

Problemas IX y X
Olimpiadas Matemáticas
(EGB y ESO) 1988-1999

Problemas IX y X
Olimpiadas Matemáticas
(EGB y ESO) 1988-1999

Miguel Antonio Esteban
Lorenzo González García
Antonio Molano Romero
Pedro J. Rodríguez Peña
Mariano de Vicente González

Miembros de la Asociación de
Profesores de Matemáticas
“HALLEY” de Cáceres

JUNTA DE EXTREMADURA
Consejería de Educación, Ciencia y Tecnología
Dirección General de Ordenación, Renovación y Centros
Mérida, 2002

© Consejería de Educación, Ciencia y Tecnología 2002
© *Problemas IX y X Olimpiadas Matemáticas (EGB y ESO) 1988-1999*
de la Asociación de Profesores de Matemáticas "HALLEY" de Cáceres

Edita:

JUNTA DE EXTREMADURA

Consejería de Educación, Ciencia y Tecnología
Dirección General de Ordenación, Renovación y Centros
Mérida. 2002

Colección:

Recursos Didácticos

Diseño de línea editorial:

JAVIER FELIPE S.L. (Producciones & Diseño)

I.S.B.N.:

84-95251-88-4

Depósito Legal:

BA-779-2002

Fotomecánica e Impresión:

Artes Gráficas REJAS (Mérida)

Índice

Presentación	9
-------------------------------	---

IX OLIMPIADA 1998

Albacete	13
Aragón	22
Asturias	31
Canarias	43
Cantabria	51
Castilla y León	55
Extremadura	78
Madrid	86
Murcia	89
Navarra	93
Nacional Almería	97

X OLIMPIADA 1999

Albacete	103
Andalucía	115
Andorra	123
Aragón	131
Asturias	137
Canarias	147
Cantabria	155
Castilla-La Mancha	159
Castilla y León	166
Comunidad Valenciana	189
Extremadura	206
Madrid	212
Murcia	217
Navarra	220
Nacional Albacete	223

Índice por materias	229
--------------------------------------	-----

Presentación

La Consejería de Educación, Ciencia y Tecnología de la Comunidad Autónoma de Extremadura, consciente del interés que tiene el certamen para las enseñanzas Matemáticas: “La Olimpiada Matemática”, para los profesores/as de nuestra Región, y del interés que ha despertado en nuestros alumnos y alumnas, ha asumido como propia la edición de esta actividad formativa en la que siempre ha colaborado con gran entusiasmo la Sociedad Extremeña de Profesores de Matemáticas “Ventura Reyes Prosper”, así como diferentes instituciones locales, provinciales y autonómicas.

Desde sus comienzos la participación de nuestros alumnos/as, ha sido muy elevada, destacando el nivel de preparación de los mismos, que ha tenido su reflejo en las dos medallas de oro logradas hasta la fecha en la fase nacional.

Con la publicación de este libro queremos dar un paso más en el impulso hacia esta área instrumental básico, que tanta importancia tiene en el desarrollo del currículum de nuestra enseñanza, no sólo por su propio valor formativo, sino también por favorecer el desarrollo de actividades y valores fundamentales en el conocimiento humano.

El libro proporciona una amplia y diversa colección de ejercicios que por su procedencia se diferencian de los que se pueden encontrar en los manuales y textos escolares. Con ello se aporta a los profesores un material original que ayuda a hacer de las matemáticas un entretenimiento, al tiempo que se ofrece a los alumnos soluciones detalladas de problemas, lo que posibilita un estudio directo de éstas. El uso en las clases de E.S.O. de estos materiales lleva a los alumnos a realizar razonamientos matemáticos a través de juegos, venciendo su posible rechazo hacia esta materia, al mismo tiempo permitirá el descubrimiento de los alumnos especialmente dotados y facilitará la atención a la diversidad.

Al final del libro hay una clasificación de los problemas según los bloques de contenidos a que se refieran, lo que facilita su uso en momentos puntuales del desarrollo de la programación.

Espero que con este trabajo, nuestros profesores y alumnos amantes de las Matemáticas, encuentren nuevas razones para continuar colaborando con su esfuerzo y dedicación en la consolidación de las Olimpiadas Matemáticas, convirtiendo cada nueva convocatoria en otro éxito.

Luis Millán Vázquez de Miguel

Consejero de Educación, Ciencia y Tecnología

IX OLIMPIADA
1998

ALBACETE 1998
CICLO 12-14
FASE SEMIFINAL

Problema 1. LA GRAN FUGA

En una cárcel hay 32 presos repartidos en ocho celdas de planta cuadrada. En cada celda de las esquinas hay un preso y en cada una de las centrales hay siete presos.

1	7	1
7		7
1	7	1

El carcelero cuenta cada noche los presos que hay en cada hilera y se asegura de que sean nueve. Una vez hecho esto se retira a su oficina.

Cierta día se fugan cuatro internos. Cuando el carcelero hace su recuento nocturno no se percata de nada, pues los presos siguen sumando nueve por hilera.

¿Qué hicieron los presos para burlar al carcelero? ¿Cómo se situaron en las celdas?

Tres días más tarde se fugan otros cuatro presos. Esta vez tampoco el carcelero se dio cuenta de nada al contar.

¿Cómo volvieron a burlar al carcelero?

Una semana después, el carcelero realizó su habitual recuento, le salieron las cuentas y volvió tranquilo a su oficina. A la mañana siguiente una inspección del alcaide descubrió que sólo quedaban 20 presos.

¿Qué hicieron los reclusos para burlar por tercera vez al ingenuo carcelero?

¿Hubiera sido posible una cuarta fuga?

Solución

En total ha habido 3 fugas y en cada una se han fugado 4 presos.

1ª fuga	2ª fuga	3ª fuga																											
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">5</td><td></td><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> </table>	2	5	2	5		5	2	5	2	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td></td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> </table>	3	3	3	3		3	3	3	3	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> </table>	4	1	4	1		1	4	1	4
2	5	2																											
5		5																											
2	5	2																											
3	3	3																											
3		3																											
3	3	3																											
4	1	4																											
1		1																											
4	1	4																											

Se puede plantear otra fuga de una o de dos personas, como se indica a continuación:

4	0	5
1		0
4	1	4

4	0	5
0		0
5	0	4

El número mínimo de presos que pueden quedar es 18.

La clave está en que los presos de las esquinas son contados dos veces.

Problema 2. SELLOS

Un coleccionista gasta 100 pesetas en comprar sellos de 1, 4 y 12 pesetas. ¿Cuántos sellos serán de cada clase si en total ha comprado 40?

Solución

Sean x , y , z el número de sellos de 1 pta, de 4 pts y de 12 pts, respectivamente.

Se verifican las siguientes relaciones:

$$x + 4y + 12z = 100$$

$$x + y + z = 40$$

Restando miembro a miembro: $3y + 11z = 60 \Rightarrow y = \frac{60 - 11z}{3}$

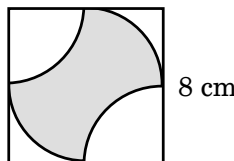
Como y ha de ser un número natural, $60 - 11z$ ha de ser múltiplo de 3 y, como 60 lo es, deberá serlo $11z$. Esto ocurre sólo cuando $z = 3$.

Entonces $y = 9$, $x = 28$.

Por tanto, el coleccionista ha comprado 28 sellos de 1 pta, 9 de 4 ptas y 3 de 12 pts.

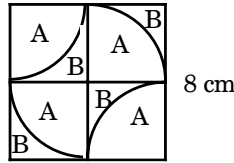
Problema 3. MOSAICO

En el dibujo aparece una pieza que se encuentra en los mosaicos de la Alhambra. Ya sabes que estas piezas se forman a partir de polígonos regulares que rellenan el plano, siendo iguales en superficie a los polígonos de los que proceden. Averigua el perímetro y el área de la figura que aparece sombreada.



Solución

La figura está formada por 4 piezas iguales del tipo A y otras 4 también iguales del tipo B.



La figura sombreada está formada por 2 del tipo A y 2 del tipo B, luego su área será igual a la mitad del área del cuadrado inicial: $\frac{64}{2} = 32 \text{ cm}^2$.

Cada arco de los que limitan la figura es un cuadrante de circunferencia, luego los cuatro arcos forman una circunferencia de radio $\frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$.

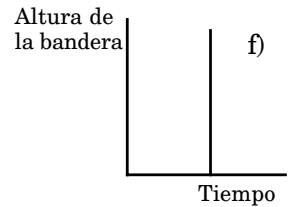
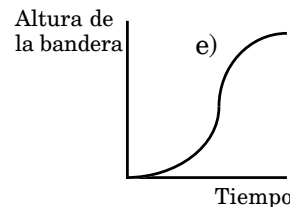
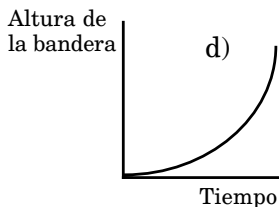
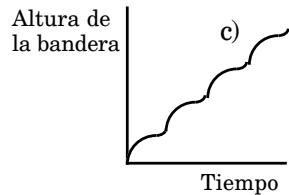
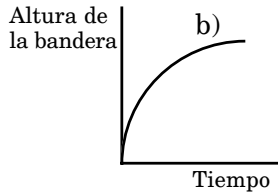
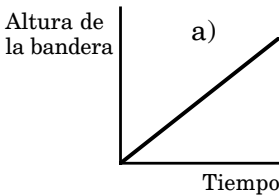
El perímetro valdrá: $2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ cm} \approx 25,13 \text{ cm}$.

CICLO 14-16
FASE SEMIFINAL

Problema 1. IZANDO LA BANDERA

Cada mañana, en el campamento de verano, el acampado más joven tiene que izar la bandera hasta lo alto del mástil.

- I) Explica en palabras qué significa cada una de las siguientes gráficas.
- II) ¿Qué gráfica muestra la situación de forma más realista?
- III) ¿Qué gráfica es la menos realista?



Solución

I) La gráfica a) indica que la velocidad de subida de la bandera es uniforme durante todo su izado.

La gráfica b) indica que empieza muy deprisa y la velocidad va disminuyendo durante todo el tiempo.

La gráfica c) muestra que el izado se realiza a tirones.

En la d) sucede lo contrario que en la b), empieza muy lento y la velocidad de subida va aumentando.

En la e) hay dos fases distintas; en la primera mitad se comporta como en d) y en la segunda como en b).

Por último, en f) la subida de la bandera es instantánea.

II, III) La gráfica f) es la menos realista; podría decirse que imposible por exigir una velocidad infinita.

El ritmo constante de a) parece impropio del “acampado más joven”.

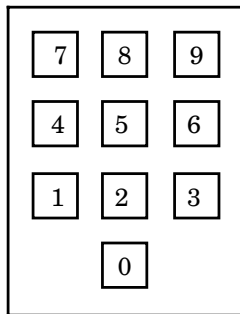
Si este joven sólo lo hace un día, lo más fácil es que lo haga a tirones, tal como está representado en la c).

Problema 2. TECLADO TRUCADO

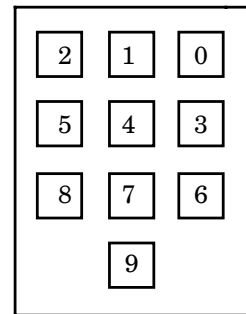
La hermana pequeña de Dani ha cambiado la clave de la calculadora nueva que tiene su hermano, sin decirle nada.

Las claves originales y las nuevas son las que se muestran en los siguientes dibujos:

Claves originales



Claves cambiadas



Así pues, si Dani presiona la tecla en la que hay un 4, el número que entra realmente en la calculadora es un 5 que, por otra parte, es lo que aparece en la pantalla. Sin darse cuenta de este desmadre, Dani mete en la calculadora un número primo p de dos dígitos, y otro número primo q de un dígito (utilizando lo que él ve, claro) y ordena sumarlos. Sorprendentemente, la respuesta que aparece es ¡la respuesta correcta!

