiantes, demasiado acostumbrados a resolver problemas haciendo cuentas a base de lápiz y papel, suelen menospreciar otras formas como el cálculo mental para el tanteo, los dobleces de papel, los dibujos esquemáticos... A propósito, un sencillo dibujo es, muchas veces, una muy buena manera de empezar a solucionar un problema de matemáticas. Se podría decir que el dibujo es otra herramienta matemática más.

EXPERIENCIA 4: BALANCEAR UNA ECUACIÓN.

- **EL MAESTRO:** Aequare, igualar, esa es la clave, la esencia, el eje alrededor del que gira cada ecuación y gira el Álgebra. Una ecuación, aequare, es una herramienta de hacer cuentas muy útil, versátil, cómoda y adaptable a todas aquellas situaciones que podamos traducir bajo el signo de la igualdad, aunque eso sí, un poco complicada por abstracta. Ahora me viene a la cabeza la caja de herramientas de un mecánico, con llaves fijas y con una llave inglesa con cremallera para abrir o cerrar la boca a la medida de cada tuerca. Utilizar las llaves fijas es más sencillo que manejar la inglesa, ya que ésta tienes que regularla, pero su ventaja es que sirve para varias medidas de tuerca.

Utilizar una ecuación para resolver un problema supone un cierto nivel de abstracción en el pensamiento del que la plantea, y por tanto un cierto nivel de dificultad. En algunos libros de Matemáticas aparece con muy buen criterio la imagen de una balanza, símbolo de equilibrio, de igualdad, para introducir el estudio de las ecuaciones. Nosotros, apoyándonos en esta buena idea podemos hacer una experiencia «pesando una ecuación» con una balanza real, si queréis.

- **MARÍA:** ¿Cómo es posible pesar una ecuación? ¿Cómo se puede pesar algo abstracto?

- **EL MAESTRO:** Sencillamente, lo que podemos pesar es el contenido, lo concreto, los cuerpos físicos a los que se refiere la ecuación.

- **PEPE:** Bien, para hacer la experiencia tendremos que empezar buscándonos un problema, en el sentido matemático de la palabra.

- **FINA:** Si no os importa lo podemos endulzar un poco con unos caramelos de eucalipto, que son muy buenos para la garganta. Yo llevo una bolsa.

- **EL MAESTRO:** Aquí está la balanza y Fina tiene los caramelos. Fina, ¿quieres liar en una servilleta de papel un puñado de esos caramelos?

Fina lió x caramelos que sólo ella sabía, y los colocó sobre el platillo izquierdo. Añadimos por capricho otros 7 caramelos en el mismo platillo.

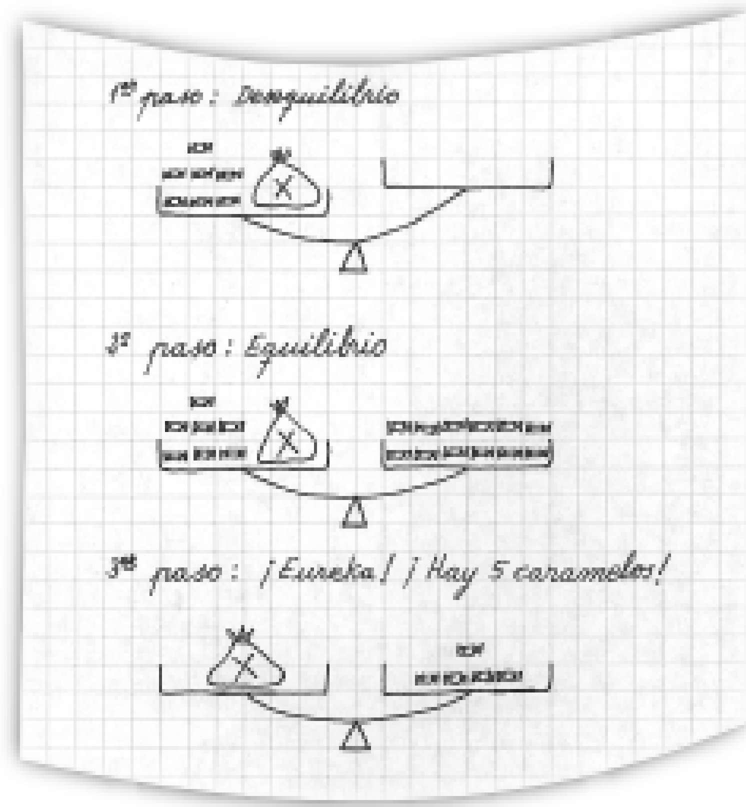
- **EL MAESTRO:** ¿Qué se puede hacer para saber el número de caramelos que están liados en la servilleta, aprovechando la balanza?

- **PACA:** Echar caramelos en el platillo derecho buscando el equilibrio.

- **EL MAESTRO:** Esa es una forma indirecta y disimulada de saber los caramelos que encierra la servilleta sin necesidad de desliarlos.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esa es una radiografía matemática para analizar el contenido de la servilleta.

Paca hizo los equilibrios en la balanza, y Pepe el siguiente esquema sobre la pizarra:



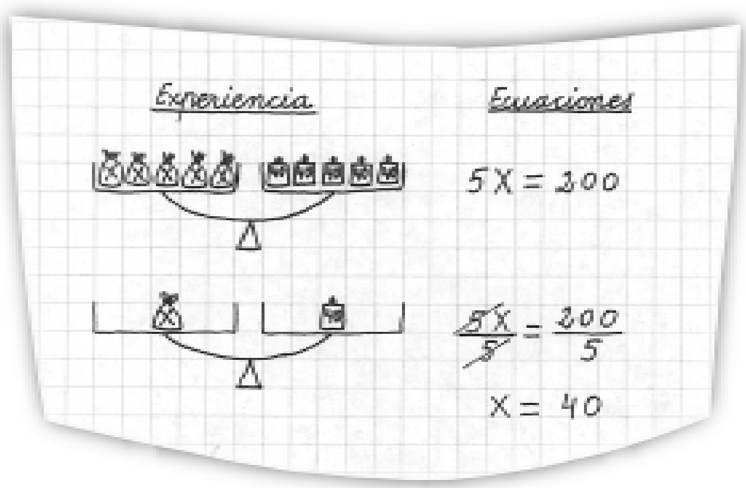
Solución lógica pasada por la balanza: 5 caramelos.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Esta es una experiencia que refuerza la comprensión de la mecánica de las ecuaciones, demostrando su sencillez al desnudo.

