IV OLIMPIADA 1995

Fase comarcal

Problema 1. Las antenas de televisión.

Dos antenas de televisión de 40 metros de altura están situadas a 60 metros de distancia y clavadas en el suelo.

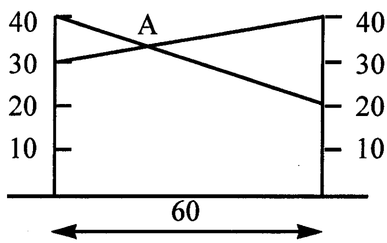
Se refuerzan con dos cables como indica la figura.

Se pide:

a) Las longitudes de los dos cables.

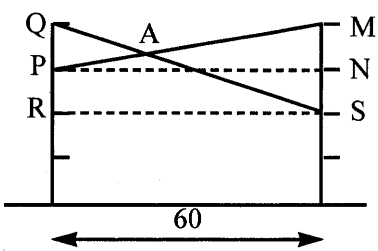
b) Las distancias del punto A, en que se cortan los dos cables, a cada una de las antenas.

c) La altura sobre el suelo del punto A.



Solución

a) Las longitudes de los cables son PM y QS.



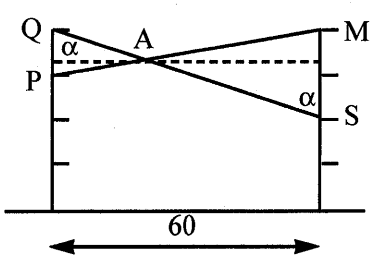
En el triángulo rectángulo MNP:

$$PM = \sqrt{60^2 + 10^2} = \sqrt{3700} = 10\sqrt{37} \text{ m}$$

En el triángulo rectángulo QRS:

$$QS = \sqrt{60^2 + 20^2} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \text{ m}$$

b) Las distancias del punto A a las antenas son las alturas de los triángulos APQ y AMN.



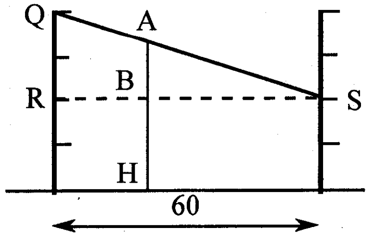
Estos dos triángulos tienen iguales los ángulos A, por ser opuestos por el vértice, y los designados por α, que son alternos internos entre paralelas (las antenas) cortadas por una secante QS. Los terceros ángulos también serán iguales, por ser 180° la suma de los tres ángulos de un triángulo.

Por ello son semejantes, y designando por h y 60-h las alturas de los dos triángulos:

$$\frac{20}{10}=\frac{60-h}{h} \quad \Rightarrow \quad 2h=60-h \quad \Rightarrow \quad h=20$$

Las alturas medirán 20 m y 40 m.

c) La altura del punto A sobre el suelo, AH = AB + 20.

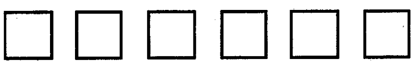


De la semejanza de los triángulo QRS y ABS resulta:

$$\frac{QR}{AB}=\frac{RS}{BS} \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{AB}=\frac{60}{40} \quad \Rightarrow \quad AB=\frac{800}{60}=13{,}\overset{\frown}{3}\text{ m.}$$

Resulta AH = $13{,}\overset{\frown}{3}+20=33{,}\overset{\frown}{3}$ m.

Problema 2. Desorden.



Escribe en cada cuadradito los números del 1 al 6, con la condición de que la diferencia entre dos números "vecinos" no sea nunca menor que 3. Explica el procedimiento seguido.

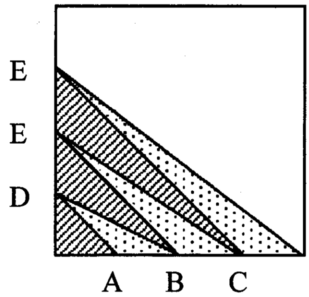
Solución

Para que pueda colocarse un número en el interior de la fila, debe haber por lo menos dos números que se diferencien de él en 3 o más, para colocar uno a la izquierda y otro a la derecha. Los únicos números que no cumplen esta condición son el 3 y el 4, que deberán colocarse en los extremos.

Si empezamos por 3:	3	6	2	5	1	4
Si empezamos por 4:	4	1	5	2	6	3

Problema 3. Jardín de flores.

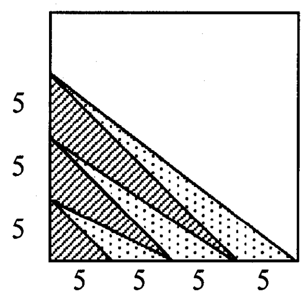
Se ha diseñado un jardín de forma cuadrada de 20 metros de lado, como se indica en la figura.



La parte punteada se dedicará a plantar amapolas; la rayada a claveles y la blanca a césped. ¿Qué tanto por ciento de la superficie total del jardín se dedica a amapolas, a claveles y a césped?

Solución

La zona punteada está formada por tres triángulos con la misma base, 5 m.



La altura del menor es 5 m, la del mediano 10 m y la del grande 15 m.
Sus áreas respectivas son:

$$\frac{5 \text{ x } 5}{2} \text{ m}^2 \qquad \frac{5 \text{ x } 10}{2} \text{ m}^2 \qquad \frac{5 \text{ x } 15}{2} \text{ m}^2$$

El área de la zona punteada valdrá: $\frac{5 \text{ x } 5}{2} + \frac{5 \text{ x } 10}{2} + \frac{5 \text{ x } 15}{2} = 75 \text{ m}^2$

La zona rayada también está formada por tres triángulos de igual base, 5 m, y alturas 5 m, 10 m y 15 m. Luego su área será la misma que la punteada: 75 m^2.

El área total vale 400 m^2.

Por tanto, se dedica a amapolas el $\frac{75}{400}$ x 100 = 18,75 % de la superficie total del jardín. Igual porcentaje a claveles, y el resto, o sea, el 62,5 % a césped.

Problema 4. Uno de perros.

El Sr. López tiene tres perros y un amigo le pregunta por las edades de éstos. El Sr. López sabe que su amigo es aficionado a las matemáticas y le contesta:

" El producto de las tres edades es 48 y su suma tiene raíz cuadrada exacta."

¿Te atreves a calcular las edades de los perros?