¿Sabrías decir qué dos números primos p y q introdujo Dani en su calculadora?

Solución

Fijámonos en las dos claves, los números correspondientes a la misma tecla suman 9, por lo que si se introduce el número $10x+y$ en la calculadora con las claves cambiadas, aparecería el número $10(9-x) + (9-y) = 99 - (10x+y)$.

Si sumamos un número z de una cifra, sería $9-z$; se debe cumplir que $99 - (10x+y) + 9 - z = 10x+y+z \Rightarrow 10x+y+z = 54$

Siendo ambos números primos, los casos posibles son:

$$z = 1 \Rightarrow 10x + y = 53$$

$$z = 7 \Rightarrow 10x + y = 47$$

Problema 3. PAGO EXACTO Y PUNTUAL

Un hombre tomó una posada por treinta días, por el precio de un denario cada día. Este huésped no tenía dinero, sino cinco piezas de plata, que entre todas ellas valían treinta denarios. Con estas piezas pagaba cada día la posada y no le quedaba debiendo nada a la posadera, ni ella a él.

¿Puedes decir cuántos denarios valía cada pieza y cómo se pagaba con ellas?

Solución

Una de las piezas ha de ser de 1 denario, con la que se pagaría el primer día.

Para pagar el segundo día usaríamos otra pieza de 2 denarios y nos devolvería la de 1 denario, con la que pagaríamos el tercer día, y la posadera tendría 3 denarios.

El cuarto día pagamos con una pieza de 4 denarios y devuelve las dos de 1 y 2 denarios.

Seguiríamos pagando con la de 1, después la de 2 y devuelven 1, y así sucesivamente.

El octavo día pagaríamos con una de 8 denarios y nos devuelven las de 1, 2 y 4. Así podría pagar hasta el día 15.

El día 16 paga con una de 15 y le devuelven las de 2, 4 y 8, y así sucesivamente.

En resumen, las piezas deben ser de 1, 2, 4, 8 y 15 denarios.

CICLO 12-14
FASE FINAL

Problema 1. CICLISTAS

Un ciclista sale de su casa para dar una vuelta con la bicicleta en plan tranquilo. Hace un circuito dividido en cuatro partes, todas ellas de igual longitud. La primera parte es una ligera cuesta arriba y en ella consigue una veloci-

dad de 10 km/h. En la segunda parte el terreno se hace más empinado y tras una buena sudada, logra coronar el puerto con una media de 5 km/h. A partir de ahí todo es fácil, ya que va cuesta abajo a 30 km/h. Ya sólo queda la parte final en la que consigue una media de 15 km/h.

¿Cuál ha sido la velocidad media del ciclista en todo el trayecto?

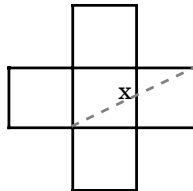
Solución

Como los trayectos son todos iguales, siendo t_1, t_2, t_3 y t_4 los tiempos invertidos en su realización, tenemos: $t_1 = \frac{L}{10}, t_2 = \frac{L}{5}, t_3 = \frac{L}{30}$ y $t_4 = \frac{L}{15}$, siendo L la longitud de cada trayecto.

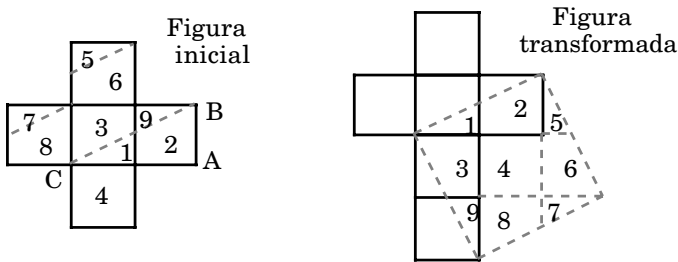
La velocidad media será
$$v = \frac{4L}{\frac{L}{10} + \frac{L}{5} + \frac{L}{30} + \frac{L}{15}} = \frac{4}{\frac{12}{30}} = 10 \text{ km/h.}$$

Problema 2. LA CRUZ

Si la longitud x es de 6 dm, ¿cuánto vale el área de la cruz de la figura, formada por cinco cuadrados?



Solución



Por tanto, la figura dada es equivalente a un cuadrado de lado 6 dm; luego el área valdrá 36 dm².

Otra forma.

Designando por a el lado de cada cuadrado y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC:

$$a^2 + (2a)^2 = 36 \Rightarrow a^2 = \frac{36}{5}$$

El área de la cruz, formada por cinco cuadrados, valdrá 36 dm².

Problema 3. ¡FELIZ CUMPLEAÑOS!

¿Puedes determinar la edad de las personas cuyo número de años en 1998 es igual a la suma de los valores de las cifras del año de su nacimiento?

Solución

Supongamos que el año de nacimiento es de la forma $19ba$.

Según el enunciado, se tiene que cumplir que $1998 - 19ba = 10 + a + b$, es

decir: $98 - (10b + a) = 10 + a + b \Rightarrow 11b = 88 - 2a \Rightarrow b = 8 - \frac{2a}{11}$.

La única solución válida es $a = 0, b = 8$.

El año de nacimiento es 1980. En 1998 tendrá 18 años, que coincide con la suma $1 + 9 + 8 + 0$.

**CICLO 14-16
FASE FINAL**

Problema 1. HACIENDO MARCAS

Éste es un juego para dos jugadores en un tablero cuadrado con número fijo de filas y de columnas. El juego comienza en la esquina inferior izquierda, donde el primer jugador pone su marca. En cada turno uno de los dos jugadores puede poner su marca en un cuadrado directamente encima, a la derecha o diagonalmente encima y a la derecha de la última marca hecha por su oponente. El juego continúa de esta forma, y gana el jugador que consiga poner su marca en la esquina superior derecha. Encuentra una estrategia ganadora.

Solución

Tablero 2x2

	2
1	

Gana el segundo.

Tablero 3x3

1e	2d	1d
2e	2D	2e
1	2d	1d

El jugador segundo tiene 3 opciones: 2e (encima), 2D (diagonal) y 2d (derecha).

- Si 2e \Rightarrow 1e y obliga a 2d, ganando 1 (figura).
- Si 2D \Rightarrow caso 2x2, 1 juega como segundo y gana (figura).
- Si 2d \Rightarrow 1d y obliga a 2e, luego gana 1 (figura).

Tablero 4x4

	2D		
1			

Segundo jugador elige 2D, convirtiendo el tablero en 3x3 y, por consiguiente, gana. (Hace el papel de 1 en 3x3).

Si continuamos de la misma manera se observa:

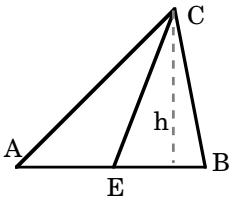
Primer jugador gana siempre en tableros impares.

Segundo jugador gana siempre en tableros pares.

Problema 2. LAS MEDIANAS

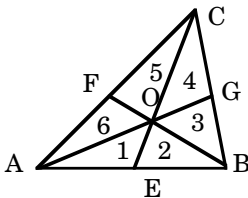
Probar que las medianas de un triángulo dividen a éste en seis triángulos de igual área.

Solución



Al trazar la mediana CE, el triángulo ABC queda dividido en dos de igual área, pues tienen la misma altura, h, y las bases AE y EB son iguales.

Esto es aplicable a las tres medianas, por lo que resulta que cada mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes; el área de cada uno de ellos será la mitad del área del triángulo dado.



Numeremos los triángulos como indica la figura; designemos con S el área del triángulo ABC y con S_i , afectada del correspondiente subíndice, el área de cada uno de los triángulos parciales.

Por la propiedad demostrada al principio, $S_1 = S_2$ $S_3 = S_4$ $S_5 = S_6$

Si al triángulo 3 le sumamos el 1 y el 2, resulta el triángulo ABG.

Si al triángulo 6 le sumamos los mismos triángulos, resulta el ABF.

Como los triángulos ABG y ABF son equivalentes, también lo serán los triángulos 3 y 6.

Análogamente se demuestra que son equivalentes 1 y 4, y 2 y 5, resultando que los seis triángulos son equivalentes.

Problema 3. LAS HERMANAS GARCÍA

Cuando nos cruzamos casualmente en la calle con dos de las hermanas García, en uno de cada dos casos ambas tienen los ojos azules.

¿Puedes determinar el número de hermanas García y cuántas de ellas tienen los ojos azules?

Solución

Si el número de hermanas fuera 2 ó 3, no se cumple que al salir por parejas en la mitad de los casos tengan ambas los ojos azules.

Por el contrario, esto sí se verifica en el caso de 4 hermanas, de las cuales 3 sí tienen los ojos azules y una no.

Sean A_1 A_2 A_3 las que tienen ojos azules y \bar{A}_4 la que no los tiene así. Las seis posibles parejas serán:

$$A_1A_2 \quad A_1A_3 \quad A_1\bar{A}_4 \quad A_2A_3 \quad A_2\bar{A}_4 \quad A_3\bar{A}_4$$

De estas parejas la mitad tienen los ojos azules.

ARAG ÓN 1998

FASE SEMIFINAL

Problema 1. VENDEDOR ENFADADO Y PENSATIVO

Ayer entré en un tienda de pequeños electrodomésticos, el vendedor estaba muy enfadado y preocupado a la vez. Estaba enfadado porque le habían estafado y pensativo porque no sabía exactamente cuánto le habían timado. Me explicó lo que le había sucedido.

Esta mañana entró un señor a comprar una batidora que valía 8.000 pesetas y me entregó un billete de 10.000 pesetas para que cobrara. Como no tenía cambios, pasé a la tienda vecina con el billete para conseguirlos, volví y le entregué la batidora y las 2.000 pesetas. Al poco rato pasó el vendedor vecino y me dijo que el billete que le había dado era falso, así que le tuve que dar uno legal.

¿Cuánto crees tú que perdió nuestro vendedor enfadado y pensativo?

Solución

El vendedor perdió el valor de la batidora más 2.000 pesetas, que equivalen a 10.000 pesetas.

Problema 2. ZOO NUMÉRICO

Reemplaza cada animal por un valor de modo que se cumplan las siguientes operaciones. Intervienen los siguientes números: 0, 1, 2, 3, 5, 6 y 7. (El 7 que ves es el único que hay).

<i>conejo</i>	<i>avispa</i>	<i>tortuga</i>
<i>+ pingüino</i>	<i>avispa</i>	<i>pingüino</i>
<i>paloma</i>	<i>hormiga</i>	<i>conejo</i>

<i>avispa + tortuga = paloma</i>
<i>avispa + pingüino = 7</i>
<i>conejo - tortuga = pingüino</i>

Solución

Estos ejercicios, abundantes en los pasatiempos de periódicos y revistas, se resuelven analizando diversas posibilidades y descartando aquellas que ocasionan contradicciones. El orden del proceso a seguir es variado.

Como ejemplo, puede iniciarse en las afirmaciones “avispa + pingüino = 7”, junto con la columna:

avispa
avispa
 hormiga

Esto nos presenta cuatro posibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{avispa} = 6 \\ \text{pingüino} = 1 \\ \text{hormiga} = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avispa} = 2 \\ \text{pingüino} = 5 \\ \text{hormiga} = 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avispa} = 1 \\ \text{pingüino} = 6 \\ \text{hormiga} = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avispa} = 5 \\ \text{pingüino} = 2 \\ \text{hormiga} = 0 \end{array} \right.$$

Al continuar, se ve que las tres primeras producen contradicciones y la última no. Lo que lleva a la solución final siguiente:

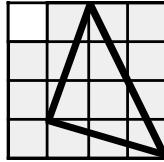
$$\begin{array}{lll} \text{avispa} = 5 & \text{pingüino} = 2 & \text{hormiga} = 0 \\ \text{conejo} = 3 & \text{tortuga} = 1 & \text{paloma} = 6 \end{array}$$

Las operaciones indicadas en el enunciado quedan así:

$$\begin{array}{r} 351 \\ + 252 \\ \hline 603 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 + 1 = 6 \\ 5 + 2 = 7 \\ 3 - 1 = 2 \end{array}$$

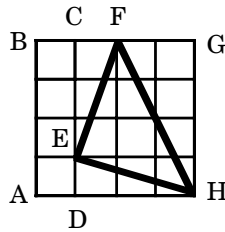
Problema 3. TRIÁNGULO CUADRICULADO

Tomando como unidad de superficie el cuadrado blanco, calcula el área del triángulo.