<u>EXPERIENCIA 5: PESAR CARAMELOS.</u>

Cuando hicimos la ecuación de los caramelos de eucalipto, una de las personas del grupo, Mª José, nos explicó muy entusiasmada que su abuela le había enseñado la manera de hacer caramelos caseros de azúcar tostada, como en los viejos tiempos, y que éstos eran muy buenos para aliviar la carraspera y la tos. Le pedimos a Mª José que nos trajera unas bolsitas de estos caramelos. Ella lo hizo con dulzura y nos trajo

5 bolsitas. Las pesamos en la balanza. Su peso era de 200 gramos. Establecimos un paralelismo entre los pasos de los pesos de la experiencia y su traducción a una ecuación, una especie de hermanamiento entre lo concreto y lo abstracto, tal como se aprecia en el siguiente esquema:



Solución: Cada bolsita de caramelos pesa 40 gramos.

Nota: Este problema tan sencillo, que se puede resolver con un simple reparto y mentalmente, lo hemos resuelto con ecuaciones para facilitar la comprensión de éstas.

<u>EXPERIENCIA 6: LA ECUACIÓN VIAJERA.</u>

En esta sesión empezamos recordando el viaje cultural a Murcia. Nos acordábamos de lo bien que lo habíamos pasado, de que fue el primer día de lluvia después de varios meses de sequía y de que costó 1.200 pesetas el menú. Lo que no recordábamos era el billete de autobús pero sí sabíamos que importaba la tercera parte del gasto total (comida y autobús).

- EL MAESTRO: Propongo que resolvamos este sencillo problema que casi no llega a serlo, mediante la herramienta de la ecuación.

- ANDRÉS: Lo primero que tenemos que hacer es fijar la incógnita. Al gasto total, que desconocemos, le llamaremos x.

- CARMEN: En segundo lugar tenemos que buscar una relación de equilibrio. Lo que está claro es que el gasto total es igual al gasto total.

- PEPE: ¿Habrás sudado para pensarlo?

- CARMEN: Una que tiene las ideas claras. El gasto total conjunto en buena lógica tiene que ser igual al gasto total repartido en comida más autobús:

$$\underbrace{\text{Gasto total}}_{x} = \underbrace{\text{Billete autobús y 1200 ptas}}_{\frac{x}{3} + 1200}$$

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: En esencia, resolver una ecuación consiste en quitarle todos los estorbos a la x, cuidando escrupulosamente de mantener el equilibrio en torno al signo igual.

- **EL MAESTRO:** En esta ecuación nos vamos a mover en el terreno abstracto, intentando dejar sola la x en un lado del signo igual. Empezaremos quitando lo que menos se nos pegue a la vista.

- **ANTONIO:** El número 3, que está abajo, es el menos gracioso.

- **EL MAESTRO:** Efectivamente, conviene hacer eso, pero sin olvidar lo del equilibrio, por tanto agrandaremos las dos expresiones que hay a ambos lados del signo igual por 3 veces. Este número que multiplica por 3 es justo el que necesitamos para eliminar el 3 de abajo, el que divide por 3. El número 3 de arriba se comporta de «comecocos» para el 3 de abajo.

$$3x = 3\left(\frac{x}{3} + 1200\right)$$

$$3x = \frac{3x}{3} + 3 \cdot 1200$$

$$3x = x + 3600$$

$$3x - x = 3600$$

$$2x = 3600$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{3600}{2}$$

$$x = 1800$$

Solución: 1.800 pesetas cuesta todo. 600 pesetas cuesta el autobús.

Comentario para la democracia matemática: Ni que decir tiene que este problema se puede resolver de varias maneras:

Una. Si el gasto de autobús supone la tercera parte, es porque la comida corresponde a las otras dos. Puesto que la comida, dos partes, vale 1.200 pesetas, entonces una parte es 600 pesetas, justo lo que cuesta el autobús.

Dos. Haciendo dobleces de papel.

Tres. Con la fuerza del cálculo mental.

Cuatro. Con el ingenio personal de cada cual...

PROBLEMA MATEMÁTICO O PROYECTO DE REPOBLACIÓN.

La clase comenzó con la lectura y comentario de un texto sobre la importancia de la repoblación para oxigenar los pulmones de la Tierra. En medio de aquel ambiente nos inventamos un problema que bien pudiera ser un proyecto interesante, un problema matemático y verde: «Se quiere repoblar una loma de mediana extensión con pinos, encinas y acebuches. Los pinos ocuparán la tercera parte, las encinas la cuarta parte y también se plantarán 50 acebuches. ¿Cuántos árboles se plantarán en total?».

- EL MAESTRO: ¿Qué queremos saber?

- JUANA: Todos los árboles que plantaremos.

- EL MAESTRO: Muy bien. Ese es el dato que se desconoce, es el interrogante, es la incógnita, es lo que podemos llamar letra x.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Ahora procede traducir el lenguaje escrito del enunciado del problema a lenguaje matemático. Y en el reino de los números y los signos matemáticos sólo se permite la entrada de alguna letra como la x.

- EL MAESTRO: ¿Cómo se puede encajar una ecuación en la distribución de este bosquecillo?

- ANTONIO: Todos los árboles que plantemos en la loma serán igual a los pinos más las encinas más los acebuches, lógico. Como hemos convenido que todos sea x, los pinos serán la tercera parte de x, x/3, y las encinas la cuarta parte, x/4. Por tanto la expresión en lenguaje matemático es la siguiente:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 50$$

- EL MAESTRO: Ya está hecho lo más difícil para el razonamiento y lo más interesante bajo el punto de vista lógico-matemático.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: Lo difícil y lo creativo, el reto es poner en marcha las cosas. Y plantear una ecuación es poner el germen del proceso que lleva a la solución. Ya está la ecuación, ahora toca hacer unas cuentas, guardando el equilibrio de los números simplemente, para encontrar la solución.

- EL MAESTRO: Ahora es el momento de seguir unos pasos ordenados, lógicos, equilibrados, pero más rutinarios, que siempre son los mismos, y requieren un mínimo de energía mental.

<u>Primer paso. Quitar denominadores cuando los hay, como en este caso.</u>

- EL MAESTRO: Intuitivamente nos damos cuenta que una expresión sin denominadores es más sencilla, se pega más a la vista, por tanto tenemos que ingeniarnos la manera de quitarlos, haciendo una transformación. La clave, el secreto está en encontrar un número que multiplique a todos los denominadores, como si fuese un «comecocos» capaz de eliminar a cada uno de ellos con el arma de la división exacta. En el ejemplo, donde los denominadores son el 3 y el 4, el número más pequeño que multiplica a los dos, su mínimo común múltiplo es el 12, que incluye a ambos en sus entrañas. Por otra parte es necesario guardar el equilibrio entre ambos miembros de la ecuación; lo que ampliemos, reduzcamos, añadamos o quitemos en un lado del signo igual, también lo tenemos que hacer en el otro lado, para restablecer el equilibrio, claro está. Luego, en este caso, lo que tenemos que hacer es multiplicar los dos miembros de la ecuación por el número 12, quedando agrandados 12 veces cada uno de ellos, por tanto siguen estando en equilibrio.

$$12X = 12\left(\frac{X}{3} + \frac{X}{4} + 50\right)$$

- JUANA: Ahora lo que no se pega a la vista, lo que nos estorba es el paréntesis.