Solución

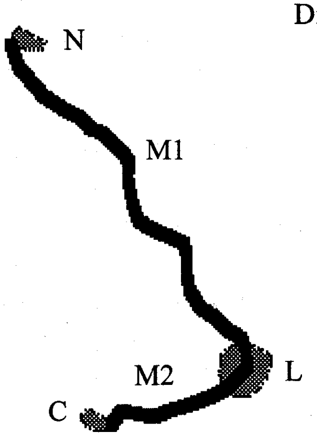
Descomponemos 48 en producto de tres factores enteros, de todas las formas posibles:

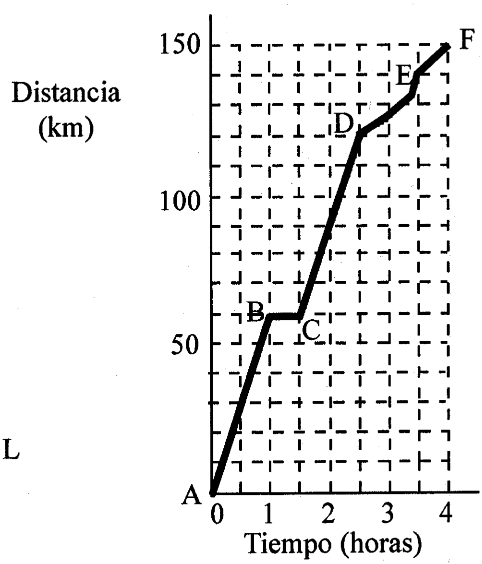
Factores	Suma
48, 1,1	50
24, 2, 1	27
16, 3, 1	20
12, 4, 1	17
12, 2, 2	**16**
8, 6, 1	15
8, 3, 2	13
6, 4, 2	12
4, 4, 3	11

La única suma que cumple la condición de ser cuadrado perfecto es 16. Por tanto, las edades de los perros son 12, 2, 2.

Problema 5. El viaje.

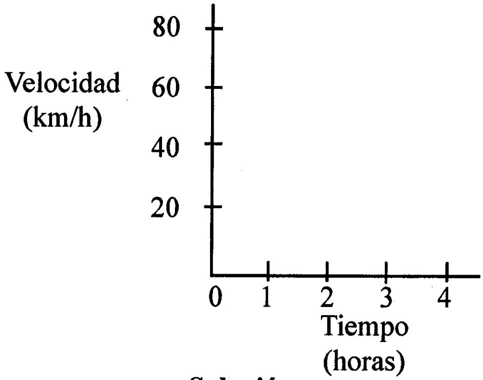
El mapa y la gráfica siguientes describen un viaje en coche de la ciudad N a la ciudad C, pasando por L y utilizando las autopistas M1 y M2.





a) Describe cada parte del viaje, haciendo uso de la gráfica y el mapa. En particular, describe y explica qué ocurre de A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F.

b) Usando la información anterior, haz una gráfica que muestre cómo varía la velocidad del coche durante el viaje.



Solución

Cada tramo del eje horizontal corresponde a 30 minutos y cada tramo del vertical a 10 km.

a) De A a B la velocidad es constante; ha recorrido 60 km en 1 hora. La velocidad es 60 km/h. La distancia en función del tiempo t es: d = 60.t.

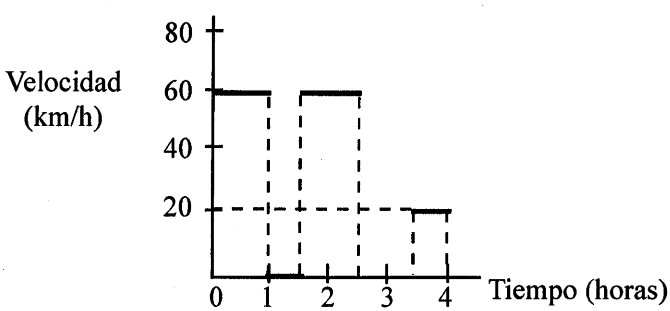
En el tramo de B a C se encuentra parado; la distancia se mantiene constante durante los 30 minutos: d = 60.

De C a D recorre 60 km en 1 hora; vuelve a ser la velocidad constante de 60 km/h, y d = 60.t.

De D a E recorre 20 km en 1 hora con velocidad variable, correspondiendo al paso por la ciudad L.

De E a F recorre 10 km en 0,5 horas; la velocidad constante es 20 km/h, y d = 20t.

b) Con la información anterior, la gráfica siguiente muestra cómo varía la velocidad durante el viaje.



No es posible dibujar la gráfica correspondiente a la travesía de la ciudad por falta de datos.

Fase regional. Valencia de Alcántara

Problema 1. La escalera de caracol que sube a una torre da dos vueltas completas en torno a su eje central.

Cada peldaño gira un ángulo de 24 grados y sube una altura de 20 cm. con respecto al peldaño anterior. ¿Hasta qué altura sube la escalera?

Solución

Al dar 2 vueltas completas, giramos 2 x 360°.

Como cada peldaño gira 24°; el número de peldaños será: $\frac{360 \text{ x } 2}{24} = 30.$

Como cada peldaño sube 20 cm, la altura será: 30 x 20 = 600 cm = 6 m.

Problema 2.

a) Idea un procedimiento para medir el grosor de una hoja de un libro. Tienes a tu alcance los siguientes instrumentos: regla, metro, báscula digital y calculadora.

b) Un cliente de una ferretería quiere comprar 3.000 tornillos de 5 cm. ¿Qué haría el dueño para venderle una cantidad lo más aproximada posible sin tener que contarlos? Los tornillos están dentro de una caja que no se sabe cuántos contiene.

Solución

a) Elegimos, por ejemplo, 200 páginas seguidas y medimos el grosor con la regla. Dividiendo esa longitud entre 100, obtenemos el grosor de una hoja, que son dos páginas.

b) Normalmente, los tornillos en una ferretería se despachan a peso. Echamos tornillos en la balanza hasta que pesen 100 gramos, por ejemplo, y los contamos; supongamos que hay n tornillos.

$\frac{100}{n}$ es lo que pesa un tornillo.

$3.000 \text{ x } \frac{100}{n} = \frac{300.000}{n}$ gramos es el peso de los 3.000 tornillos.

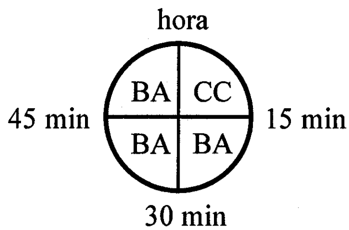
Problema 3. Federico, que vive en Mérida, tiene un serio problema. Sus dos novias viven en ciudades diferentes, una en Badajoz y otra en Cáceres. Le gustan las dos y es incapaz de decidir a quién debe visitar.

Para resolver el dilema hará lo siguiente: cada sábado saldrá de su casa sin ver la hora, se acercará a la estación de autobuses y tomará el primero que salga. Si el autobús se dirige a Badajoz verá a una, si lo hace a Cáceres, a la otra. Él sabe que los autobuses hacia Badajoz salen a las horas en punto (a las 3, a las 4, a las 5, etc,), mientras que los de Cáceres salen a las horas y cuarto (a las 3:15, a las 4:15, a las 5:15, etc.). Por eso es importante que no sepa a qué hora sale de casa, así será el destino quien decida cada sábado.

Transcurridas 20 semanas, se da cuenta que ha visitado a su novia de Cáceres unas cinco veces, mientras que a la de Badajoz la ha visto en unas quince ocasiones. Perplejo, se pregunta por qué el destino ha decidido que vaya más veces a Badajoz. ¿Podrías explicárselo?