Solución

Una forma de resolverlo es por diferencia entre el área del cuadrado y el área del recinto exterior al triángulo.



$$\begin{array}{ll} \text{área del rectángulo ABCD} & = 4 \text{ u}^2 \\ \text{área del triángulo ECF} & = \frac{3}{2} \text{ u}^2 \\ \text{área del triángulo HDE} & = \frac{3}{2} \text{ u}^2 \\ \text{área del triángulo FGH} & = 4 \text{ u}^2 \end{array}$$

$$\text{área del recinto exterior} = 4 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4 = 11 \text{ u}^2$$

$$\text{área del triángulo FEH} = 16 - 11 = 5 \text{ u}^2$$

Otra forma:

También podría resolverse teniendo en cuenta que el triángulo problema es rectángulo y calculando, mediante el teorema de Pitágoras, sus catetos.

$$\text{En el triángulo ECF: EF} = \sqrt{10}$$

$$\text{En el triángulo HDE: HE} = \sqrt{10}$$

$$\text{Área de HEF} = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5 \text{ u}^2$$

Problema 4. EL QUE COJA LA ÚLTIMA GANA

Tenemos quince monedas recién acuñadas de euros sobre la mesa y cada uno de los dos jugadores, en su turno, retira 1, 2 ó 3 monedas, según desee. El jugador que retire la última moneda gana.



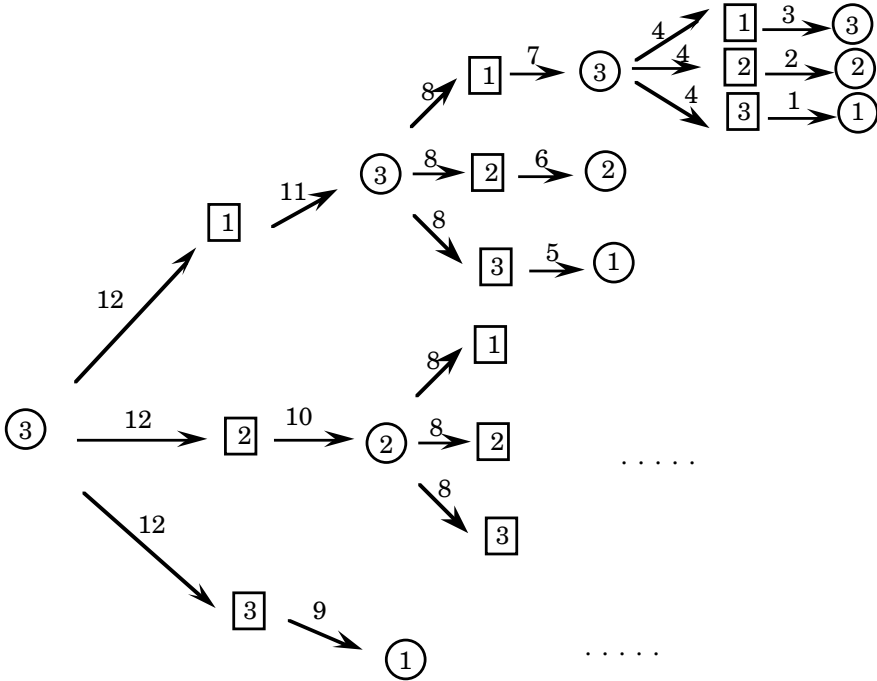
Indica la forma en que jugarías para ganar siempre.

Solución

El jugador que inicia la partida tiene la posibilidad de ganar siempre. Para ello debe retirar 3 monedas en su primer turno, y en los siguientes tiene que retirar 3, 2 ó 1, según que el adversario haya retirado respectivamente 1, 2 ó 3 en la jugada inmediatamente anterior.

Así conseguirá que, después de sus sucesivas extracciones, en la mesa vayan quedando 12, 8, 4, 0, sin que el otro jugador pueda evitar su triunfo.

Esto puede representarse en el siguiente esquema, donde en un círculo se indican las monedas retiradas por el primer jugador y en un cuadrado las del segundo, y sobre las flechas el número de monedas que quedan sobre la mesa.



Por el contrario, el triunfo del jugador que toma monedas en segundo lugar queda supeditado a que el primero no tome las indicadas en el apartado anterior en alguna de sus intervenciones. Así, por ejemplo, si el primero tomara 2 ó 1 en su primera jugada, el otro debe tomar 1 ó 2, con lo que conseguirá la posición de dominio en el juego.

Problema 5. ¿CUÁNTAS CABEN?

En una caja con forma de ortoedro de $32 \times 27 \times 45$ cm queremos meter cajas cúbicas de 6 cm de arista. ¿Cuántas cabrían?

Solución

Sobre la arista mayor se podrían colocar 7 cajas, que ocuparían 42 de los 45 cm. Sobre la arista que mide 32 cm pueden colocarse 5 cajas, que ocupan 30 cm. Y sobre la arista menor se colocan 4 cajas, que ocupan 24 cm.

Al rellenar todo el volumen posible con las cajas, el número total de las colocadas es $7 \times 5 \times 4 = 140$ cajas.

Quedará un volumen sin rellenar de dimensiones $3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ cm}^3$.

Problema 6. UN PASTOR AFICIONADO A LAS MATEMÁTICAS

Anselmo es un pastor al que le gustan mucho las matemáticas y tiene entre 80 y 100 ovejas en su rebaño. Un día observándolo pensó que el número

de ovejas que dormían era igual a los $\frac{7}{8}$ de las que no dormían. ¿Cuántas ovejas hay exactamente en el rebaño?

Solución

Si es N el número de ovejas del rebaño y D el número de las dormidas, será $N - D$ el número de ovejas despiertas.

$$\text{Entonces se verifica: } D = \frac{7}{8}(N - D)$$

Operando y despejando D resulta: $D = \frac{7N}{15}$, por lo que N debe ser múltiplo de 15.

Como 90 es el único múltiplo de 15 comprendido entre 80 y 100, necesariamente tiene que ser 90 el número de ovejas del rebaño.

Otra forma:

Podemos hacerlo por la llamada *regla de falsa posición*.

Si la relación entre el número de ovejas dormidas y no dormidas es $\frac{7}{8}$, elegimos $15 = 7 + 8$ como número posible de ovejas del rebaño.

Como el número real de ovejas está comprendido entre 80 y 100, hallamos el múltiplo de 15 comprendido entre estos dos valores, que es 90.

FASE FINAL

Problema 1. OLIMPIADA INFORMÁTICA

En una Olimpiada Informática sabemos que los puntos obtenidos entre Bernardo y Alfonso es igual a los que suman entre Lilia y Concha. Si se cambian entre sí los puntos de Concha y Bernardo, entonces la suma de Lilia y Concha es mayor que la suma de Alfonso y Bernardo. Además los puntos de Alfonso superan a la suma de puntos de Bernardo y Concha.

Establece el orden correcto de clasificación de la Olimpiada Informática del de mayor puntuación al de menor.

Solución

A las puntuaciones respectivas de Bernardo, Alfonso, Lilia y Concha se las llama B , A , L y C .

La expresión algebraica de las relaciones entre las puntuaciones de cada uno es:

$$\begin{aligned} B + A &= L + C \\ L + B &> A + C \\ A &> B + C \end{aligned}$$

$$\text{Despejando en la primera: } A = L + C - B \quad (1)$$

$$\text{Sustituyendo en la segunda: } L + B > L + C - B + C \Rightarrow B > C$$

$$\text{Sustituyendo (1) en la tercera: } L + C - B > B + C \Rightarrow L > 2B \Rightarrow L > B$$

$$\text{Restando a la primera relación la segunda: } A - L > L - A \Rightarrow A > L$$

Por tanto: $A > L > B > C$

La clasificación de mayor a menor es: Alfonso, Lilia, Bernardo y Concha.

Problema 2. MEJOR ANTES QUE DESPUÉS

¿Qué diferencia hay entre que me hagan un descuento del 10 % antes o después de aplicar el 16 % de IVA (impuesto sobre el valor añadido).

Solución

Suponiendo que N es el importe de la compra, se puede hacer el cálculo de ambas formas y compararlas.

Si se aplica primero el descuento: $N - \frac{10N}{100} = \frac{9N}{10}$

A esta cantidad se le aplica el IVA: $\frac{9N}{10} + \frac{16}{100} \cdot \frac{9N}{10} = \frac{261N}{250}$

Si se hace de la otra forma y primero se carga el IVA: $N + \frac{16N}{100} = \frac{29N}{25}$

A esta cantidad se le hace el descuento: $\frac{29N}{25} - \frac{10}{100} \cdot \frac{29N}{25} = \frac{261N}{250}$

Al comparar ambos resultados se aprecia que de ambas formas se obtiene el mismo resultado.

Problema 3. JUEGO PARA DOS (TÚ Y YO)

Tenemos tres dados con las caras pintadas: uno con tres caras azules y tres caras verdes, otro con dos caras azules y cuatro verdes y el tercero con todas las caras verdes.

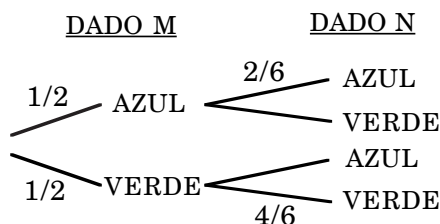
El juego consiste en lanzar dos dados (uno tú y otro yo): si las caras son del mismo color ganas tú y si salen de distinto color gano yo.

Si yo elijo para lanzar el dado de las tres caras verdes y tres caras azules, ¿qué dado elegirías tú?

Solución

Sea M el dado con 3 caras azules y 3 verdes, N el de dos azules y 4 verdes y P el de todas las caras verdes.

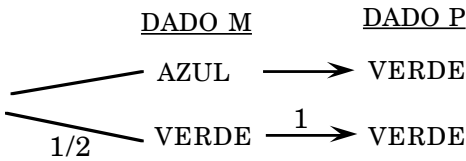
Analicemos qué sucede si juegan los dados M y N .



La probabilidad de que los dos sean del mismo color es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$$

Si utilizamos los dados M y P, entonces:



La probabilidad de que los dos sean del mismo color es

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Coincide con la anterior: da igual jugar con la pareja M-N que con la pareja M-P.

Problema 4. FILA INDIA

Cinco amigos, Antonio, Benita, Casta, Darío y Eugenia, se colocan en “fila india”, pero tú no sabes el orden en que están colocados.

Están contando: el 1º dice 5, el 2º dice 10, el 3º dice 15, el 4º dice 20, el 5º dice 25, el 1º sigue con 30,... y siguen contando de 5 en 5.

Antonio ha dicho 140; Benita 160; Casta 130; Darío 170.

¿En qué orden se encuentran colocados los amigos en la fila?

¿Quién de ellos diría 1.755?

Solución

Si se divide 140 entre 5, el cociente es 28. Esto indica que si contaran de uno en uno, Antonio diría 28. Y su posición en la fila es el resto de la división de 28 entre 5, que es 3. Antonio está colocado en tercera posición.

Procediendo del mismo modo se averigua el puesto que ocupa cada uno de los restantes.

Benita dice 160; $160:5 = 32$ y 32 entre 5 da de resto 2 . Benita ocupa el segundo lugar.