- PEPE: Eso no es problema, lo romperemos, como dice el maestro, con el martillo de la multiplicación del número 12, cuyo efecto recae sobre cada uno de los tres números encerrados en el paréntesis, transformando la expresión en la suma de los tres resultados. Lo digo así para entendernos mejor, aunque esta propiedad tiene una definición matemática un tanto rara, que creo recordar como la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

$$12X = \frac{12X}{3} + \frac{12X}{4} + 12 \cdot 50$$

- EL MAESTRO: La división de 12 entre 4 da 3, y la de 12 entre 3 da 4, ambas exactas, como estaba previsto, como nos interesaba para hacer desaparecer los denominadores.

$$12X = 4X + 3X + 600$$

Esta expresión es más sencilla, esta sí que se pega más a la vista. Hemos conseguido quitar los denominadores con lógica y con ingenio.

<u>Segundo paso. Cada oveja con su pareja.</u>

- EL MAESTRO: El dicho de «cada oveja con su pareja», es aplicable a las ecuaciones también. Por tanto agruparemos los términos que llevan «x» en un lado del signo «=», y los que no la llevan al otro lado.

$$12X - 4X - 3X = \cancel{4X} - \cancel{4X} + \cancel{3X} - \cancel{3X} + 600$$
$$5X = 600$$

<u>Tercer paso. Desnudar la «x».</u>

- EL MAESTRO: Despejar la «x», aislarla, dejarla sola a un lado del signo igual, es desnudarla de letra para ver su valor de número. La manera de hacerlo es siguiendo la regla del equilibrio y buscando un divisor capaz de neutralizar al número 5 que la acompaña, de tragárselo. La transformación queda así:

$$\frac{\cancel{5}X}{\cancel{5}} = \frac{600}{5}$$
$$X = 120$$

Solución: 120 árboles en total.

Cuarto paso. Encajar el rompecabezas de la ecuación.

- **EL MAESTRO:** La comprobación de que la solución es válida es un paso fundamental en la realización de un problema matemático, es su sello de calidad. Para probar su validez tenemos que montar el rompecabezas con la pieza de la solución. Si lo conseguimos tenemos la garantía de que está bien.

- **PACA:** Vale, el problema está muy bien resuelto en el papel, pero estaría mejor todavía si fuésemos capaces de colaborar en dicha repoblación. Podríamos empezar hablando nosotros el tema y poniéndonos en contacto con entidades y personas relacionadas con el Medio Ambiente.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: La matemática aumenta su valor cuando sirve para hacer buenos proyectos para la humanidad.

BAJO EL SIGNO DE AEQUARE.

- **EL MAESTRO:** Las ecuaciones son una herramienta de cálculo que se puede utilizar en las más diversas situaciones, de aequare, de igualar, de equilibrio, de comparaciones, de coincidir... Sería conveniente que pensáramos en grupo para descubrir su campo de aplicación. Lo más fácil es empezar recordando las experiencias de igualdad que hemos hecho en este tema:

- Los huevos que calienta mamá pata y los patitos recién nacidos, incluido el feo.
- Los ingresos y previsión de gastos en un Centro Educativo.
- Los caramelos de ambos platillos de la balanza.
- El peso de los caramelos y el de las pesas.
- El gasto total en un viaje y el desglose en gastos parciales.
- Los árboles repoblados en una loma y su distribución en pinos, encinas y acebuches.

Ahora entre todos podemos seguir pensando más igualdades lógicas.

- **EL GRUPO:**

- Las personas en total que hay en una reunión y diferenciadas por grupos de edad o sexo por ejemplo.
- Los animales en total que hay en un corral y diferenciados por clases.
- Un número cualquiera de «cosas» en su conjunto y repartidas en estanterías, cajas, cestas...
- Lo que entra y lo que sale, en diversas situaciones.
- El agua que recibe un pozo y la que se extrae cada año para conservar el nivel freático.

- Los ingresos y los gastos de una familia mensualmente, teniendo en cuenta las posibles sobras o faltas.
- Los ingresos y los gastos de una empresa en un determinado período de tiempo, combinando en su caso el déficit o el superávit.
- El peso total con la tara más la carga.
- Los caminos, las carreteras, las vías, las líneas aéreas, las sendas, las trayectorias... y los tramos parciales recorridos y por recorrer.
- La extensión total de lo que sea y troceada en parcelas.
- El volumen total y los volúmenes parciales.
- Una finca entera y parcelada.
- Igualdades relacionadas con el principio de conservación de la materia, de la energía, y de la materia y la energía.
- La energía que toma nuestro cuerpo a través de los alimentos y el gasto energético en sus actividades y funciones vitales.
- Los habitantes de un lugar y su distribución según trabajos, edad, raza...

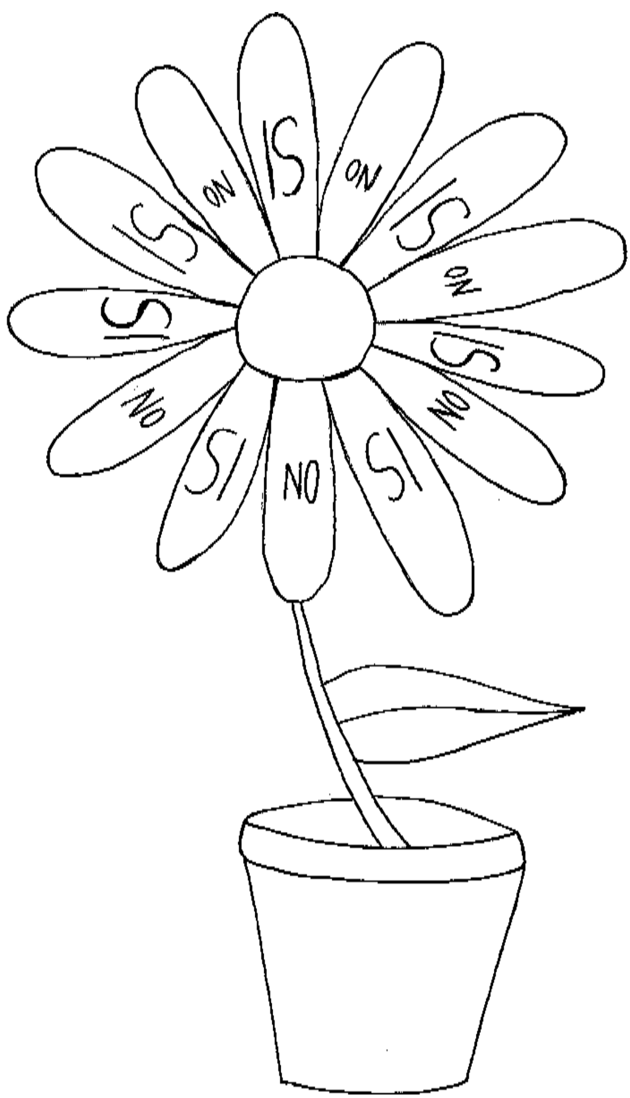
- **EL MAESTRO:** A veces se plantean igualdades menos estandarizadas que las anteriores, más artificiales, menos claras, más rebuscadas, digamos más convenidas según interese. Así es en los siguientes casos:

- Comparación de edades utilizando de enlace los conceptos de doble, triple, mitad, tercera parte..., o en su caso añadiendo o quitando años para ajustar la igualdad.
- Comparación de cosas, de bienes, de todo..., relacionadas con personas, grupos, entidades, países, con todo..., utilizando las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir..., traduciendo situaciones expresadas en frases a expresiones matemáticas selladas con la letra x, y girando en torno al signo igual.