Solución

De cada cuatro tramos horarios de 15 minutos, en uno de ellos iría a Cáceres y en los otros tres a Badajoz, como se indica en el siguiente esquema:

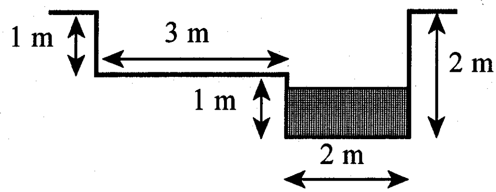


La proporción es de 1 a Cáceres por 3 a Badajoz.
La distribución de 4 en 4 queda reflejada en el siguiente cuadro:

	CC	BA
4	1	3
8	6	8
12	3	9
16	4	12
20	5	5

Por tanto, el 25 % de las veces irá a Cáceres y el 75 % a Badajoz.
La novia pacense se ve mucho más cortejada por su pareja que la cacereña.

Problema 4. La piscina, cuya sección representa la figura, tiene 4 metros de ancho. Se llena en 28 minutos a través de una manguera por la que el agua sale a velocidad constante.

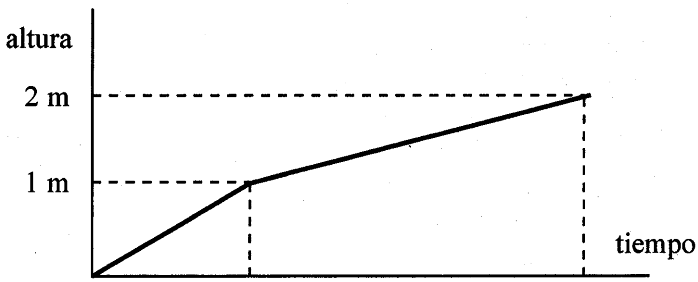


Dibuja una gráfica que represente la relación entre la altura del nivel del agua con el tiempo.

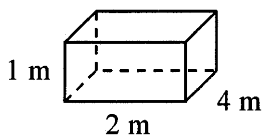
Solución

Es evidente que el agua sube con mayor rapidez en la parte honda, por ser más estrecha, que en la parte superior que es más ancha.

La altura total es de 2 m. La parte honda corresponde a 1 m y la superior también.

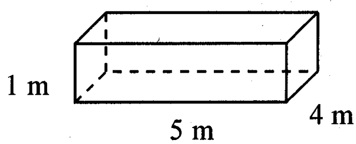


Podría detallarse un poco más.



Volumen de la parte profunda

$V = 8\ m^3$



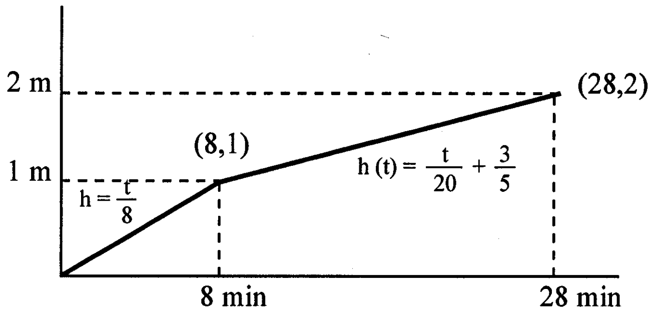
Volumen de la parte superior

$V = 20\ m^3$

El volumen total es $V = 28\ m^3$. Como tarda 28 min en llenarse, el caudal será $V = 1\ m^3/min$

Estudiemos la altura en función del tiempo:
Parte profunda: a una altura h, el volumen es: $V = 2 \times 4.h = 8h\ m^3$.
Si en 1 m^3 se tarda 1 minuto, en 8h m^2 se tarda $t = 8h \Rightarrow h = \frac{t}{8}$
Para un tiempo comprendido entre 0 y 8 minutos:

Si $0 \leq t \leq 8 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{t}{8}$



La expresión de h(t) en el intervalo comprendido entre 8 y 28 minutos, puede obtenerse por ser lineal (caudal constante):

$h(t) = at + b$

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Si } t = 8 & \Rightarrow & h = 1 & \Rightarrow & 1 = 8a + b \\ \text{Si } t = 28 & \Rightarrow & h = 2 & \Rightarrow & 2 = 28a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 20a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{20} \\ b = 1 - \dfrac{8}{20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

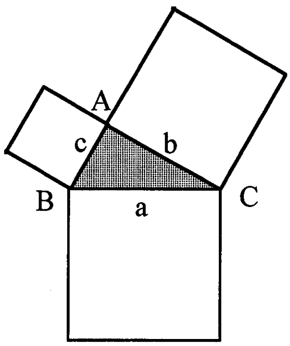
$$h(t) = \frac{1}{20}t + \frac{3}{5}$$

V OLIMPIADA 1996

Fase comarcal

Problema 1. Rodeando un triángulo rectángulo

Sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC se construyen cuadrados hacia el exterior. El cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene 169 cm^2, y el construido sobre el cateto menor 25 cm^2.



a) Halla el área del cuadrado construido sobre el otro cateto, explicando en qué te basas para hacerlo.

b) Halla el área del triángulo rectángulo ABC.

c) Si en lugar de construir cuadrados, construyes semicírculos cuyos diámetros sean los lados del triángulo rectángulo, ¿qué relación existe entre las áreas de estos semicírculos? Justifica la respuesta.

Solución

a) El teorema de Pitágoras afirma que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Designando por S el área pedida: $169 = 25 + S \quad \Rightarrow \quad S = 144 \text{ cm}^2$

b) Si tomamos como base un cateto, la altura será el otro cateto.

$$b^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad b = 12$$
$$c^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

Entonces el área del triángulo será: $\frac{12 \text{ x } 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$

c) El semicírculo de diámetro a tiene de área $\pi.\frac{a^2}{8}$ cm^2

El de diámetro b tiene por área $\pi.\frac{b^2}{8}$ cm^2

Y el de diámetro c : $\pi.\frac{c^2}{8}$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \pi.\frac{a^2}{8} = \pi.\frac{b^2}{8} + \pi.\frac{c^2}{8}$$

Entonces el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos.

Problema 2. Cubicando un cajón

Un cajón tiene 120 cm de largo, 80 cm de ancho y 50 cm de alto. Se quiere llenar totalmente de cubos.

a) ¿Puede llenarse con cubos de 5 cm de arista? ¿Y de 3 cm?

b) ¿Cuántos cubos cabrían en caso de poder llenarse?

c) ¿Cuál es el lado del mayor cubo con el que puede llenarse el cajón? ¿Cuántos de estos cubos lo llenarían?

Solución

a) Al ser 5 divisor del largo, ancho y alto, puede llenarse el cajón con cubos de arista 5.

Como 3 no es divisor de 80, ni de 50, no puede llenarse con estos cubos.

b) A lo largo caben: $\frac{120}{5} = 24$ cubos.

A lo ancho: $\frac{80}{5} = 16$ cubos.

A lo alto: $\frac{50}{5} = 10$ cubos.

En total habrá: 24 x 16 x 10 = 3.840 cubos.

Otra forma de hacerlo sería así:

Volumen del cajón: 120 x 80 x 50 cm^3.