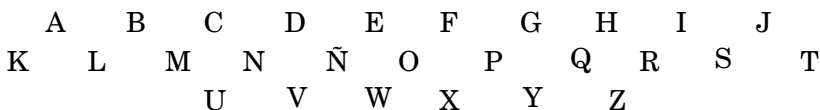
Casta dice 130 ; $130:5 = 26$, que al dividirlo por 5 da resto 1 . Casta ocupa el primer puesto.

Darío dice el 170 ; $170:5 = 34$, que da resto 4 al dividirlo por 5 . Darío está el cuarto.

Y por exclusión Eugenia ha de estar en el quinto puesto.

Para saber quién diría 1.755 se hace lo mismo. $1.755:5 = 351$, y el resto de dividir 351 entre 5 es 1 , por lo que correspondería decirlo a Casta, que es la primera.

Problema 5. AB



En el planeta WI utilizan un alfabeto con las 27 letras españolas. Cada palabra está formada por dos letras: una consonante y una vocal (recuerda que la Y es consonante).

¿Cuántas palabras distintas tienen en el planeta WI?

Quieren publicar un diccionario en cuatro tomos iguales (con el mismo número de palabras) y ordenado según nuestro alfabeto. ¿Cuál será la primera palabra de cada tomo?

Solución

Cada una de las 22 consonantes puede ir con una vocal, y cada pareja consonante-vocal da lugar a dos palabras diferentes según el orden de colocación, por lo que el número total de palabras del alfabeto WI es

$$22 \times 5 \times 2 = 220$$

Al repartirlas en los cuatro tomos corresponden 55 palabras a cada uno. El segundo tomo empezará por la palabra que ocupa el lugar de orden 56° , el tercer tomo por la que ocupa el lugar 111° y el cuarto por la de 166° .

Además se ha de tener en cuenta que por cada vocal empiezan 22 palabras diferentes, por ejemplo AB, AC, AD, AE, ... , AZ, mientras que por cada consonante sólo comienzan 5 palabras distintas, por ejemplo BA, BE, BI, BO, BU.

El primer tomo comienza por AB y contiene todas las que empiezan por A, B, C y D, y también las 18 primeras palabras de las empezadas por E, hasta completar su cabida.

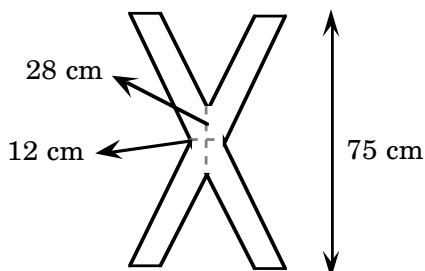
El tomo segundo comienza por EW y contiene 4 palabras que empiezan por E, todas las de F, G, H, I, J, K, y 4 de la L.

El tomo tercero comienza con LU y contiene además todas las de M, N, Ñ, O, P, Q y R, y 3 de la S.

El cuarto tomo comienza por SO.

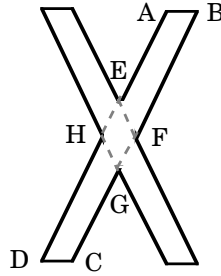
Problema 6. EXPEDIENTE X

Esta letra pertenece a una pancarta y queremos saber qué superficie ocupa para preparar un presupuesto de pintura. ¿Cuál es su área?



Solución

Cada uno de los “palos” de la X, por ejemplo el ABCD, es un paralelogramo de base 12 cm y altura 75 cm. Su área es $12 \times 75 = 900 \text{ cm}^2$.



El área pedida es el doble del área de esa cantidad menos el área del rombo EFGH, que se incluye en los dos “palos” y, por tanto, se cuenta dos veces.

$$\text{área del rombo} = \frac{28 \times 12}{2} = 168 \text{ cm}^2$$

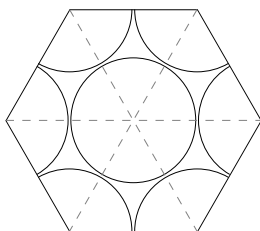
$$\text{área de la figura} = 2 \times 900 - 168 = 1.632 \text{ cm}^2$$

ASTURIAS 1998
PRIMER CICLO (2º ESO)
FASE SEMIFINAL

Problema 1. EL PASTO DE LA OVEJA

Un pastor construye en un prado una cerca con forma de hexágono regular de 6 m de lado para que pascen una oveja. El pastor ata la oveja cada día a un vértice distinto de la cerca con una cuerda de 3 m de longitud y el séptimo día la ata al centro con la misma cuerda. La oveja come cada día todo el pasto que está a su alcance. ¿Cuál es la superficie del cercado que queda sin pastar?

Solución



El área del hexágono puede calcularse como la suma de las áreas de 6 triángulos equiláteros de lado 6 metros.

$$\text{Área del hexágono} = 6 \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 54 \sqrt{3} \text{ m}^2.$$

La zona que pascen en cada uno de los seis primeros días es un sector circular de 3 m de radio y 120° de ángulo. Todos ellos equivalen a dos círculos de igual radio; su área es: $2\pi r^2 = 2\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ m}^2$.

El séptimo día come el pasto de otro círculo de radio 3 m, de área

$$\pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi \text{ m}^2.$$

El área de la zona que queda sin pastar por la oveja es:

$$54 \sqrt{3} - 18\pi - 9\pi = 54 \sqrt{3} - 27\pi \approx 8,71 \text{ m}^2.$$

Problema 2. IR AL COLE

Si fuera andando a 4 km/h llegaría 5 minutos tarde al colegio, pero como iré a 5 km/h llegaré 10 minutos antes de la hora de entrada. ¿A qué distancia está el colegio de mi casa?

Solución

Sea x la distancia entre el colegio y la casa. El tiempo que tardaría en recorrerla si fuera a 4 km/h sería $\frac{x}{4}$, que excede en 5 minutos, es decir en $\frac{1}{12}$ de hora, al tiempo de que dispone.

El tiempo que tarda yendo a 5 km/h es $\frac{x}{5}$, que es inferior en 10 minutos, o sea en $\frac{1}{6}$ de hora, al tiempo de que dispone.

Se verifica la siguiente relación entre los tiempos: $\frac{x}{4} - \frac{1}{12} = \frac{x}{5} + \frac{1}{6}$

La solución de esta ecuación, $x = 5$ km, es la distancia pedida.

Otra forma.

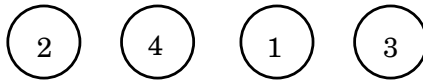
Supongamos que la distancia al colegio es de 1 km.

Yendo a 4 km/h tardaría $\frac{1}{4}$ hora = 15 minutos, y yendo a 5 km/h tardaría $\frac{1}{5}$ hora = 12 minutos; habría una diferencia de tiempos de 3 minutos.

Como la diferencia real de tiempos es de $5 + 10 = 15$ minutos, 5 veces mayor, la distancia real es 5 veces mayor que la supuesta, esto es, 5 km.

Problema 3. ¡CUIDADO, Y PIÉNSALO BIEN!

Para abrir la puerta del laboratorio que contiene la fórmula del producto secreto, hay que pulsar los cuatro botones en un orden determinado. Si no se hace en el orden correcto la fórmula se destruye.



Al encargado de abrir la puerta le han dado las siguientes instrucciones:

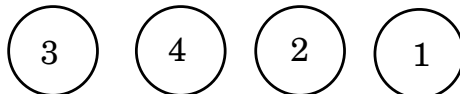
- a) Los números colocados sobre los botones, en ningún caso coinciden con el orden en que deben ser pulsados.
- b) El primero y el último en pulsar están separados.
- c) El último no está en ningún extremo.

Solución

El 4 no debe estar ni en primer ni en cuarto lugar, por tanto estará en segundo o en tercero.

Si estuviera en tercer lugar, el 1 ocuparía el primer botón y estaría en su lugar de orden, o en el segundo o cuarto y estaría junto al 4. Imposible.

Si el 4 estuviera en segundo lugar, el 1 ocuparía el cuarto, el 3 el primero y el 2 el tercero, siendo la clave



Problema 4. EL BISABUELO

Mauricio, el bisabuelo de José, no es ciertamente centenario, pero es de edad muy avanzada. Lo que os puedo decir es que el año anterior su edad era múltiplo de 8, y que el año próximo es múltiplo de 7. ¿Cuál es la edad de Mauricio?

Solución

Al dividir 100 entre 8 obtenemos de resto 4; luego el múltiplo de 8 más próximo a 100 será $100 - 4 = 96$; y al dividir 100 entre 7 se obtiene de resto 2, por lo que el múltiplo de 7 más próximo a 100 será $100 - 2 = 98$.

Resulta que 96 y 98 son la edad el año anterior y el año próximo, respectivamente; luego la edad actual de Mauricio es 97 años.

Si en lugar de tratarse de una solución tan fácil de encontrar fuera otra más complicada, se recurriría al siguiente razonamiento:

Si x es la edad actual, resulta:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \overset{\bullet}{8} ; \text{ sumando 16 a los dos miembros: } x + 15 = \overset{\bullet}{8} \\ x + 1 &= \overset{\bullet}{7} ; \text{ sumando 14 a los dos miembros: } x + 15 = \overset{\bullet}{7} \end{aligned}$$

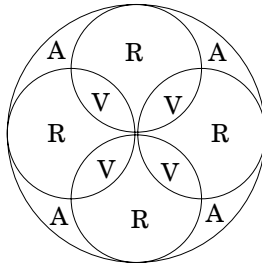
De estas igualdades resulta: $x + 15 = \overset{\bullet}{56}$.

Entonces $x = 56 - 15 = 41$, solución no válida por no estar próxima a 100, ó $x = 112 - 15 = 97$, que es la solución.

FASE FINAL

Problema 1. EL ROSETÓN DE LA IGLESIA

La vidriera de la fachada principal de una iglesia contiene un rosetón como el de la figura, donde las letras R, V y A representan los colores rojo, verde y azul, respectivamente.



Sabiendo que se han empleado 400 cm^2 de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios?

Solución

Como el radio de un círculo pequeño es la mitad del radio del círculo grande, el área de aquel será la cuarta parte del área de éste.

Una zona roja (R) y dos verdes (V) componen un círculo pequeño, cuarta parte del área total: $R + 2V = \frac{1}{4} \text{ total}$ (1)

Dos medias zonas rojas (R), una verde y una azul componen un cuadrante del círculo mayor: $R + V + A = \frac{1}{4} \text{ total}$ (2)

De (1) y (2) resulta: $R + 2V = R + V + A \Rightarrow V = A$

Por tanto, las zonas azul y verde tienen áreas iguales, por lo que la zona azul medirá también 400 cm².

Otra forma.

Designando con G el área del círculo grande y con P el área de un círculo pequeño: $\frac{1}{4}G - (P - V) = A$.

Como $\frac{1}{4}G = P$, resulta $V = A$.

Problema 2. LOS ASCENSORES

Dos ascensores parten del sexto piso de un edificio a las dos de la tarde y ambos van bajando. El más rápido tarda un minuto en ir de un piso a otro y el más lento tarda dos minutos en lo mismo. El primer ascensor que llegue a un piso tendrá que parar tres minutos para que suban y bajen los pasajeros. ¿Qué ascensor llegará antes al vestíbulo, situado en el primer piso?

Solución

Analizamos el problema piso a piso. Sea A el ascensor rápido y B el lento.

5º piso.

Llega primero el ascensor A y no vuelve a descender hasta que pasen 3 min. ($T_A = 3 \text{ min}$)

Llega segundo el B, no para y continúa hasta el 4º ($T_B = 4 \text{ min}$)

4º piso.

Llega segundo el A, no para y continúa descendiendo ($T_A = 5 \text{ min}$)

Llega primero el B, para y permanece 3 min ($T_B = 4 + 3 = 7 \text{ min}$)

3º piso.