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO:

- El todo y las partes.

DEMOCRACIA MATEMÁTICA A LA ROMANA O
LAS SIETE VIDAS DEL GATO
(COMETA DEL UNIVERSO MATEMÁTICO)



- EL GRUPO: ¿Se puede vivir en democracia en las clases de Matemáticas?

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO:

Sí, cuando se respeta el camino seguido por cada cual en la búsqueda de la solución de cualquier problema matemático.

No, cuando todos tienen que seguir un modelo preestablecido por otros y más o menos a capricho del maestro.

Sí, cuando cada uno comunica sus pequeños hallazgos al resto del grupo, con la alegría del descubrimiento.

No, cuando el maestro desecha algunas soluciones por no ajustarse a las reglas matemáticas predominantes bajo su punto de vista particular.

Sí, cuando la resolución de un problema requiere tu ingenio, tu propia energía mental, aunque necesites un poco de ayuda.

No, cuando realizas esfuerzos mentales sólo para adaptarte a esquemas demasiado rígidos, demasiado hechos.

Sí, cuando por tu cuenta, por cuenta propia, libre de ataduras de fórmulas, encuentras tu propio camino, aunque sea largo y tortuoso, para llegar a la solución.

No, cuando por prisas, tan frecuentes en los tiempos que corren, que vuelan, el maestro acude demasiado pronto a tu socorro, creyendo que te ayuda al darte una receta sencilla y mágica que te lleve deprisa al final. Lo que pasa en realidad es que pierdes más de lo que ganas, pierdes parte del crecimiento del matemático que llevas dentro a cambio de ganar sólo unos pocos minutos.

Sí, cuando se nota la alegría en el ambiente, la alegría de ser partícipes en el proceso de resolución de los problemas.

No, cuando se respira apatía, conformismo, sensación de tener que pasar por el aro.

Sí, cuando todos somos protagonistas.

No, cuando hay un solo protagonista.

Sí, cuando piensas, razonas, sientes y decides tú.

No, cuando alguien lo hace por ti.

Sí, cuando buceas, chapoteas y navegas, a veces a contracorriente, en el mar de los números; cuando te mojas y te sientes como pez en el agua descubriendo relaciones entre ellos.

No, cuando te atormenta la marea de las fórmulas regladas que te impiden pensar a tu manera, que te hacen perder tu propio juicio.

¡Sí, sí, sí, se puede practicar la democracia en las clases de Matemáticas!

- EL MAESTRO: Todos los caminos llevan a Roma, desde las líneas aéreas y las autopistas hasta los senderos que zigzaguean y que cruzan campos y montañas, haciéndote disfrutar del contacto con la naturaleza, aunque sufras por ello algunos arañazos. Todos los planteamientos, siempre que sean correctos, pueden llevar a la solución de un problema, desde la aplicación de una fórmula preestablecida, allanada y fácil, hasta la manera enredada y difícil hecha por el ingenio particular, cimentada a base de «palicos y cañicas», buscando a veces al «tío mañas», encontrando dificultades pero abriéndote camino por los senderos del campo de los números para construir tu propio edificio matemático. Dice el verso que se hace camino al andar, y también se puede decir que se hace matemática al pensar.

- PACA: Esas teorías son muy bonitas pero dudo que se puedan poner en práctica.

- EL MAESTRO: ¿Lo intentamos? ¡Seguro que lo conseguimos! Para comprobarlo podemos plantearnos un problema cualquiera, si es nuestro y es ecológico mejor que mejor, y...

- FRANCISCO JUAN: Para que sea ecológico tendrá que ser andando o en bicicleta.

- EL MAESTRO: No es mala idea, podríamos planificar una excursión para disfrutar de la naturaleza.

- ROSA: Propongo que sea el domingo a Los Baños de Mula.

Se formó un revuelo que animó el ambiente y lo que empezó medio en broma estuvo a punto de terminar el fin de semana en excursión mixta a pie y en bicicleta a Los Baños. Aprovechamos la situación para arrancarle unos números a las piernas y a las bicicletas. Entre unos y otros se planteó nuestro problema:

«Para ir andando de Mula a Los Baños se tarda 2 horas, yendo a una velocidad de paseo de 3 Kilómetros/hora. ¿Cuánto se tardará en bicicleta a 12 Kilómetros/hora?».

EL ESPÍRITU MATEMÁTICO: El buen estado de ánimo facilita los procesos de pensamiento en la resolución de los problemas. No es lo mismo pensar en un problema que ni te trae ni te lleva, que en uno en el que te sientas emocionalmente dentro del mismo.

- EL MAESTRO: Está claro que este problema sólo puede tener una solución, pero los caminos para llegar a ella pueden ser tantos o más que las siete vidas del gato. ¡Adelante en libertad de pensamiento!, pues mi ayuda tendrá más sentido a posteriori de vuestras dudas, ya que si fuera a priori se correría el riesgo de que pudiera entorpecer algunos de los caminos posibles. ¡Ánimo!

Unos minutos más tarde, una lluvia de planteamientos desembocó en la misma solución.

- ANGEL: Yo soy de Los Baños, y sé que a esa velocidad se tarda media hora aproximadamente.

- PEPE: De los datos del caminar sacamos que 3 Km / h por 2 horas es igual a 6 Kilómetros, que es la distancia de Mula a Los Baños. Si la bicicleta avanza 12 Kilómetros en una hora se pasaría de Los Baños, es más, le daría justamente tiempo de ir y volver. Por tanto está claro que tarda media hora en llegar.

- ENCARNA: Si la bicicleta cuadriplica la velocidad de a pie, el tiempo se reduce lógicamente 4 veces, por eso los ciclistas llegaremos en media hora.