Volumen de cada cubo: 5 x 5 x 5 cm^3.
El número de cubos que lo llenan será $\frac{120 \times 80 \times 50}{5^3} = 3.840$ cubos.

c) El mayor cubo que llena el cajón debe verificar que su arista sea el mayor divisor posible del largo, del ancho y del alto, es decir, el máximo común divisor de 120, 80 y 50, que es 10.

En este caso caben $\frac{120 \times 80 \times 50}{10^3} = 480$ cubos.

Problema 3. La fuente

En un pueblo extremeño van a instalar una fuente de esas que tienen un surtidor de agua. Para que no haya mucho gasto de agua, el mecanismo permite que el agua salga y vuelva al depósito para ser nuevamente impulsada al exterior.

El depósito, cuya capacidad es de 200 litros, tarda 10 minutos en llenarse, y luego, durante 4 minutos, el agua es impulsada al exterior.

a) Si el depósito está vacío, ¿qué cantidad de agua habrá en el depósito a los 2 minutos? ¿Y a los 12 minutos?

b) Haz una gráfica en la que se relacione la cantidad de agua que hay en el depósito con el tiempo, para un período de media hora.

c) ¿Cada cuánto tiempo se repite la forma de la gráfica?

Nota: toma el tiempo en el eje de abscisas y la cantidad de agua en el de ordenadas.

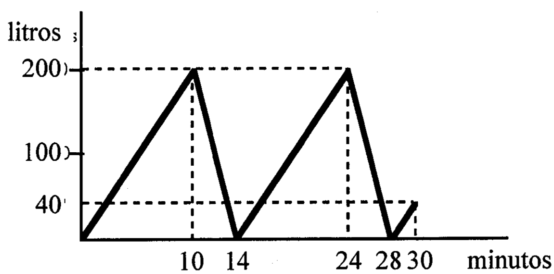
Solución

a) Cada minuto entran 20 litros, luego a los 2 minutos habrán entrado 40 litros.

Cada minuto salen $\frac{200}{4} = 50$ litros, luego a los 12 minutos habrá:

$$200 - 100 = 100 \text{ litros.}$$

b)



c) La gráfica es periódica y se repite cada 14 minutos.

Problema 4. Añadiendo cuadrados

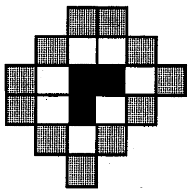
La figura que ves consta inicialmente de tres cuadrados negros. En un primer paso se añaden los siete cuadrados blancos; en un segundo paso se añaden los sombreados, y así seguiríamos añadiendo cuadrados con distinto colorido.

a) ¿Cuántos cuadrados tendrás que añadir en un tercer paso?

b) ¿Cuántos cuadrados se añadirán en el vigésimo paso?

c) ¿Cuántos cuadrados se han añadido después de veinte pasos?

Solución



a) 1° paso: se añaden 7.
2° paso: se añaden 11.
3° paso: se añaden 15.

b) Podemos establecer una relación entre los pasos y los cuadrados añadidos y elaborar la siguiente tabla:

En el paso n se añadirán 7 + 4 (n - 1), luego en total se habrán añadido:

N° de pasos	1	2	3	4	5
N° de cuadros	7	11	15	19	23

$$7 + 4 \times 19 = 83 \text{ cuadrados.}$$

c) Después de 20 pasos se habrán añadido en total:

$$7 + 11 + 15 + 19 + ... + 83 = 900 \text{ cuadrados.}$$

Fase regional. Hervás

Problema 1. Un gran encestador

Johnny Rogers es uno de los más efectivos lanzadores de triples de nuestro equipo representativo en la liga de baloncesto ACB. Su porcentaje de tiros triples en un entrenamiento ha sido el 83,3333.... por ciento.

a) ¿Cuántos encestes conseguirá en 30 lanzamientos?

b) ¿Cuál ha de ser el mínimo número de lanzamientos para alcanzar este porcentaje?

c) ¿Cuántos intentos transformó en este caso?

Solución

a) Si expresamos $83,\widehat{3}$ en forma de fracción, resulta $\frac{250}{3}$, y el $\frac{250}{3}$ % de 30 es

$$\frac{250}{8} \text{ x } \frac{30}{100} = 25$$

b) Sea n el número pedido.

$$\frac{250}{3} \text{ x } \frac{n}{100} = \frac{5n}{6}$$

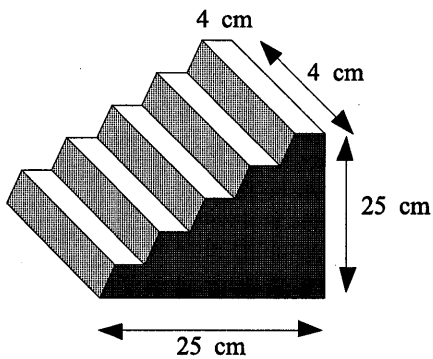
Para que esta fracción sea un número entero, el mínimo valor de n deberá ser 6.

c) Si n = 6, será $\frac{5n}{6} = 5$

Encestó 5 de 6 lanzamientos.

Problema 2. Cuidado con el escalón

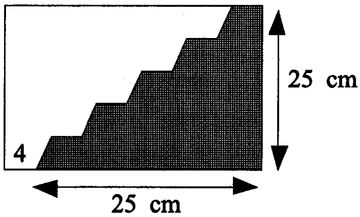
Calcula el volumen de esta escalera:



Solución

Añadiendo a la escalera otra igual, pero invertida, se forma un prisma de base rectangular, de área 29 x 25 cm^2, y de altura 49 cm.

La figura representa un corte transversal.



El volumen de este prisma es 29 x 25 x 49 cm^3.

Y el volumen de la escalera será la mitad: $\frac{29 \times 25 \times 49}{2} = 17.762{,}5 \ cm^3$

Problema 3. Sumas curiosas
Observa las siguientes igualdades:

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$$

a) Escribe las dos igualdades siguientes.

b) ¿Es cierta para cualquier caso? Intenta demostrarlo.

Solución

a) Las dos igualdades siguientes seràn:

$$5^2 + 6^2 + 30^2 = 31^2$$
$$6^2 + 7^2 + 42^2 = 43^2$$

b) En general sería: $n^2 + (n + 1)^2 + [n \times (n + 1)]^2 = [n \times (n + 1) + 1]^2$
Desarrollamos ambos miembros:

1° miembro: $n^2 + n^2 + 2n + 1\ n^2 (n^2 + 2n + 1) = n^4 + 3n^2 + 2n^3 + 2n + 1$

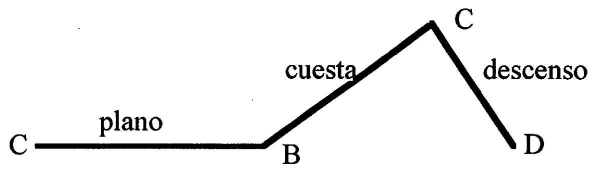
2° miembro: $n^2 (n + 1)^2 + 2n(n + 1) + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 1 =$

$$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

Vemos que son iguales.

Problema 4. De excursión

Una persona va a realizar una excursión de 28,4 km desde un lugar A a otro D, pasando por B y C. La velocidad es constante en cada uno de los tres tramos; la distancia de A a B es de 15 km y el perfil de la ruta es el de la figura.