Llega primero el A, para y permanece 3 min ($T_A = 6 + 3 = 9 \text{ min}$)

Llega segundo el B, no para y continúa el descenso ($T_B = 7 + 2 = 9 \text{ min}$)

2º piso.

Llega primero el A, para y permanece 3 min ($T_A = 10 + 3 = 13 \text{ min}$)

Llega segundo el B, no para y sigue descendiendo ($T_B = 9 + 2 = 11 \text{ min}$)

1° piso.

Llega segundo el A $\Rightarrow (T_A = 13 + 1 = 14 \text{ min})$

Llega primero el B $\Rightarrow (T_B = 11 + 2 = 13 \text{ min})$

En definitiva, cuando B llega al primer piso, A comienza a descender hacia él.

Problema 3. EL TUESTE DEL CAFÉ

El café pierde $\frac{1}{5}$ de su peso al tostarlo. Comprando café verde a 1.200 pts/Kg, ¿a cómo deberá venderse el kilogramo de café tostado para ganar $\frac{1}{10}$ del precio de compra?

Solución

Llamando x a los gramos de café antes de tostar, se tiene:

$$\frac{4}{5}x = 1.000 \Rightarrow x = 1.250 \text{ gramos de café verde para conseguir 1 kg tostado.}$$

Como 1 kg de café verde cuesta 1.200 pts y necesitamos 1 kg y cuarto, nos tenemos que gastar 1.500 pts.

Si queremos ganar $\frac{1}{10}$ de su precio, tendremos que el precio de venta será: $1.500 + \frac{1}{10}1.500 = 1.650 \text{ pts.}$

Otra forma.

Supongamos que se ha comprado 1 kg de café verde.

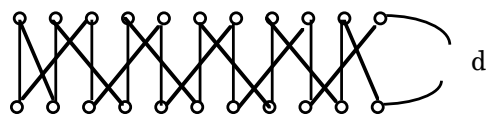
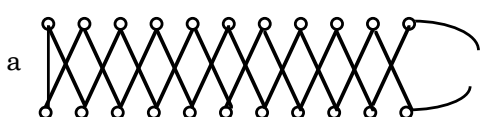
Al tostarlo se reduce a $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ kg}$ y en la venta de esta cantidad

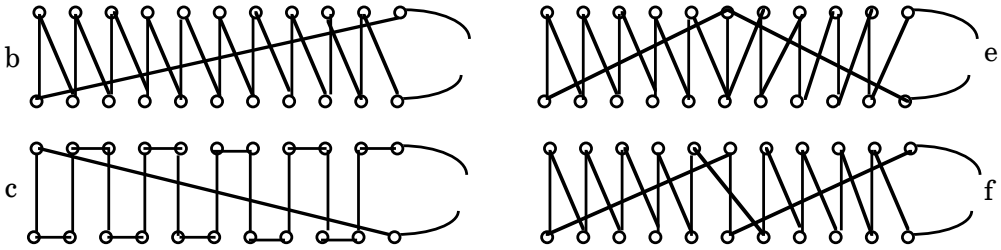
hemos de obtener $1.200 + \frac{1}{10}1.200 = 1.320 \text{ pts.}$

Por tanto el precio de venta del kilogramo será $\frac{1.320}{0,8} = 1.650 \text{ pts.}$

Problema 4. LA LAZADA

Pedro sabe seis maneras de entrelazar sus playeros. Las dos líneas paralelas de once agujeros están a una distancia de 3 cm y en cada línea los agujeros están regularmente separados por 1 cm. ¿Cuáles, entre las formas de atar que sabe Pedro, puede utilizar sabiendo que los cordones tienen 1 m de longitud y necesita como mínimo 30 cm para hacer la lazada?





Solución

a) 20 diagonales de longitud $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow 20\sqrt{10} \approx 63,25$ cm.
 1 tramo de longitud 3 cm.
 Total: 66,25 cm. < 70 cm

b) 10 diagonales de longitud $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow 10\sqrt{10} \approx 31,62$ cm.
 10 tramos de longitud 3 cm = 30 cm.
 1 diagonal de longitud $\sqrt{100+9} = \sqrt{109} \approx 10,44$ cm.
 Total: 72,06 cm > 70 cm.

c) 10 tramos de longitud 3 cm $\Rightarrow 30$ cm.
 10 tramos de longitud 1 cm $\Rightarrow 10$ cm.
 1 diagonal de longitud $\sqrt{100+9} = \sqrt{109} \approx 10,44$ cm.
 Total: 50,44 cm. < 70 cm.

d) 10 tramos de longitud 3 cm $\Rightarrow 30$ cm.
 2 diagonales de longitud $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow 2\sqrt{10} \approx 6,32$ cm.
 9 diagonales de longitud $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow 9\sqrt{13} \approx 32,45$ cm.
 Total: 68,77 cm < 70 cm.

e) 10 diagonales de longitud $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow 10\sqrt{10} \approx 31,62$ cm.
 10 tramos de longitud 3 cm $\Rightarrow 30$ cm.
 2 diagonales de longitud $\sqrt{25+9} = \sqrt{34} \Rightarrow 2\sqrt{34} \approx 11,66$ cm.
 Total: 73,28 cm. > 70 cm.

f) 10 tramos de longitud 3 cm $\Rightarrow 30$ cm.
 8 diagonales de longitud $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow 8\sqrt{10} \approx 25,30$ cm.
 1 diagonal de longitud $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3,60$ cm.
 2 diagonales de longitud $\sqrt{25+9} = \sqrt{34} \Rightarrow 2\sqrt{34} \approx 11,66$ cm.
 Total 70,56 cm > 70 cm.

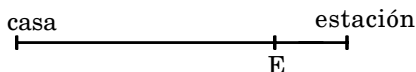
Puede utilizar a, c y d.

FASE SEMIFINAL

Problema 1. EL ADELANTO

Cada tarde, María coge el coche para buscar a su hermano en la estación. Sale de casa siempre a la misma hora, toma siempre el mismo trayecto y conduce a la misma velocidad para llegar a la estación exactamente a las 18 h 30 min, hora de llegada del tren de su hermano. Regresan a continuación a casa por el mismo camino y siempre a la misma velocidad. Pero un día su hermano toma un tren que llega a la estación a las 18 h 10 min. Su hermana no estaba esperándolo, y él parte a pie hacia casa y a su encuentro. Se encuentran en el camino y llegan a casa 10 minutos antes que otros días. ¿Cuánto tiempo ha andado su hermano?

Solución



La hermana sale cada día antes de las 18 h 30 min para llegar a la estación a esa hora exactamente.

Un día el hermano comienza a caminar a las 18 h 10 min y se encuentra con su hermana en un punto E del recorrido. El tiempo que le ahorra en total es 10 min, que es el que invierte a diario en ir de E a la estación y de la estación a E en coche. Por tanto, de E a la estación se tardan 5 minutos en coche. Como todos los días llega a las 18 h 30 min, ese día del adelanto se encuentran a las 18 h 25 min.

El hermano comenzó a andar a las 18 h 10 min y se montó en coche a las 18 h 25 min, luego anduvo un total de 15 minutos.

Problema 2. PENTATLÓN MODERNO

Cinco atletas participan en la fase final del pentatlón moderno. En cada una de las cinco pruebas, el ganador consigue 5 puntos, el segundo 4, el tercero 3, etc. Nunca hay igualdad, ni en las pruebas individuales ni en la clasificación final. El atleta alemán gana rotundamente con 24 puntos, seguido del belga, el canadiense (muy regular, al haber quedado en la misma posición en 4 de las 5 pruebas), el danés y el español, este último pese a haber ganado en natación y haber sido tercero en tiro. ¿Qué lugar ocupó el atleta danés en natación?

Solución

El alemán debe quedar primero en cuatro pruebas y segundo en natación, pues en ese deporte gana el español.

El canadiense obtiene la misma puntuación en cuatro pruebas; debe ser tercero en cuatro de ellas, pues si fuese segundo en cuatro, quedaría en segundo lugar en la clasificación final. En tiro no puede ser tercero, por ser el español el que ocupa ese lugar.

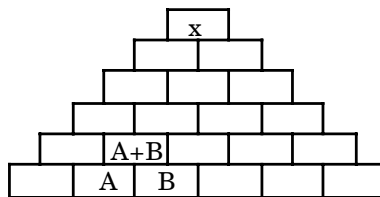
Con estos datos obtenemos el siguiente cuadro:

	Pr. 1	Pr. 2	Pr. 3	Nat.	Tiro	Total
Alemán	5	5	5	4	5	24
Belga	4	4	4	2 ó 1		
Canadiense	3	3	3	3		
Danés				1 ó 2		
Español				5	3	

Si el belga fuese cuarto en natación, el danés sería último. Lo más que podría sacar el danés es : $2 + 2 + 2 + 1 + 4 = 11$, que es lo mínimo que puede sacar el español. Al ser esto imposible, el belga será quinto en natación (1 punto) y el danés cuarto (2 puntos).

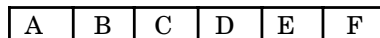
Problema 3. PIRÁMIDE NUMÉRICA

Se escribe cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en una de las casillas de la base de una pirámide. En cada una de las casillas superiores se pone la suma de los números de las dos casillas que la “sostienen”, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un solo número x en la casilla superior. ¿Cuál es el menor valor que puede tener x?



Solución

Llamemos A, B, C, D, E, F, G a los números de la base.



Al ir completando las siguientes filas, los números colocados en los extremos (A y F) aparecen al final sólo una vez. B y E cinco veces cada uno; C y D diez veces cada uno.

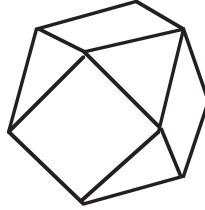
Por tanto: $x = A + 5B + 10C + 10D + 5E + F$.

Para que x sea la menor posible es necesario que los que más veces aparecen sean los menores: C y D, 1 ó 2; B y E, 3 ó 4; A y F, 5 ó 6.

La menor suma será: $5 + 5 \times 3 + 10 \times 1 + 10 \times 2 + 5 \times 4 + 6 = 76$.

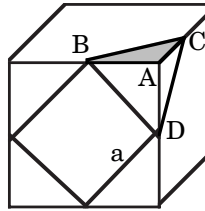
Problema 4. EL CUBOCTAEDRO

Si cortamos las esquinas de un cubo por la mitad de las aristas obtenemos un poliedro llamado CUBOCTAEDRO. Si la arista del cubo mide 6 cm:



- a) Calcular su área.
- b) Calcular su volumen.

Solución



Las caras son seis cuadrados de lado $a = 3\sqrt{2}$, y ocho triángulos equiláteros con el mismo lado, a .

Área de un cuadrado: $a^2 = 18 \text{ cm}^2$

Área de un triángulo equilátero: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{18 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

Área total: $6 \times 18 + 8 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 108 + 36\sqrt{3} \approx 170,35 \text{ cm}^2$.

El volumen es el del cubo menos ocho tetraedros iguales, uno en cada esquina.

Si tomamos como base el triángulo ABC, que es rectángulo, de catetos 3 cm cada uno, la altura del tetraedro es DA, que también mide 3 cm. El volumen de uno de ellos es: $\frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}^3$.

El volumen del cubo octaedro es: $6^3 - 8 \times \frac{9}{2} = 216 - 36 = 180 \text{ cm}^3$.

FASE FINAL

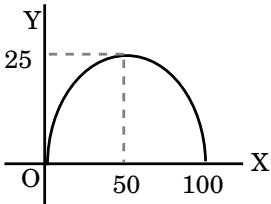
Problema 1. ¡MENUDOS IMPUESTOS!

En un perdido país de Oriente Medio, los ciudadanos han de pagar numéricamente el mismo tanto por ciento de impuestos que las rupias que ganan por semana. ¿Cuál sería el salario ideal?

Solución

Sea x la cantidad bruta de rupias que gana semanalmente.

$$\text{Netas serían: } x - \frac{x \cdot x}{100} = x - \frac{x^2}{100} = y$$



El salario ideal será el correspondiente al punto máximo de la parábola anterior, que corresponde a $x = 50$ rupias semanales.