- LUIS: Con una regla de tres:

$$\begin{cases} 12 \text{ Km} \text{ ———— } 60 \text{ minutos} \\ 6 \text{ Km} \text{ ———— } X \text{ minutos} \end{cases}$$

$$\frac{60}{X} = \frac{12}{6}$$

$$12X = 60 \cdot 6$$

$$X = \frac{60 \cdot 6}{12} = 30 \text{ minutos}$$

- JUANA: Con otra regla de tres:

$$\begin{cases} 3 \text{ Km/h} \text{ ———— } 2 \text{ horas} \\ 12 \text{ Km/h} \text{ ———— } X \text{ horas} \end{cases}$$

(i)

Nota (i) significa inversamente proporcional

$$\frac{2}{X} = \frac{12}{3}$$

$$12X = 2 \cdot 3$$

$$X = \frac{2 \cdot 3}{12} = \frac{6}{12} = 0'5 \text{ horas}$$

- MARI: Con otra regla de tres:

$$\begin{cases} 3 \text{ Km/h} \text{ ——— } 120 \text{ minutos} \\ 12 \text{ Km/h} \text{ ——— } x \text{ minutos} \end{cases}$$
(I)

$$\frac{120}{x} = \frac{12}{3}$$

$$12x = 3 \cdot 120$$

$$x = \frac{3 \cdot 120}{12} = 30 \text{ minutos}$$

- LUISA: Sin reglas de tres:

60 minutos : 12 Km = 5 minutos en 1 Km
Para recorrer 6 Km, tardaremos
5 minutos por 6 Km, igual a 30 minutos.

- EL MAESTRO: Ya es sobresaliente. Ya llevamos siete maneras diferentes de solucionar el problema. Demostrado.

ANEXO: PROYECTO DE «MATEMÁTICA DESNUDA O AVENTURAS POR LOS PAISAJES DEL UNIVERSO MATEMÁTICO», DE ESPECIAL INTERÉS PARA DOCENTES

1. JUSTIFICACIÓN:

Mucha gente aborrece todo lo que tiene que ver con los números y todo eso. Sin embargo cuando tenemos unos pocos meses nos encanta bailar los dedos de la mano al ritmo de la cancioncilla de los cinco lobitos. También es curioso que de pequeños levantemos el dedo índice con gusto y con alegría porque sabemos decir así que tenemos un añito. ¿Quién no tiene buenos recuerdos de cuándo aprendió a contarse los dedos y a contar las cosas de su pequeño mundo? ¿Quién no ha hecho ecuaciones por gusto sin que te haya enseñado nadie esta lección, a los cuatro o cinco años, para acertar los caramelos que se ha comido o que le quedan del puñado que le habían regalado? Por otra parte desde pequeñitos aprendemos a base de coscorrones, de vaciar la cuchara en cualquier sitio menos en la boca, de tropezones, de errores y de aciertos. Aprendemos a medir las distancias al gatear, al caminar, al sentarnos, al comer, al crecer en autonomía. Aprendemos a tantear, a calcular, a añadir, a quitar, a comparar, a repartir, a mezclar, a separar, a igualar, a equilibrar, al crecer el matemático que llevamos dentro, en un ambiente de matemática natural. Y el mundo está lleno de paisajes de colores y también de formas para ser descubiertos con los ojos del entendimiento de los niños.

Pero, pero, pero es una lástima que en un porcentaje bastante alto de estudiantes se pierda la alegría de saber matemáticas al natural, es una lástima que se apague le llama de tu entendimiento matemático, es una lástima que no se siga disfrutando como de niños pequeños con el descubrimiento del universo matemático, es una lástima que las matemáticas se echen a perder en las mentes de tantos y tantos escolares que sienten náuseas al intentar digerir un alimento matemático demasiado artificial compuesto de fórmulas regladas y líos de recetas mágicas, es una lástima que esa matemática artificial impida el normal crecimiento de tu mente matemática, es una lástima y una injusticia.

Por eso siento y pienso que los maestros tenemos que hacer algo para cambiar esta triste realidad. Desde hace unos quince años, cuando atendía a los grupos de sexto, séptimo y octavo en un Centro de Educación General Básica, fui tomando conciencia como maestro de las dificultades y sufrimientos que los escolares tenían en el campo matemático. Aunque la primera conciencia me nació a los diez u once años cuando salí del campo para entrar en la escuela por primera vez, sufriendo la sensación de perderme en una emboscada de números enrevesados que no guardaban relación alguna con mis vivencias auténticas, libres y salvajes, en el buen sentido de la palabra, en contacto con la naturaleza. En los trece cursos que llevo de maestro en el Centro de Educación de Personas Adultas «Río Mula», he vivido experiencias interesantes en el campo matemático, entre otras. Durante los primeros años atendí un grupo de gente sabia de Tercera Edad, que me contagió parte de su saber, que me contaban sus maneras de hacer las cuentas. Seguí tomando conciencia de que hay que respetar las formas de pensar de la gente. En los últimos cuatro o cinco cursos he tenido la oportunidad de practicar una manera diferente de ser maestro de matemáticas, de ser maestro. Me ha tocado atender grupos de Graduado Escolar y de preparación para la obtención del Título de Formación Profesional de Primer Grado, en la asignatura de Matemáticas. En este campo de batalla he mantenido una lucha constante, acrecentada curso a curso, por crear un clima de investigación capaz de favorecer el descubrimiento con las aportaciones tanto individuales como del grupo. Mi papel de «maestro tonto» ha consistido en hacer propuestas, en aportar pequeñas informaciones, en ayudar a buscar información, en crear dudas, en «engañar», en plantear situaciones problemáticas, en animar a bucear en las profundidades del saber matemático, en no dar nunca nada hecho, en no ser un administrador de recetas, en no ser un maestro de las fórmulas, en estar siempre dispuesto a dar pistas para ayudar a descubrirlas, en sufrir con el grupo en el tejemaneje de la investigación, en compartir con el grupo el disfrute del encuentro con la solución.

Recientemente, en el Seminario Provincial sobre «La enseñanza y el aprendizaje de las personas adultas: el currículum en la práctica», celebrado en el I.E.S. Licenciado Cascales los días 1, 2 y 3 de octubre de 1998, y organizado por el C.P.R. Nº 1 de Murcia, tuve la oportunidad de presentar una comunicación: «LA FIESTA DE LOS NÚMEROS», a unos 150 participantes en dicho seminario. Durante media hora les conté cuatro cosas chocantes de matemáticas:

- Mete el lápiz y saca el metro.
- Un metro por un metro no es un metro cuadrado.
- Lo redondo empieza en ti.
- La ecuación del patito feo.

Fueron 30 minutos de reflexión sometiéndonos a una prueba inicial de tanteo al sacar el metro; dándonos cuenta de que a nadie se le ocurre multiplicar una patata por una patata y mucho menos decir que el resultado es una patata cuadrada; caímos en la cuenta de que lo redondo empieza en ti, de que la matemática está en nosotros; y de que sabemos álgebra desde pequeñitos.