El recorrido se hace en menos de tres cuartos de hora.

Después de 6 minutos ha recorrido 4,5 km.
A los 22 minutos ha recorrido 15,9 km.
A los 30 minutos ha recorrido 19,5 km.
A los 40 minutos está en C y llega a D a los 44 minutos.

Se pregunta:

1) ¿Qué distancia ha recorrido a los 12 minutos?
2) ¿Cuánto tarda en llegar a B?
3) ¿Qué distancia ha recorrido a los 36 minutos?
4) ¿Qué distancia hay entre A y C?
5) ¿A qué velocidad en km/h ha recorrido el tramo CD?
6) Expresar la distancia (en km.) en función del tiempo (en minutos) y representarla gráficamente.

Solución

1) Como la velocidad en AB es constante, a los 12 minutos ha recorrido el doble que a los 6, es decir, 9 km.

2) En el tramo AB su velocidad es $\frac{4,5}{6} = 0,75$ km/min , por lo que el tiempo que tarda en recorrerlo es $\frac{15}{0,75} = 20$ minutos.

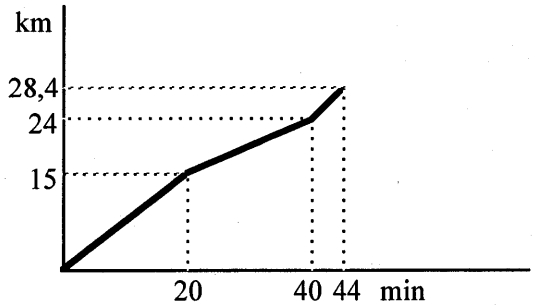
3) Desde el instante t = 20 minutos al t = 22 minutos recorre 15,9 - 15 = 0,9 km; por tanto, la velocidad en el tramo BC es $\frac{0,9}{2} = 0,45$ km/min

En el minuto 36 ha recorrido 15 + 0,45.(36 - 20) = 22,20 km.

4) La distancia entre A y C es la distancia entre A y B más la que recorre entre el minuto 20 y el 40: 15 + 0,45 20 = 24 km.

5) La distancia CD es de 28,4 - 24 = 4,4 km, y la recorre en 44 - 40 minutos; su velocidad en este tramo es de $\frac{4,4}{4} = 1,1$ km/min = 66 km/h

6) He aquí la gráfica:

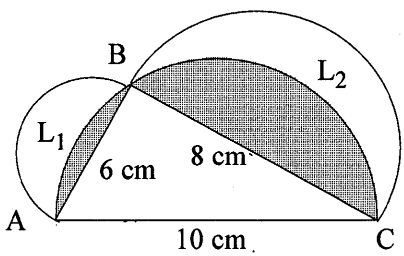


VI OLIMPIADA 1997

Fase comarcal

Problema 1. Las lúnulas.

Hipócrates de Chios, matemático griego del siglo VI antes de Cristo, trabajó intensamente en el problema de cuadrar el círculo, es decir, construir un cuadrado cuya área fuera igual a la del círculo. Como consecuencia de estos trabajos fue el primero que enseñó a cuadrar "lúnulas", que son figuras planas limitadas por arcos de circunferencia de radios distintos, como las zonas L_1 y L_2 de la siguiente figura:



Los tres semicírculos de la figura tienen por diámetros respectivos la hipotenusa y los catetos del triángulo ABC, rectángulo en B.

Hallar:

a) El área del triángulo ABC, cuyos lados tienen los valores que se indican en la figura.

b) El área de la zona punteada.

c) Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas L_1 y L_2 es igual al área del triángulo.

Solución

a) El triángulo ABC es rectángulo en B y su área es: $S = \dfrac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

b) El área de la zona punteada equivale a la del semicírculo de diámetro la hipotenusa menos la del triángulo, es decir:

$$S = \frac{1}{2}\ \pi .\ 5^2 - 24 = \frac{25\ \pi - 48}{2} \cong 15{,}27 \text{ cm}^2$$

c) la suma de las áreas de las lúnulas L_1 y L_2 equivale a la suma de las áreas de los semicírculos de diámetros los lados AB y CB, menos la de la zona punteada, así:

$$S = \frac{1}{2}\pi . 3^2 + \frac{1}{2}\pi . 4^2 - \frac{25\pi - 48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Problema 2. La escalera.
Una escalera tiene muchos peldaños, más de 50 pero menos de 100.

Si los subimos de 2 en 2, sobra 1 peldaño; si los subimos de 3 en 3, sobran 2; si de 4 en 4, sobran 3; si de 5 en 5, sobran 4.

¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

Solución

Al contar los peldaños de 2 en 2 sobra 1; esto indica que el número de ellos es impar.

Contándolos de 5 en 5, sobran 4; luego el número debe terminar en 4 ó en 9. En 4 no puede ser porque es impar.

El número de peldaños será: 59, 69, 79, 89 ó 99.

Como debe ser múltiplo de 3 más 2 y múltiplo de 4 más 3, el único número que verifica estas condiciones es el 59.

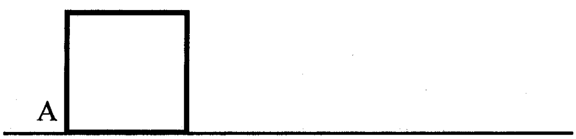
Podemos hacerlo de esta otra manera:

El número de peldaños de la escalera debe ser un múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 5, menos una unidad, comprendido entre 50 y 100.

El mínimo común múltiplo de los números 2, 3, 4 y 5 es 60, siendo la cantidad pedida 60 - 1 = 59.

Problema 3. La rueda cuadrada.
Lo normal es usar ruedas redondas ¿verdad?

Bueno, pues vamos a suponer que se nos ha ocurrido investigar sobre una rueda cuadrada, como la de la figura.



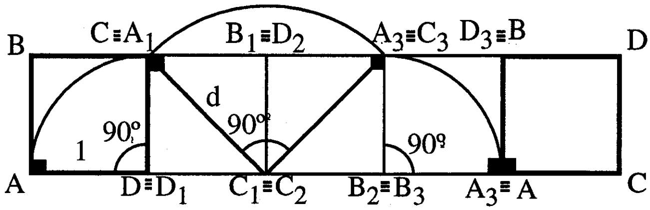
Fíjate en el vértice A.

Si la rueda empieza a dar vueltas, sin deslizarse, dibuja la trayectoria que describe el punto A hasta que vuelve a estar en el suelo.

Calcula la longitud de dicha trayectoria, sabiendo que el lado de la rueda mide 1 metro.

Solución

Si nos fijamos en la figura:



el punto A recorre los arcos AA_1, A_1A_2 y A_2A_3, que tienen

I) AA_1 : centro en D, radio 1 y amplitud $\pi/2$ rad.

II) A_1A_2 : centro en C_1, radio la diagonal d y amplitud $\pi/2$ rad.

III) A_2A : centro B_2, radio 1 y amplitud $\pi/2$ rad.