Problema 2. EL ESCRITOR

Un novelista ha escrito dos libros. Si sumamos las páginas de los dos libros obtenemos el número 356. El formato del primero es 20×15 cm y el del segundo libro 17×15 cm. Si se extendiesen las hojas de los dos libros, cubrirían una superficie de $4,9080 \text{ m}^2$. ¿Cuántas páginas tiene cada libro?

Solución

Si llamamos x e y al número de páginas de cada libro, $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$ son las hojas de cada uno (una hoja consta de dos páginas).

Una hoja del primer libro ocupa $20 \times 15 = 300 \text{ cm}^2$ y una hoja del segundo ocupa $17 \times 15 = 255 \text{ cm}^2$.

Extendiendo las hojas de los dos libros ocuparán una superficie

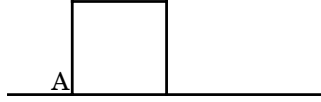
$$300 \cdot \frac{x}{2} + 255 \cdot \frac{y}{2} = 49.080 \text{ cm}^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 356 \\ 300 \cdot \frac{x}{2} + 255 \cdot \frac{y}{2} = 49.080 \end{array} \right\} \text{ Resulta } x = 164, y = 192.$$

Problema 3. LA RUEDA CUADRADA

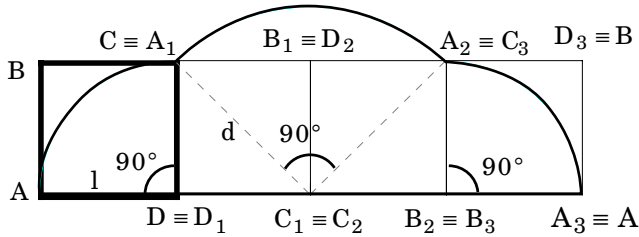
Lo normal es usar ruedas redondas ¿verdad? Bueno, pues vamos a suponer que se nos ha ocurrido investigar sobre una rueda cuadrada como la de la figura.



Fíjate en el vértice A. Si la rueda empieza a dar vueltas, sin deslizarse, dibuja la trayectoria que describe el punto A, hasta que vuelve a estar en el suelo. Calcula la longitud de dicha trayectoria sabiendo que la rueda tiene 1 metro de lado.

Solución

Si nos fijamos en la figura:



el punto A recorre los arcos AA_1 , A_1A_2 y A_2A_3 , que tienen

- I) AA_1 : centro en D, radio 1 y amplitud 90° .
- II) A_1A_2 : centro en C_1 , radio la diagonal d y amplitud 90° .
- III) A_2A_3 : centro B_2 , radio 1 y amplitud 90° .

La longitud total es:

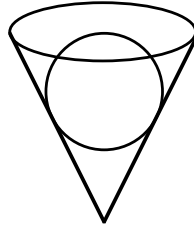
$$L = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot d = \frac{\pi}{2} (2l + d)$$

Si el lado del cuadrado mide 1 metro, la longitud total es:

$$L = \frac{\pi}{2} (2l + d) = \frac{\pi}{2} (2 \cdot 1 + \sqrt{2}) \approx 5,36 \text{ m.}$$

Problema 4. LA ESFERA INCRUSTADA

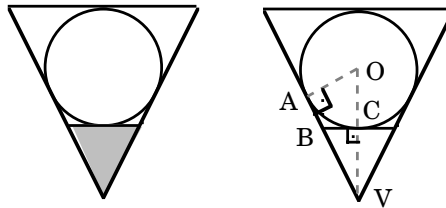
Una esfera de 6 cm de diámetro está dentro de un cono, de modo que cualquier punto de la línea de tangencia de la esfera con el cono dista del vértice de éste 4 cm. ¿Cuánto líquido podría echar en el cono, antes de poner la esfera encima, de modo que ésta no esté en contacto con el agua?



Solución

Puede llenarse el agua que quepa en el cono que hay por debajo de la esfera (sombreado), como puede verse en la primera figura.

Vamos a calcular el volumen del cono de radio básico BC y altura VC (2ª figura).



La hipotenusa del triángulo rectángulo VAO vale $VO = 5$, pues $AO = 3$ y $AV = 4$ (el ángulo A es recto).y como el radio de la esfera es 3, resulta que la altura del cono $VC = 2$.

Por la semejanza de los triángulos VCB y VAO resulta:

$$\frac{VC}{VA} = \frac{BC}{AO} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BC}{3} \Rightarrow BC = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$

Con todo esto, el volumen del cono es : $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 \approx 4,71 \text{ cm}^3$, y la cantidad de agua debe ser menor que $4,71 \text{ cm}^3$.

CANARIAS 1998 PRIMERA FASE

Problema 1

¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar si usamos los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

Solución

Para calcular lo que pide el problema se puede proceder formando ordenadamente los números de una sola cifra, los de dos, los de tres, etc.

De una sola cifra se pueden formar 5 números distintos: 1, 2, 3, 4, 5.

Partiendo de estos, de cada uno se pueden formar 5 de dos cifras:

11	12	13	14	15	
21	22	23	24	25	
.....					
51	52	53	54	55	Han salido 5^2

A su vez, con cada uno de los de dos cifras se pueden formar 5 de tres cifras:

111	112	113	114	115	
121	122	123	124	125	
.....					
551	552	553	554	555	Salen 5^3

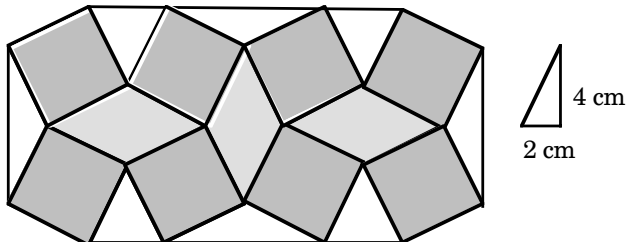
Siguiendo con el razonamiento, se llega a que se pueden formar 5^4 de cuatro cifras y $5^5 = 31\ 125$ de cinco cifras.

Otra forma:

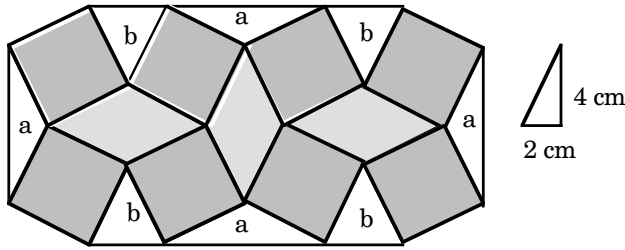
Se trata de un ejercicio tipo de la parte de las Matemáticas conocida como Combinatoria. En ella se estudia que esto es un caso de variaciones con repetición de cinco elementos tomados de cinco en cinco: $VR_{5,5} = 5^5$.

Problema 2

Calcula el área de la cenefa



Solución



Los triángulos designados con a y con b son equivalentes, pues cada uno de ellos puede descomponerse en 2 triángulos rectángulos como el de la derecha de la figura, cuya área vale 4 cm^2 . Como hay 8 de aquellos triángulos, sus áreas sumarán $16 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$.

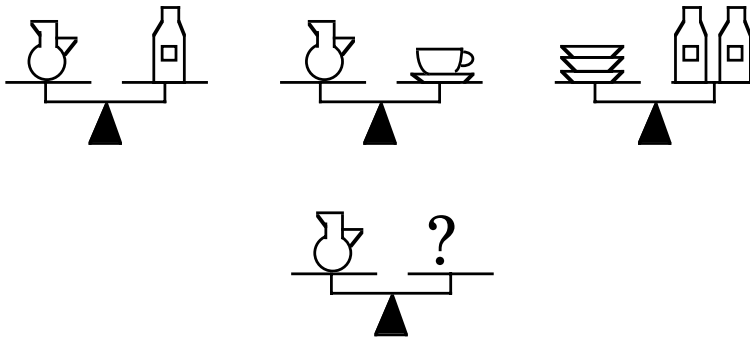
Cada rombo puede descomponerse en 4 triángulos pequeños; como hay 3 rombos, sus áreas suman $12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$.

Hay 8 cuadrados de lado $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ cm}$, por tanto, de área 20 cm^2 y el área de todos será 160 cm^2 .

El área de la cenefa será: $64 + 48 + 160 = 272 \text{ cm}^2$.

Problema 3

Tenemos tres balanzas equilibradas, como muestran las figuras. ¿Cuántas tazas se necesitan para equilibrar la jarra?



Solución

Llamando j , b , t , p a los pesos respectivos de la jarra, la botella, la taza y el plato, se pueden expresar los dibujos del enunciado mediante las igualdades siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 1j = 1b \\ 1j = 1t + 1p \\ 3p = 2b \end{array} \right\} \text{ Sólo nos interesa el valor de } j.$$

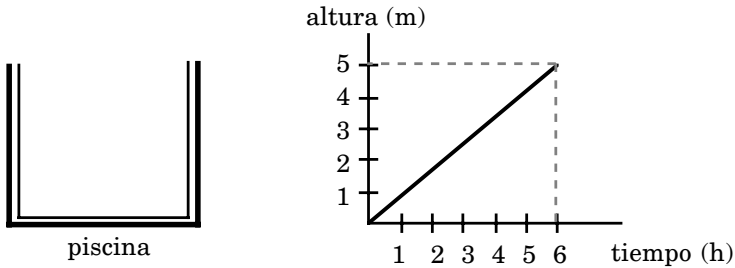
De la primera y tercera ecuaciones se obtiene: $1p + \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}j$

Sustituyendo en la segunda: $1j = 1t + \frac{2}{3}j \Rightarrow 1j = 3t$

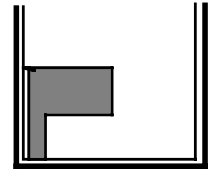
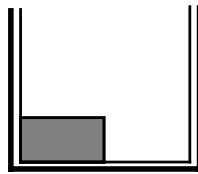
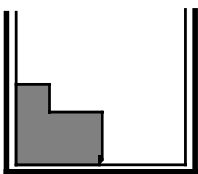
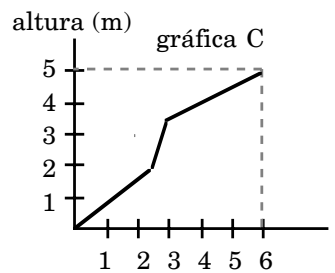
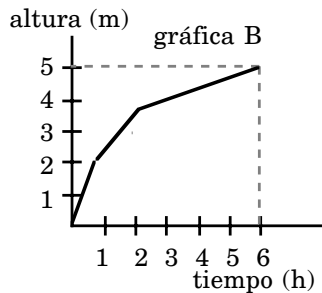
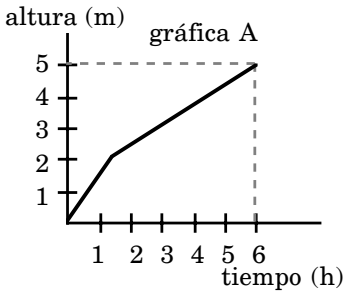
Se necesitan 3 tazas para equilibrar la jarra.

Problema 4

Tenemos una piscina con la forma indicada en la figura. Tarda en llenarse 6 horas, tal como indica la gráfica.



Relaciona las gráficas de llenado con las formas de las piscinas, justificando las respuestas.



Solución

Las piscinas varían entre sí en la distinta superficie que presentan en sus zonas más hondas. Durante el llenado, el nivel del agua subirá más deprisa en las que presenten menor superficie.

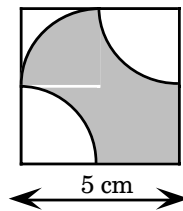
La gráfica A se corresponde con la piscina 2. Al comienzo, hasta alcanzar los 2 metros de altura, el nivel aumenta más deprisa que en los 3 metros restantes.