Fue un rato agradable, divertido, lleno de sorpresas, de pequeñas crisis de esquemas de saber matemático, y de recapacitar sobre la metodología utilizada en la enseñanza - aprendizaje, un rato agridulce de reflexión y de fiesta. Esto también me anima y me hace sentirme responsable de seguir contando más cosas matemáticas, que puedan servir a la gente para acrecentar su sabiduría matemática, y a los profesionales de la educación para reflexionar sobre la práctica de nuestra tarea.

Porque hay mucha gente que aborrece los números, porque es una lástima y una injusticia que no puedan disfrutar en los paisajes del universo matemático; porque la matemática es belleza, ritmo, poesía; porque la matemática está en nuestro mundo, en la sociedad, en el arte, en la música, en la naturaleza, en el agua, en el viento, en el vuelo de los pájaros y en nuestros cuerpos; porque la matemática ayuda a leer y entender el mundo; por todas estas razones, quiero contribuir a mejorar los procesos de enseñanza - aprendizaje del saber matemático, dando a luz un libro de «Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático», que he compartido con cientos de personas adultas a lo largo de estos últimos años. Lo haré a modo de «Diario de Matemática Desnuda», para disfrutarla por dentro, al natural, en su esencia.

2. OBJETIVOS:

La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas exige un esfuerzo combinado de maestros/as con capacidad de despertar el interés, la alegría, y la sencillez de este saber; con ánimo de dar pistas, de orientar, de ayudar, de no dar nunca nada hecho... y de estudiantes dispuestos a descubrir la esencia de las cosas matemáticas, a encontrar relaciones, a darse cuenta de que la matemática forma parte de la vida, de su cuerpo, de su medio y de su forma de pensar. Es una tarea compartida por maestros / as y alumnos / as. Por eso este libro de Literatura Matemática pretende ser una ayuda en el logro de objetivos tanto del saber matemático como de la tarea de maestro, un libro de Matemáticas y un libro de Pedagogía. Además quiere hacer una contribución a la Educación en Valores, mezclando temas transversales como justicia, ecología, solidaridad y democracia, intentando superar la división entre Ciencias y Letras. Por eso los objetivos a cuyo logro pretende contribuir se pueden agrupar en tres bloques:

1. Para los estudiantes:

- Bucear en la esencia del saber matemático.
- Descubrir al matemático que llevamos dentro.
- Quitar el mito de la complejidad matemática.
- Hacer un Taller de Matemáticas, para apoyar la teoría con la práctica.

2. Para los maestros/as:

- Invitar a la reflexión de la metodología de enseñanza - aprendizaje que utilizamos en nuestra tarea para evitar planteamientos mecánicos y poner en práctica los significativos, los que favorecen el aprendizaje por descubrimiento.
- Dar claves didácticas para que seamos capaces de crear un clima agradable en los grupos, donde se combine la investigación con la tertulia, buscando un punto de encuentro entre la ciencia matemática y el contacto humano, mezclando el aprendizaje y el descubrimiento con la distracción y la conversación.

3. Para la Educación en Valores:

- Encontrar el sentido de la justicia en la Proporcionalidad Matemática.
- Aprovechar el aprendizaje de los saberes matemáticos, para relacionarlos cada vez que se pueda, con pequeñas reflexiones que nos ayuden a cambiar un poco, transformando nuestro entorno a mejor, con temas de ecología, de colaboración, de solidaridad, de respeto mutuo, con pequeños gestos que nos hagan crecer en lo humano.
- Practicar la «democracia matemática», respetando y valorando todas

las aportaciones y soluciones para resolver un determinado problema.

- Contribuir a la superación de la división artificial entre Ciencias y Letras.

3. CONTENIDOS:

Las diferentes parcelas del saber matemático no están aisladas entre sí, sino que están relacionadas como formando parte de un todo, formando un Universo Matemático, un sistema solar matemático con sus planetas y satélites, girando todo alrededor de la mente del matemático que llevamos dentro. En este libro se enfocará con un telescopio de matemática básica elemental, un total de cinco «planetas» y varios «satélites» en torno a algunos de ellos. A continuación doy unas pinceladas descriptivas de dichos planetas o bloques de contenidos:

1. Mete el lápiz y saca el metro.

Este título pretende hablar por sí mismo a modo de eslogan, invitando a que la teoría empiece en la práctica. En este bloque se afrontará la construcción ordenada del edificio de la medida a partir de una estructura sencilla, cuya primera pieza es el metro, que es el gen de las unidades de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso. Dos satélites, a modo de ejemplos de aplicación, giran en torno a él: «Números bajo la lluvia» y «¿Flotará o se hundirá?».

2. El uno, el todo y la parte.

El título pretende integrar en una sola lección los números enteros, naturales y fraccionarios, queriendo superar las divisiones excesivas que se hacen a veces para el estudio de los números. En este «planeta matemático», generado por el «uno», se partirá de reflexiones sobre los números en la vida, los «unos duros» y los «unos blandos». A continuación se paseará por el «ecosistema de los números» para descubrir las relaciones entre ellos y con el medio socionatural en el que habitan. «El lobo y las ovejas» y «Postre de frutos secos» harán referencia a las aventuras vividas en dos de sus satélites, para facilitar y encontrar más sentido al mínimo común múltiplo y al máximo común divisor. Y terminar con buen sabor de boca.

3.1. El paisaje de las formas.

Es un bonito título para la Geometría. Si partimos de la observación de las formas en el mundo, en la vida, en el entorno... podemos construir «el árbol de la esencia de las formas», cuyo tronco se ramifica en dos ramas, la de dos y la de tres dimensiones. Una serie de aventuras en estos paisajes y en la estructura de este árbol nos ayudará a encontrar maneras sencillas de calcular áreas y volúmenes, sin necesidad de sufrir en el olvido de las fórmulas. Un «satélite» tan grande como este «planeta» es «lo redondo y el pi».

3.2. Lo redondo y el pi.

Vivimos en un mundo redondo, comemos cosas redondas, somos medio redondos. El «pi» o mejor dicho para entendernos, las «tres coma catorce» veces que, aproximadamente «el alrededor» (la circunferencia), es más largo que «el atajo» (diámetro), es el gen, el número alrededor del que gira todo lo redondo. Sabemos que hay unas fórmulas a modo de recetas, que sirven para calcular la longitud de la circunferencia, la superficie del círculo, el área del cilindro, del cono y de la esfera; y el volumen del cilindro, del cono y de la esfera. También sabemos que estas fórmulas se suelen mezclar entre sí en nuestra mente, que se difuminan con el tiempo y se olvidan. Como alternativa, propondré una serie de experiencias y un cuento, para que en cualquier momento que necesitemos calcular alguna longitud, superficie o volumen relacionados con lo redondo, podamos saber la manera de hacerlo sin necesidad de depender exclusivamente de las fórmulas.