La longitud total es:

$$L = 2.\frac{\pi}{2}.1 + \frac{\pi}{2}.d = \frac{\pi}{2}(21 + d)$$

Si el lado del cuadrado mide 1 metro, la longitud total es:

$$L = \frac{\pi}{2}(21 + d) = \frac{\pi}{2}(2.1 + \sqrt{2}) \approx 5{,}36 \text{ m}$$

Problema 4. Adivinando la carta.
El Gran Mago me dijo:

- Escoge una carta de esta baraja española.

El As cuenta como 1, el Rey como 10, el Caballo como 9, la Sota como 8, y las demás cartas como su número indica.

Dobla el valor de tu carta, añade 1 al número que resulta, multiplica el resultado por 5.

Si tu carta es de Oros añade 4; si es de Copas añade 3; si de Espadas añade 2, y si es de Bastos añade 1.

Dime el resultado.

Yo le dije 39 y el Gran Mago me dijo rápidamente:

-Tu carta es el 3 de Oros.
Si el resultado fuera 57 ¿cuál sería la carta?
¿Y si fuera 106?

Explica cuál es el procedimiento para averiguar la carta.

Solución

Después de hacer las operaciones que indica el Mago, resulta un múltiplo de 5 más el número correspondiente al palo (1, 2, 3 ó 4).

Para saber qupe carta corresponde al 57, buscamos el múltiplo de 5 más próximo por defecto a 57; es el 55.

Como 57 = 55 + 2, vemos que se trata de espadas.

55 se divide por 5, da 11, se le resta 1 y se divide por 2, obteniendose 5, que es el número de la carta.

Se trata, pues, del 5 de espadas.

Procediendo de igual manera con 106 (105 + 1), vemos que corresponde a bastos. Dividiendo 105 por 5, restando 1 y dividiendo por 2, se obtiene 10.

Es, por tanto, el 10 de bastos.

Podemos resolverlo de esta otra manera:

Si "x" es el número correspondiente a la carta e "y" el que se suma según el palo, la operación que realiza el Mago es:

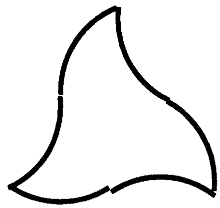
$$(2x + 1).5 + y = 10x + 5 + y$$

resultando el número de "x" decenas y "5 + y" unidades. Por tanto, el número de decenas indica la carta y las unidades menos 5 el palo.

Fase regional. Don Benito

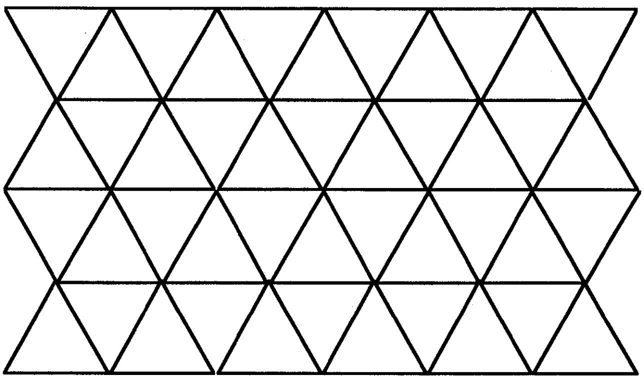
Problema 1. Polígono nazarí.

La figura de la derecha es un polígono curvo llamado *polígono nazarí.*



Aparece en las vidrieras de la Alhambra de Granada y está formado por seis arcos de circunferencia iguales.

a) Dibuja en la trama siguiente el polígono anterior, haciendo coincidir sus vértices (puntos donde cambia su curvatura) con los de la trama.

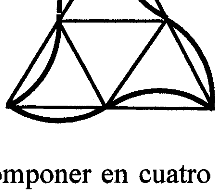


b) Si el lado de los triángulos equiláteros de la trama es 1 cm, calcula el área encerrada por este polígono.

c) Calcula el perímetro del polígono nazarí.

Solución

a) Este será el dibujo en la trama:



b) El polígono se puede descomponer en cuatro triángulos equiláteros, como se indica en la figura anterior, siendo el área del polígono cuatro veces la de uno de ellos:

$$S = 4.1.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2} = \sqrt{3}\ cm^2$$

c) El polígono nazarí se compone de arcos de circunferencia de radio 1 cm y amplitud 60°; por tanto, el perímetro es igual a la longitud de una circunferencia de radio 1 cm:

$$P = 2\pi.1 = 2\pi\ cm.$$

Problema 2. Pelotas de tenis.

El Sr. Pérez, dueño de una tienda de artículos deportivos, le dice a su mujer:

- Hice un buen negocio reduciendo el precio de las pelotas de tenis por debajo de las 200 pts. He conseguido venderlas todas.
- ¡Estupendo!, le contesta la mujer, ¿qué ganancia hemos tenido?
- No lo sé. Pero la venta total ha supuesto un importe de 60.377 pts.

Suponiendo que el precio de cada pelota es un número entero, en cuánto las vendió? ¿Cuántas pelotas había?

Solución

Si llamamos n al número de pelotas y p al precio de cada una:

$$n.p = 60n377 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{60.377}{n} = \text{número entero}$$

Por tanto, n es divisor de 60.377.

Ahora bien, siendo un 7 la última cifra del importe total, ha de provenir del producto 1 x 7 ó 3 x 9 . No tenemos más que buscar algún número primo que termine en cualquiera de estas cifras, que divida a 60.377 y sea menor que 200.

El único es 173 y, por tanto, el número de pelotas vendidas es 349.

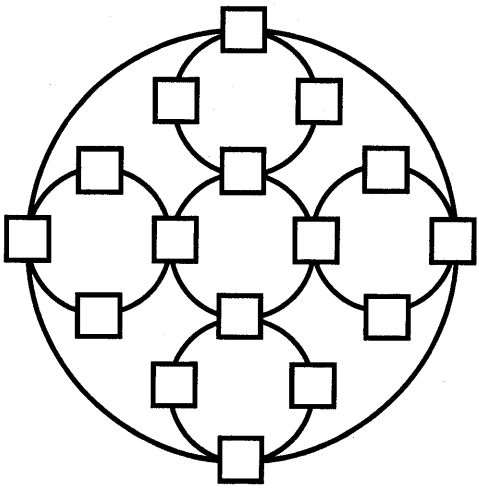
Está claro que el problema hubiese podido ser indeterminado, si los factores primos del número dado hubiesen sido más numerosos y tales que dos al menos fuesen inferiores a 200.

Problema 3. Círculos numéricos.

En el dibujo adjunto hay 6 círculos, y asociados a cada uno hay cuatro cuadraditos, algunos compartidos por dos de los círculos.

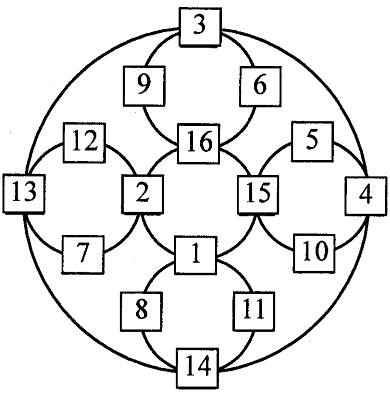
En total hay 16 cuadraditos que debes sustituir por los números naturales 1, 2, 3, ..., 16, sin repetir ninguno y de forma que los cuatro números de cada círculo sumen 34.