La gráfica B corresponde a la piscina 1. Los 2 primeros metros de altura los alcanza más deprisa que los 2 metros siguientes, y estos más deprisa que el último,

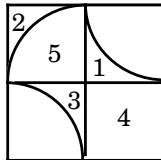
Y la gráfica C corresponde a la piscina 3. Entre la altura de 2 metros y la de 4, el llenado es más rápido. Y al final es más lento que al comienzo.

Problema 5

Calcula el perímetro y el área de la figura sombreada.



Solución



Al dibujar las paralelas medias del cuadrado se aprecia que el contorno de la figura está formado por 3 arcos de un cuadrante de circunferencia de 2,5 cm de radio y por 2 semilados del cuadrado. El perímetro mide:

$$3 \cdot \frac{2\pi \cdot 2,5}{4} + 2 \cdot 2,5 = \frac{7,5\pi + 10}{2} \cong 16,78 \text{ cm.}$$

Para el cálculo del área se observa que la zona marcada con 1 coincide con la zona marcada con 2; las zonas 1, 5 y 4 completan la mitad del cuadrado grande, a lo que hay que añadir la zona 3, que es la cuarta parte del área comprendida entre el cuadrado grande y una circunferencia de radio 2,5 cm.

$$\text{El área es: } \frac{5^2}{2} + \frac{5^2 - 2,5^2 \pi}{4} = \frac{75 - 6,25\pi}{4} \cong 13,84 \text{ cm}^2.$$

FASE FINAL

Problema 1

Consigue con cuatro cuatros y usando operaciones matemáticas los números del 0 al 9.

Solución

Existen varias posibilidades. A continuación se ofrecen tres para cada caso:

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4 = (4 - 4)(4 + 4) = 4^4 - 4^4$$

$$1 = 4 - 4 + \frac{4}{4} = \frac{4 \times 4}{4 \times 4} = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 4 - \frac{4+4}{4} = \sqrt{\frac{4}{4}} + \sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4} = 4 - 4^{4-4} = 4 - 4\sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$4 = 4 + \frac{4-4}{4} = 4 + (4-4)4 = 4^{4-4} \times 4$$

$$5 = 4 + 4^{4-4} = (4 \times 4 + 4) : 4 = 4\sqrt{\frac{4}{4}} + 4$$

$$6 = \frac{4+4}{4} + 4 = 4 + \sqrt[4]{4 \times 4} = \frac{4 \times 4}{4} + \sqrt{4}$$

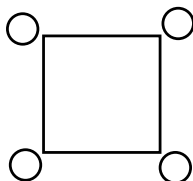
$$7 = 4 - \frac{4}{4} + 4 = \frac{44}{4} - 4 = 4 + \frac{4}{4} + \sqrt{4}$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4 = 4 \times 4 - 4 - 4 = \frac{4 \times 4}{4} + 4$$

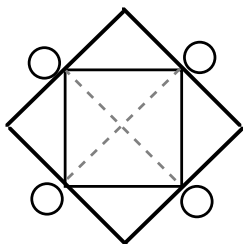
$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4} = \frac{44}{4} - \sqrt{4} = 4\sqrt{4} + \frac{4}{4}$$

Problema 2

Hemos construido un embalse en forma de cuadrado. En cada uno de sus vértices crece un árbol. ¿Cómo podríamos construir un nuevo embalse en medio de los árboles con la misma forma y el doble de área?



Solución



Se trazan las diagonales del cuadrado y por los vértices se trazan perpendiculares a esas diagonales.

En la figura resultante se observa que los 8 triángulos formados son todos iguales, pues son rectángulos, isósceles y con las hipotenusas iguales al lado del cuadrado inicial.

La figura exterior es la solución del problema. Es el nuevo embalse que cumple las condiciones impuestas: cuadrado de doble área que el inicial y en medio de los árboles.

Problema 3

En el año 2002 Lucía irá a la Feria del Libro. Pagará 5 euros de entrada. Comprará varios libros y un diccionario. Los libros costarán 84 euros. Al agregar el diccionario, el total superará los 100 euros.

Por compras superiores a 100 euros se hará un descuento del 15 % y, además, se devolverá el importe de la entrada. Lucía pagará con un billete de 100 euros y un billete de 20 euros. Le devolverán 14,5 euros. ¿Cuál será el precio de venta del diccionario?

Solución

Si se designa por x el precio del diccionario, se verifica:

$$84 + x - \frac{15}{100}(84 + x) - 5 = 105,5$$

ecuación que tiene como solución $x = 46$.

El precio del diccionario será 46 euros.

Problema 4

¿Conoces la baraja española? Cuarenta cartas. Cuatro palos: espadas, oros, copas y bastos. Cada palo con diez cartas: del uno (el as) al siete y tres figuras: sota, caballo y rey.

Dos amigos juegan a extraer una carta de una baraja española completa. Apostaban a algunas de las posibles extracciones. No todas ellas tienen la misma probabilidad de salir. Uno de los amigos realizó la siguiente lista con algunos resultados y las probabilidades que creía para cada uno de ellos:

<u>Resultado</u>	<u>Probabilidad</u>
Un rey	30 %
La sota de oros	10 %
Una figura	12 %
Una carta menor que cuatro	2,5 %
Una espada	25 %

Tememos que cometió muchos errores. Corrígelo uniendo con una flecha los resultados con la probabilidad correcta. Razona la respuesta.

Solución

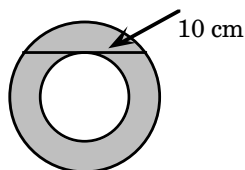
En la baraja española hay 4 reyes y un total de 40 cartas, por lo que la probabilidad de obtener rey en una extracción es $\frac{4}{40}$, o sea 10 %.

Con el mismo razonamiento se calculan los restantes valores de la tabla corregida.

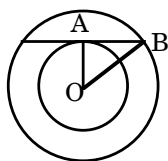
<u>Resultado</u>	<u>Probabilidad</u>
Un rey	$\frac{4}{40} = 10\%$
La sota de oros	$\frac{1}{40} = 2,5\%$
Una figura	$\frac{12}{40} = 30\%$
Una carta menor que cuatro	$\frac{12}{40} = 30\%$
Una espada	$\frac{10}{40} = 25\%$

Problema 5

Calcula el área (sombreada en la figura) de una corona circular cuya cuerda tangente mide 10 cm.



Solución



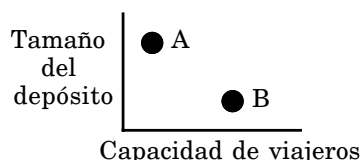
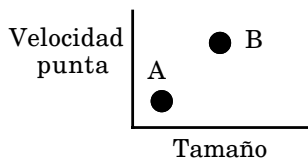
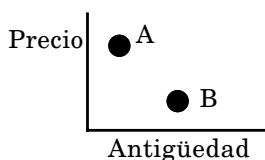
El área de la corona circular es la diferencia de las áreas de los dos círculos: $\pi OB^2 - \pi OA^2 = \pi(OB^2 - OA^2)$

En el triángulo rectángulo OAB: $OB^2 - OA^2 = AB^2 = 25$

Por tanto, el área de la corona valdrá: $25\pi \approx 78,5 \text{ cm}^2$.

Problema 6

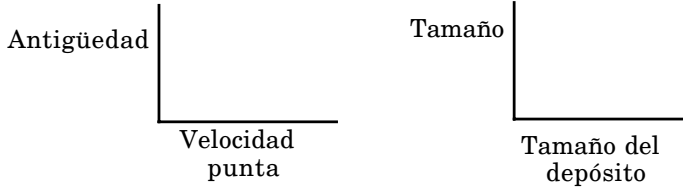
Las siguientes gráficas describen a dos modelos de coches: A y B. Observa las siguientes gráficas que no se han realizado con exactitud:



¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?

1. El coche más viejo es más barato.
2. El coche más rápido es más pequeño.
3. El coche más grande es más viejo.
4. El coche más barato transporta menos pasajeros.

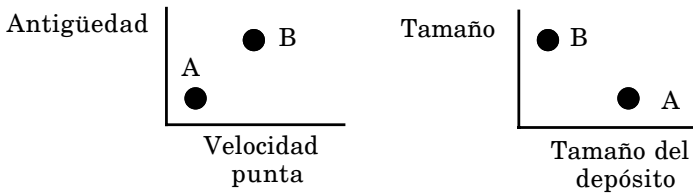
Marca dos puntos que representen a los modelos A y B en las siguientes gráficas:



Solución

1. Según la gráfica primera, es verdadera.
2. Falsa, porque según la gráfica 2ª, el más rápido es el B, que tiene mayor tamaño.
3. Verdadera, según las gráficas 2ª y 1ª, el coche B es el de mayor tamaño y tiene mayor antigüedad.
4. Falsa, porque según las gráficas 1ª y 3ª, el de menor precio es el B, que es el que tiene mayor capacidad de viajeros.

Las dos gráficas pedidas son:



CANTABRIA 1998

Problema 1

La bicicleta de Andrés tiene la rueda delantera de 4 metros de circunferencia y la trasera de 5 metros de circunferencia. ¿Cuántas vueltas más dio la rueda delantera que la trasera mientras que Andrés recorrió 400 metros?

Solución

El número de vueltas que da una rueda al recorrer una distancia es el cociente entre ésta y la longitud de la circunferencia.

Por ello la rueda delantera da un número de vueltas igual a $\frac{400}{4} = 100$, y la trasera $\frac{400}{5} = 80$.

La delantera dio 20 vueltas más.

Problema 2

Un antiguo acertijo popular dice:

* *Cada mochuelo en su olivo y sobra un mochuelo*

* *Dos mochuelos en cada olivo y sobra un olivo.*

¿Sabrías cuántos mochuelos y cuántos olivos son?

Solución

Se puede resolver aplicando un popular tanteo, ya que las soluciones son fáciles de hallar: 4 mochuelos y 3 olivos.

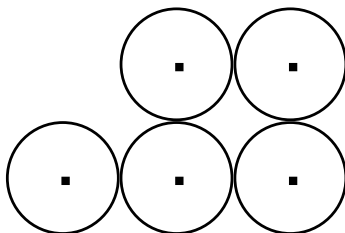
También puede hacerse de forma más general planteando un sencillo sistema de dos ecuaciones de primer grado.

Si es m el número de mochuelos y a el de árboles, se verifica:

$$\left. \begin{array}{l} m = a + 1 \\ \frac{m}{2} = a - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m = 4, a = 3$$

Problema 3

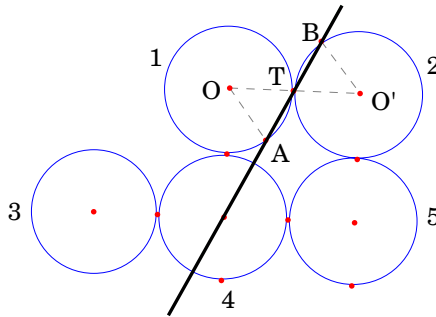
Los cinco círculos que aparecen en la composición mostrada en el dibujo son congruentes (iguales) entre sí.



Dibuja una recta que divida el dibujo en dos partes tales que las áreas de las regiones cubiertas por los círculos sean iguales.

Solución

Se demuestra que la recta que pasa por el centro del círculo 4 y por el punto T común a las circunferencias 1 y 2 es la recta pedida.

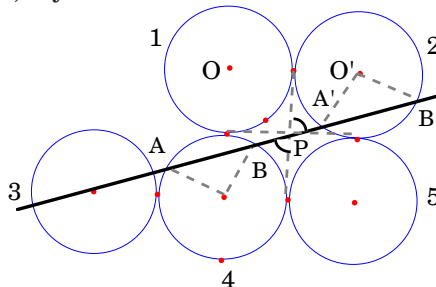


Para ver que son iguales los segmentos circulares AT y BT de los círculos 1 y 2, respectivamente, se trazan los radios OA y O'B, y el segmento OO' que une los centros. Los triángulos OAT y O'BT tienen dos lados iguales por ser radios de circunferencias iguales, y tienen iguales los ángulos en T por ser opuestos por el vértice; por ello los dos triángulos son iguales. En consecuencia las cuerdas AT y BT son iguales, por lo que los segmentos circulares también lo son.