4. Justicia Matemática.

Es un título transversal, que da idea de cómo el saber matemático se mezcla con los valores en nuestra mente. Ojalá que las Matemáticas sirvieran siempre para resolver los problemas de la vida y del entorno, superando el cálculo mecanicista y logrando alcanzar la conciencia. El «planeta de Justicia Matemática» o «planeta de la Proporcionalidad», es un lugar dónde también anidan los valores. Bajando al terreno puramente matemático analizaré las dificultades de la aplicación de la regla de tres, cuando se hace «a ciegas», y plantearé otras posibilidades de resolver los problemas de reglas de tres sin hacer reglas de tres, valga la redundancia, otras maneras más acordes con nuestro pensamiento autónomo.

Son varios los «satélites» que giran en torno al «planeta» de Justicia Matemática:

- «La mente se pone a cien». Sobre la esencia del cuánto por ciento.

- «Nuestra empresa particular con beneficio ecológico». Es una aventura que demuestra cómo los valores medioambientales pueden entrar en el campo matemático. Es un contenido donde predomina lo actitudinal.
- «La lámpara de Aladino». Sobre la esencia de la escala.
- «Las matemáticas en Africa». Invita a la reflexión a modo de contenido actitudinal.

5. El baile de los números con las letras.

El título quiere servir de contraste con la frialdad que muchos estudiantes notan en el Álgebra, al pensar que es difícil, desagradable, y que sólo está al alcance de unos pocos, con mente privilegiada para las Matemáticas. Pero es un error pensar así. En este planeta de números y letras analizaré el concepto de equilibrio en la vida, y en los números. Plantearé la dulce experiencia de la ecuación del patito feo, porque los niños y las niñas tienen la mente preparada para hacer ecuaciones. Y contaré un montón de aventuras, de experiencias y de prácticas, que puedan servir para democratizar los saberes del Álgebra.

4. METODOLOGÍA:

En el día a día de estos últimos cursos con grupos de Graduado y Formación Profesional en Educación de Personas Adultas en el Centro «Río Mula», hemos vivido muchas aventuras matemáticas, que han dejado huella en los guiones de trabajo propuestos por el maestro, en las libretas, en las paredes del aula si hablaran, en la calle cuando hemos practicado la matemática fuera del aula como aquel día cuando salimos a tomar el sol para medirnos la sombra, pero sobre todo y afortunadamente ha calado en la mente de cada una de las personas que hemos participado en la aventura.

Para evitar que tanta aventura, que tanto recuerdo, que tantos pequeños saberes, sean borrados con la goma del olvido, y sobre todo para lograr que tengan trascendencia y que puedan servir de ayuda a otros maestros/as, grupos, Centros... y como maestro que lucho permanentemente agitando tanta aventura porque creo en la democracia matemática, me propongo recopilar, aunque no es tarea fácil, una selección de las mejores aventuras.

El esquema del proyecto que pretendo es sencillo, lo complejo es su desarrollo. El método a seguir es el siguiente:

1. Partir del germen de las experiencias y aventuras vividas en los grupos y compartidas con los participantes. Para lograrlo me serviré de los guiones de trabajo propuestos, de mis anotaciones en el cuaderno de campo, de mi «caja de herramientas» para el Taller de Matemáticas, y sobre todo de la grabación de las sesiones en la cinta del recuerdo de mi cerebro.

2. **Pasar estos materiales y recuerdos, esta información, por el filtro multicolor de la reflexión matemática, pedagógica y humana,** en un cuidado y laborioso proceso de construcción curricular.

3. **Sacar a la luz un fruto.** Éste podría ser un libro por lecciones, una o varias guías didácticas, una novela con contenido matemático, un diario y quizá una película en vídeo. En esta ocasión he decidido que sea o que tenga forma de «Diario», «Diario de Matemática Desnuda», porque así llevará el germen de la esencia que lo ha producido, la semilla del tejemaneje de la investigación con minúscula que se vive a diario en las sesiones, y el eco de la tertulia matemática, de la duda, del descubrimiento y de la aventura. Con este libro, que reflejará el día a día de la actividad matemática, que estoy animando estos últimos años, pretendo ofrecer un material capaz de hurgar en la esencia de estos saberes, de remover la reflexión de los métodos de enseñanza - aprendizaje y de enlazar con la educación en valores.

Este trabajo pretende ser también una invitación para afrontar el área de las Matemáticas con una METODOLOGÍA INTERACTIVA, desarrollando sobre todo los CONTENIDOS PROCEDIMENTALES Y ACTITUDINALES, sin olvidar los CONCEPTUALES, favoreciendo el APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO.

6. DESTINATARIOS DEL PROYECTO:

Este proyecto, que tomará forma de libro, ha salido de las aventuras vividas en el día a día, por personas de Educación de Adultos de grupos de Graduado y Formación Profesional, así como de otras de Niveles Iniciales. Estas personas son las protagonistas de este trabajo. Mi papel de maestro ha consistido simplemente en agitar el saber matemático en sus mentes. Y ahora, como «fotógrafo», me dispongo a revelar el carrete de la observación de la actividad diaria, dándole, eso sí, un enfoque y un tratamiento de laboratorio adecuado, para el disfrute intelectual y humano de cuantas personas lo deseen, sean maestros/as, alumnos/as participantes en Educación de Adultos, y otras personas, desde el que aborrece todo lo que tiene que ver con los números hasta el que le encanta, y desde el que no ha podido ir a la escuela hasta el que tenga estudios universitarios.

7. DISEÑO DEL LIBRO «DIARIO DE MATEMÁTICA DESNUDA» O «AVENTURAS POR LOS PAISAJES DEL UNIVERSO MATEMÁTICO» (BREVES PINCELADAS):

El título del Proyecto es doble:

«Matemática Desnuda», hace referencia a la matemática, en este caso básica, vista por dentro, analizada en su esencia, radiografiada para entenderla mejor, y sin vestidos artificiales diseñados y decorados con fórmulas demasiado hechas.

«Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático», es una apuesta por el protagonismo compartido de los participantes en un ambiente de exploración, que anime al descubrimiento, en una matemática nuestra que nos permita pasearnos por el entorno socionatural.

Los protagonistas de «Diario de Matemática Desnuda» son María, Pepe, Juana, Paca, Antonio... y tantos otros que han vivido experiencias, «pequeñas crisis en su pensamiento matemático», tantas aventuras en un ambiente de fiesta de los números, y que han tenido la suerte de vivir la matemática de forma agradable y divertida.

El maestro, yo mismo, es el protagonista responsable de la coordinación, de la animación, de sembrar la duda, de no caer en el vicio de dar las soluciones antes de tiempo, de no dar nunca nada hecho, de crear un clima propicio para la investigación desde la tertulia y la conversación, y de aprovechar todas las ocasiones posibles para integrar los valores y fomentar la democracia en las clases de Matemáticas.