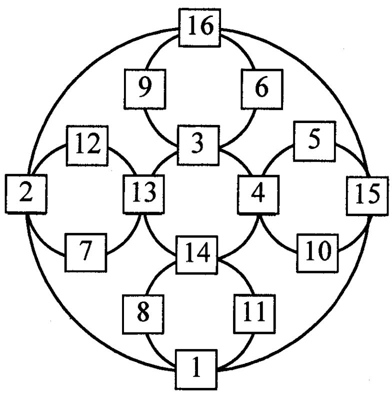
Si encuentras más de una solución, escríbela.

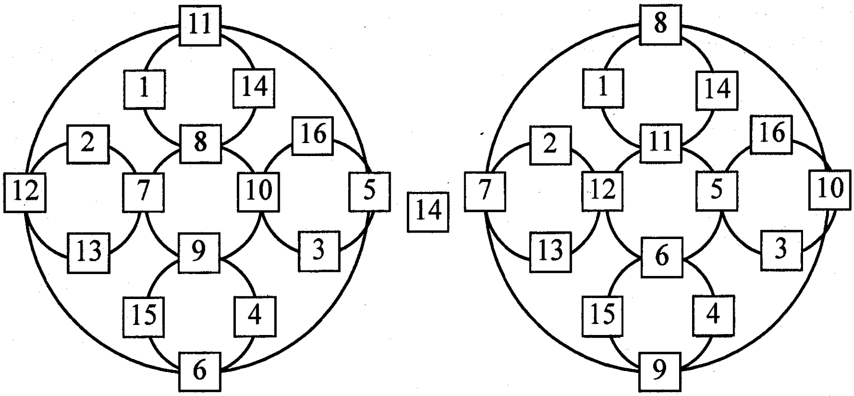


Solución

Se dan la cuatro soluciones siguientes:







Problema 4. La noria de la feria.

Una noria tiene 6 metros de radio y tarda 1 minuto en dar una vuelta completa. Fíjate en el carrito que al principio está en el punto más bajo.

La velocidad de la noria es constante.

a) A los 45 segundos de iniciarse el paseo, ¿qué longitud ha recorrido el carrito? ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra?

b) Contesta a las mismas preguntas a los 75 segundos de iniciado el paseo.

c) Construye una gráfica que relacione la altura a la que se encuentra el carrito con el tiempo transcurrido desde el comienzo hasta los 3 minutos.

d) ¿Cuántas veces está el carrito a 8 metros de altura durante esos 3 minutos?

Solución

a) En 45 segundos habrá recorrido las 3/4 partes de la longitud de la circunferencia:

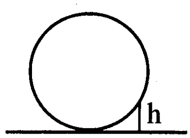
$$L = \frac{3}{4}\, 2.\pi.6 = 9\pi \text{ m.}$$

y estará a una altura del suelo igual al radio exterior, 6 m.

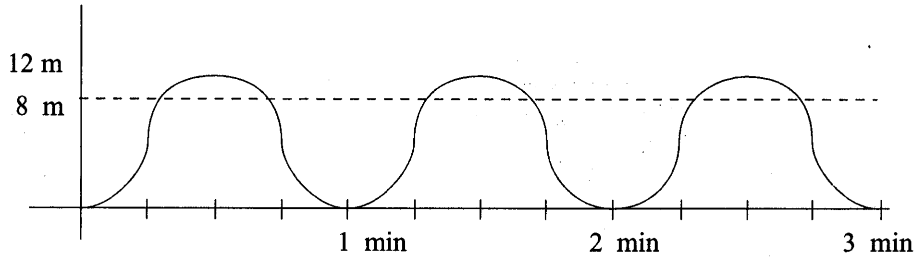
b) Los 75 segundos equivalen a un minuto más un cuarto de minuto, por lo que habrá dado una vuelta más la cuarta parte de otra; la longitud es:

$$L = 2.\pi.6 + \frac{1}{4}\, 2.\pi.6 = 12\pi + 3\pi = 15\pi \text{ m.}$$

c) El carrito va describiendo una circunferencia de radio 6 m y la altura a la que se encuentra en cada momento coincidirá con la distancia desde cada punto de la circunferencia al suelo.



Por tanto, la gráfica se compone de cuadrantes de circunferencia, colocadas como se indica, correspondientes a cada 15 segundos.



c) Según se puede ver en la gráfica, la altura de 8 cm se consigue 6 veces durante esos 3 minutos.

VII OLIMPIADA NACIONAL EXTREMADURA 1996

Valencia de Alcántara

Problema 1. Diferencia de tamaño.

En la novela "Los viajes de Gulliver" de Jonathan Swift (1726) se narra que Gulliver, el protagonista, viaja por varios países imaginarios, uno de ellos es Liliput, cuyos habitantes son todos enanos y donde todo es reducido de tamaño. Encontrándose en este último país sabemos que Gulliver es semejante a los liliputienses, siendo 12 veces más alto que cualquiera de ellos. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos colchones de liliputienses deben coserse entre sí para hacerle uno a Gulliver, de forma que pueda dormir tan cómodamente como ellos?

b) La casa media de un liliputiense tiene un solar de 0,75 m^2. ¿Cuál debe ser el solar que debe tener la casa que le construyan?

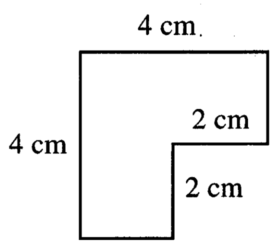
Solución

a) Cada una de las tres dimensiones del colchón de Gulliver deberá ser 12 veces mayor que las del colchón de los liliputienses. Por tanto, habrá que coser $12^3 = 1.728$ colchones.

b) El solar de Gulliver será $12^2 = 144$ veces el de los liliputienses, con una superficie de $144 \times 0.75 = 108$ m^2.

Problema 2. Polieles.

Dada la siguiente figura geométrica y tomándola como guía:

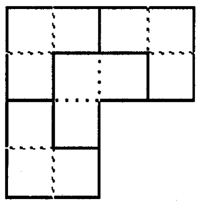


a) Dividir la figura en 4 piezas iguales.

b) Dibujar razonadamente:
* Un triángulo isósceles de la misma área que la figura dada.
* Un rombo de la misma área que la figura dada.
* Un exágono de la misma área que la figura dada. ¿Cuál es su perímetro?

Solución

a) La figura está formada por tres cuadrados, cada uno de área 4 cm^2, en total 12 cm^2; al dividir la figura en cuatro partes, nos da un área de 3 cm^2, que equivale a tres cuartos de cuadrado.



Basta quitar a cada cuadrado un cuarto, como se indica en la figura.

b) Si acoplamos dos figuras como la dada, resulta un rectángulo de 24 cm^2.

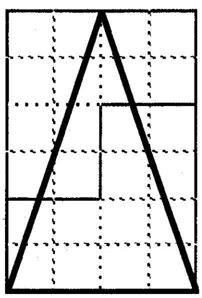


Figura 1

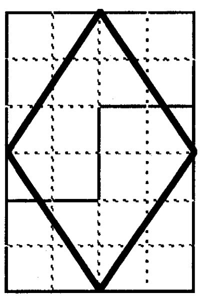


Figura 2

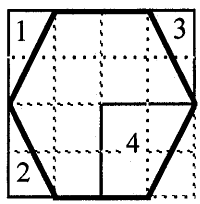


Figura 3

El triángulo isósceles dibujado (fig. 1) tiene de base 4 cm y de altura 6 cm; su área es 12 cm^2, siendo por tanto equivalente a la figura dada.

El rombo de la figura 2, de diagonales 4 y 6 cm, tiene por área el semiproducto de las diagonales; por tanto también es equivalente a la figura inicial.

Completemos la figura dada hasta formar un cuadrado de lado 4 cm. Cortando los triángulos 1, 2 y 3, y colocándolos para formar el trapecio 4, resulta un exágono no regular equivalente a la figura inicial.

Problema 3. Cubomanía.

Se tienen tres cubos coloreados de forma diferente. A cada uno de los colores se le ha asignado un valor natural.

¿Serías capaz de calcular dichos valores, sabiendo que se cumplen las siguientes condiciones?

a) La suma de los valores correspondientes a todas las caras de los cubos es 96.

b) La suma de los valores de las caras de uno de los tres cubos es 29.

¿Es única la solución?

Nota: El juego de tres cubos está pintado de la siguiente manera:
1 cubo con 4 caras amarillas y 2 verdes.
1 cubo con 3 caras amarillas y 3 verdes.
1 cubo con 1 cara amarilla, 3 verdes y 2 azules.

Solución

Llamamos A, V, Z al valor de cada cara amarilla, verde y azul, respectivamente. Como el número total de caras amarillas es 8, igual que el de verdes, y 2 caras son azules, se verifica

$$8A + 8V + 2Z = 96$$

El valor total del primer cubo es $4A + 2V$, que es par, por lo que no vale 29.

El valor total del segundo cubo es $3A + 3V$, múltiplo de 3, por lo que tampoco es el que vale 29.

Necesariamente, el que vale 29 es el tercero, y los valores de sus caras verifican $A + 3V + 2Z = 29$.

Las dos relaciones obtenidas forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que es equivalente a éste, donde A y V están en función de Z:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{28 + 5Z}{8} \\ V &= \frac{68 + 7Z}{8} \end{aligned}\right\}$$

Z debe ser menor que 10 y tal que haga naturales a los valores de A y V. El único Z posible es 4, al que corresponden los valores $A = 6$ y $V = 5$.

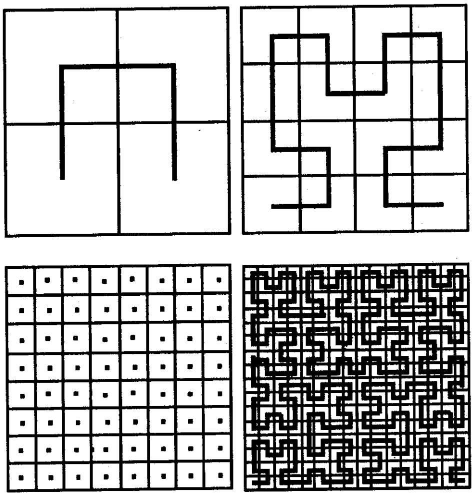
Problema 4. Curva de Hilbert.

Las siguientes poligonales están construidas uniendo los centros de los cuadrados obtenidos al ir dividiendo cada cuadrado de la fase anterior en otros cuatro cuadrados.

Cada poligonal debe empezar en el centro del cuadrado de la esquina inferior izquierda y debe terminar en el centro del cuadrado de la esquina inferior derecha.

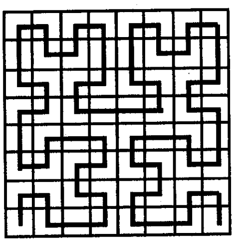
Puedes observar que cada poligonal está formada por cuatro poligonales como la de la fase anterior (reducida de tamaño) y conectándolas entre sí mediante tres segmentos de igual longitud.

En el dibujo que damos, las curvas corresponden a la 1ª, 2ª y 4ª fase. Construye el dibujo correspondiente a la 3ª fase. ¿Cuál es su longitud si el lado del cuadrado completo es de 10 cm?



Solución

El dibujo correspondiente a la tercera fase es:



Si la longitud del lado es de 10 cm, la longitud de los lados de cada cuadrado de la tercera fase vale 1,25 cm. En cada cuadrado de cada fase la porción de la curva de Hilbert que está dentro es igual a la longitud del lado, excepto los dos cuadrados de los extremos inferiores, que es la mitad.

La longitud total será 64 1,25 - 1 1,25 = 78,75 cm.

Nuestro agradecimiento a todas las personas que con su colaboración han hecho posible que estas seis convocatorias de la Olimpiada Matemática en Extremadura se hayan podido celebrar de forma ininterrupida, con una masiva participación de escolares extremeños, que han disfrutado con la matemática.

MIEMBROS DE LAS JUNTAS DIRECTIVAS:

Ricardo Luengo Gonález
Miguel Antonio Esteban
Arturo Mandly Alonso
Juan Gallardo Calderón
Luis Manuel Casas García
Lorenzo Blanco Nieto
Abilio Corchete González
Pedro J. Rodríguez Peña
Juan Manuel Fernández Caballero
María Guadalupe Álvarez Amor
Antonio Molano Romero
Claudio Sánchez Álvarez
José Antonio Sánchez Guillen
José Macías Marín
María Eugenia López Cáceres
Santos Mayo Nevado
Cipriano Sánchez Pesquero
Aguasantas Guisado Corrales
Emilia Rodríguez García
Julian Sánchez Albalá
Pedro Corcho Sánchez

COORDINADORES REGIONALES:

José Macías Marín
Cipriano Sánchez Pesquero

CORDINADORES DE ZONAS:

Pedro Bravo Sánchez
Pedro J. Rodríguez Peña
Eugenia López Cáceres
Juan Manuel Fernández Caballero
Manuel Damián Sánchez
Sotero Núñez Calvo
José Bueno Becerra
Rafael Leal Leal
José González González

Andrés Ruíz de Elvira Albandea
Pilar Cantalejo Martín
Lorenzo González García
Mariano de Vicente González
Manuel Valverde Reyes
Eduardo Corbacho Cortés
Anacleto Ramos Lineros
Félix Martos Blanco
Consolación Sánchez Sánchez
Lorenzo Muñoz Montero
Julio Rodríguez García
Ricardo Hilandera Becerra
Francisco Guerrero Pérez
Miguel Ángel Moreno Redondo
Esteban Díaz Barco
Luis Morales Vizcaino

RESOLUTORES DE PROBLEMAS:
Miguel Antonio Esteban
Lorenzo González García
Mercedes López Muñoz
Antonio Molano Romero
Pedro Jesús Rodríguez Peña
Angelines Rubio González
Claudio Sánchez Álvarez
Mariano de Vicente González