El Espíritu Matemático, es el personaje etéreo, el que está a la que salta, el encargado de la crítica constructiva, es la conciencia pedagógica.

Del **diseño de portada** y de las **ilustraciones** se encargará mi hijo Felipe, estudiante de 3º de la E.S.O. con un estilo de dibujo un tanto peculiar.

8. APLICACIÓN PRÁCTICA DEL PROYECTO:

Su primera aplicación es en los grupos de Educación de Personas Adultas de los niveles de Graduado Escolar, de F.P.1, y de Primer Ciclo de la E.S.P.A., en el área de Matemáticas. Los contenidos que integra son los conceptuales básicos de Aritmética, Geometría y Álgebra, aderezados con contenidos procedimentales y actitudinales, para saborear la salsa de los números. Es válido tanto de libro guía para el maestro como libro de consulta del alumno. Además puede ser utilizado parcialmente en la enseñanza de las Matemáticas en los Niveles Iniciales, y también en algunos temas de Segundo Ciclo de la E.S.P.A.

Una segunda aplicación importante es como documento de reflexión pedagógica para la formación del profesorado, que puede encontrar claves para afrontar la enseñanza - aprendizaje de contenidos conceptuales, y lo que es más interesante, los contenidos procedimentales y actitudinales en este campo. Además encontrará sugerencias para el tratamiento interdisciplinar de la Educación en Valores, también y por raro que resulte, desde las Matemáticas.

Otra tercera aplicación, no menos interesante que las anteriores, es la divulgación de la Ciencia Matemática, en este caso Básica, desde la Literatura. Cualquier persona, desde los adolescentes hasta los adultos, que sepa leer, claro está, podrá disfrutar con la lectura de este «Diario de Matemática Desnuda», de estas «Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático», al mismo tiempo que se produce un encuentro animado con su propio saber matemático. Este trabajo de Literatura Matemática es una especie de híbrido descendiente de las Ciencias y las Letras, que quiere contribuir a derribar el muro artificial que las separa muchas veces.

9. CONTENIDO DE ESTE TRABAJO:

Es difícil encasillar este trabajo en algo concreto, pues más bien pretende la globalidad, quiere enraizar en varias parcelas del saber. En cualquier caso es entre otras cosas **una Guía Didáctica, mejor dicho un conjunto de Guías Didácticas en torno al saber matemático**, y es un material curricular que quiere ayudar en la difícil tarea de la enseñanza - aprendizaje de Matemáticas en la Educación de Personas Adultas, y contribuir a la mejora de la calidad de la enseñanza en general.

10. EVALUACIÓN DEL PROYECTO:

La aplicación experimental de esta metodología inspirada en el aprendizaje significativo y por descubrimiento, en la enseñanza - aprendizaje de las

Matemáticas, en varios grupos de Graduado y Formación Profesional, en el Centro Comarcal de Educación de Adultos «Río Mula», durante los últimos cinco años, y el éxito del que ha gozado en su valoración, demuestra sus amplias posibilidades para la reforma del currículum de las Matemáticas Básicas en la Educación de Personas Adultas. Dicha aplicación experimental ha sido un buen comienzo, que sirve de garantía para su posible generalización a otros Centros de Educación de Personas Adultas.

Ahora queda pendiente la posible aplicación de este Proyecto de «Matemática Desnuda» o «Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático» a más personas adultas, a más grupos, a más enamorados de las Matemáticas, a más Centros, coordinada por más maestros y maestras, que se apunten a esta metodología, a esta aventura, que exige un proceso de evaluación continua. Para el seguimiento de este proceso, y para evitar la dispersión y el aislamiento de más experiencias, descubrimientos y aventuras en esta línea de trabajo, propongo la conveniencia de la celebración de Encuentros Matemáticos a nivel regional, con cierta periodicidad, anuales, bianuales, o de Seminarios Regionales de Matemáticas en Educación de Personas Adultas, que facilite el intercambio y la valoración de experiencias matemáticas innovadoras, entre los profesionales de esta materia en Educación de Personas Adultas.

11. FUENTES DE INSPIRACIÓN:

Es muy agradable para mí recordar en este momento a D. Álvaro, el profesor valenciano que me daba Dibujo y Matemáticas en los primeros cursos, en el Instituto de Alhama de Murcia, donde estudié el Bachillerato. D. Álvaro nos enseñó a amar las Matemáticas. Era un maestro en despertar nuestro interés hacia los números. Nos planteaba cosas tan chocantes como que el doble no siempre es el doble. Nos planteaba problemas y sobre todo no enjaulaba nuestro pensamiento. D. Álvaro fue, hace ya 25 años, mi primera fuente de saber matemático.

El grupo de Tercera Edad, que atendí al empezar a trabajar en Educación de Adultos hace 13 años, con sus maneras de hacer los números por «la cuenta de la vieja», fue otra fuente importante. También lo ha sido el contacto con grupos de personas adultas de Graduado Escolar y Formación Profesional de Primer Grado.

Pedro Buendía Abril

AGRADECIMIENTOS

A mi mujer y a mis hijos por el tiempo que les he robado.

A mi amigo Paco, que me animó a escribir las matemáticas.

A mi amigo Manolo, que me enseñó a poner título a las cosas.

A mi amigo Juanfran, que me ha contagiado algo de su espíritu de poeta.

A mi amigo Miguel, poeta y asesor del Centro de Profesores y Recursos de Cehegín, que con su gesto de pedagogo nato, me hay infundido energía para seguir adelante.

A D. Álvaro, que con su arte de maestro despertaba en sus alumnos el cariño hacia los números porque no enjaulaba el pensamiento.

A mi amigo Juan, que me invitó a estar con sus grupos de Educación de Adultos de Totana y El Paretón, durante dos sesiones, disfrutando en la salsa de los números.

A los maestros y las maestras del Centro Comarcal de Educación de Adultos «Río Mula», compañeros/as y amigos/as, que unidos siempre por la formación, y concretamente en torno al saber matemático durante el curso 1996-97 en el Seminario de Formación del Profesorado sobre la «Didáctica de las Matemáticas», han contribuido, han aportado ideas, han puesto en práctica estas experiencias, y me han animado también con sus gestos, sus risas y sus palabras de reflexión a la redacción definitiva de este libro.

A los alumnos/as que han pasado por el Centro Comarcal de Educación de Adultos «Río Mula» para aprender Matemáticas durante estos años, que son los auténticos protagonistas de este «Diario».

«Al escribir cada página de esta aventura, lo he hecho con toda la fuerza posible para contribuir a la difusión del saber matemático entre más y más gente, para evitar sufrimientos e injusticias con enseñanzas en conserva que pierden el frescor de lo natural, para hacer realidad el sueño de la fiesta de los números, la democracia matemática, la creatividad y el fomento de los valores humanos.»

Región de Murcia
Consejería de Educación
y Cultura

Dirección General de Ordenación
Académica y Formación Profesional