La recta trazada deja a su derecha el círculo nº 5, la mitad del 4 y entre la parte del 1 y la del 2 completan otro círculo: en total a su derecha queda la superficie equivalente a dos círculos y medio de los cinco que hay.

Otras dos soluciones análogas a la anterior se obtendrían trazando la recta que pasa por el punto común a 1 y 4 y por el centro de 5; o trazando la recta que pasa por el centro de 1 y el punto común a 4 y 5.

Otra solución distinta de las anteriores se obtiene mediante la recta que pasa por el centro de 3 y por el punto P, que es el de corte de las tangentes a las circunferencias 1, 2, 4 y 5.



Para demostrarlo se observa que los ángulos con vértice en P que están marcados, son iguales por opuestos por el vértice y ambos son exteriores (los

lados son una tangente y una secante) en las circunferencias 2 y 4, por lo que abarcan arcos iguales, y también serán iguales los arcos AB y A'B', por lo que los segmentos serán iguales. En consecuencia, por debajo de la recta queda el círculo 5 completo, parte del 4 y del 2 que completan otro círculo, y la mitad del 3, en total dos y medio círculos.

Problema 4

En la nevera hay mantequilla y mahonesa, jamón y mortadela, queso fresco y queso manchego, tomate y lechuga. Me quiero hacer un sandwich untando ambas rebanadas de pan con la misma sustancia y que en su interior tenga un fiambre, un queso y un vegetal.

¿De cuántas maneras puedo hacerlo?

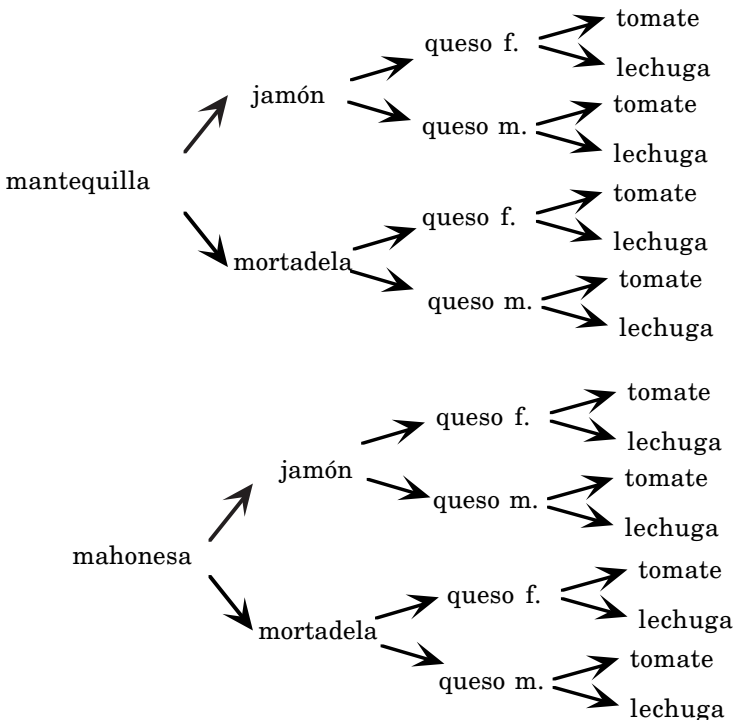
Solución

Se puede tomar cada una de las sustancias de untar con cada fiambre, resultando 2×2 parejas diferentes.

A continuación, cada uno de estas parejas con cada queso, y resultan $2 \times 2 \times 2$ tríos distintos.

Y, por último, cada uno de estos tríos con cada verdura, resultando $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ sandwichs diferentes.

Este proceso se puede visualizar dibujando un diagrama de árbol.



Problema 5

Uniando cubos de madera, cuya arista mide 1 cm, se construye un prisma recto cuya base es un rectángulo de dimensiones 4×5 cm y cuya altura sea 3 cm. A continuación se pintan sus caras de negro y, una vez que la pintura está seca, se desmonta el prisma descomponiéndolo en cubos unidad de arista 1 cm.

a) Completa la siguiente tabla:

Número de cubos unidad que tienen pintada

3 caras	2 caras	1 cara	0 caras

b) Si se mantienen las dimensiones de la base y se varía la altura, ¿es posible construir un prisma recto en el que el número de cubos unidad con cero caras pintadas fuese la cuarta parte del número total de cubos unidad?

Solución

a)

3 caras	2 caras	1 cara	0 caras
8	24	22	6

b) Por cada unidad que se aumenta a la altura sucede que el número de cubitos con 0 caras pintadas aumenta en 6 unidades, mientras que el número total de cubos unidad aumenta en 20.

Partiendo de la situación inicial descrita en el cuadro anterior en que hay 6 cubitos sin pintar de un total de 60, será posible que aquellos lleguen a ser la cuarta parte de estos, si la ecuación siguiente tiene como solución un número natural.

Si es x el número de unidades que se añade a la altura, los cubitos sin pintar son $6 + 6x$, y los cubitos totales $4 \cdot 5(3 + x)$.

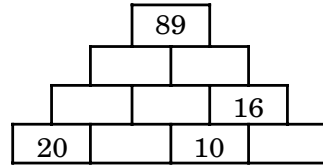
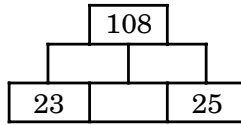
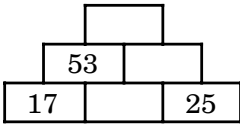
$$\text{Entonces: } 6 + 6x = \frac{1}{4}[4 \cdot 5(3 + x)] \Rightarrow x = 9$$

Sí es posible; habrá que añadir 9 unidades de altura. Resultará un prisma de 12 cm de altura. Entonces los cubos sin pintar serán 60 y el total de cubos 240.

CASTILLA Y LEÓN 1998 FASE PROVINCIAL DE BURGOS

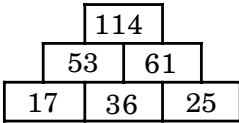
Problema 1. TORRES DE NÚMEROS

En estas tres torres cada bloque vale la suma de los dos sobre los que se apoya. Completa los números que faltan.



Solución

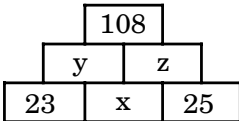
Primera torre.



Es inmediato obtener los valores

$$\begin{cases} 36 = 53 - 17 \\ 61 = 36 + 25 \\ 114 = 53 + 61 \end{cases}$$

Segunda torre:

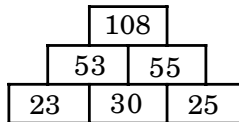


Designemos por x, y, z los números que faltan.

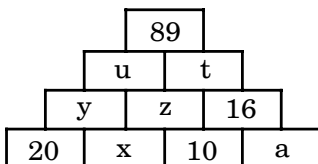
Entonces:

$$\begin{cases} 23 + x = y \\ 25 + x = z \\ y + z = 108 \end{cases} \Rightarrow 48 + 2x = y + z = 108 \Rightarrow 2x = 60 \Rightarrow x = 30$$

Por tanto: $x = 30$, $y = 53$, $z = 55$, y la torre será:



Tercera torre:



Designemos por a, x, y, z, t, u los números que faltan.

Establecemos las siguientes relaciones:

$$a = 16 - 10 = 6$$

$$20 + x = y$$

$$10 + x = z$$

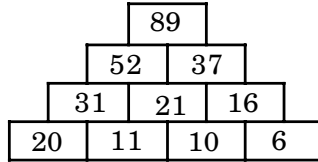
$$y + z = u \quad \Rightarrow \quad u = 20 + x + 10 + x = 30 + 2x$$

$$z + 16 = t \quad \Rightarrow \quad t = 10 + x + 16 = 26 + x$$

$$u + t = 89 \quad \Rightarrow \quad 30 + 2x + 26 + x = 89 \quad \Rightarrow \quad x = 11$$

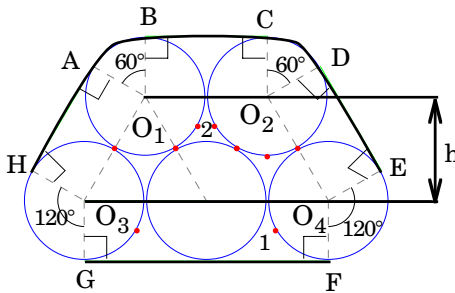
Resultando: $y = 31$, $z = 21$, $u = 52$, $t = 37$

La torre se completa así:



Problema 2. RUEDA DE TANQUE

Los círculos de la figura tienen 20 cm de diámetro.



Con este dato y los que puedes leer en la figura contesta a estas preguntas:

- a) ¿Cuánto mide la línea que envuelve a todos ellos?
- b) ¿Cuál es el valor de los ángulos del trapecio $O_1O_2O_4O_3$?
- c) ¿Cuál es el área de este trapecio?
- d) ¿Cuál es el área de la figura 1?
- e) ¿Cuál es el área total encerrada por la línea envolvente?

Solución

a) La línea que los envuelve consta de:

-- 4 segmentos rectilíneos, AH, BC, DE, FG.

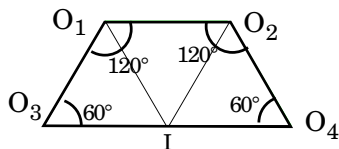
$O_1O_3 = BC = AH = DE = 2R = 20$ cm, pues BCO_2O_1 es un rectángulo.

Por otra parte: $FG = O_3O_4 = 4R = 40$ cm.

-- 2 arcos de circunferencia, GH y FE, de ángulo central 120° y otros 2 arcos, AB y CD, de 60° , del mismo radio, que completan 360° , esto es, una circunferencia: $2\pi R = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ cm.

Luego la longitud total es: $20 \cdot 3 + 40 + 20 \pi = 100 + 20 \pi \cong 162,8$ cm.

b)



El triángulo $O_1 O_3 I$ es equilátero (cada lado es igual a 2 radios), por lo que los ángulos en la base mayor del trapecio miden 60° y los de la base menor son respectivamente suplementarios de aquellos.

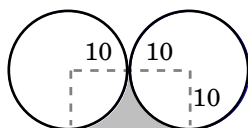
Por tanto: $O_1 = O_2 = 120^\circ$ y $O_3 = O_4 = 60^\circ$.

c) El trapecio está formado por tres triángulos equiláteros cuyo lado vale $a = 2R = 20$ cm. El área de uno en función del lado es: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 100 \sqrt{3}$ cm².

El área del trapecio es $300 \sqrt{3}$ cm² $\cong 519,62$ cm².

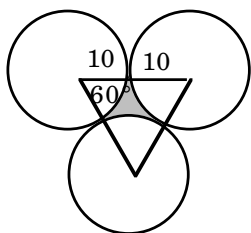
También se puede calcular este área utilizando la fórmula del área del trapecio.

d) El área pedida se obtiene como diferencia del área del rectángulo de dimensiones 20 y 10 cm y el área de dos cuadrantes de círculo, esto es, un semicírculo de radio 10 cm.



$$20 \cdot 10 - \frac{\pi 10^2}{2} = 200 - 50\pi \approx 42,92 \text{ cm}^2$$

e) El área total se compone de 5 círculos más 5 figuras tipo 1 más 3 figuras tipo 2.



La figura 2 es un triángulo curvilíneo y su área es la del triángulo equilátero de lado 20 cm, menos la de tres sectores circulares de radio 10 cm y amplitud 60° .

$$\text{Área del triángulo equilátero: } \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 100 \sqrt{3}$$

$$\text{Área del sector circular} = \frac{1}{6} \text{ del círculo} = \frac{1}{6} \pi \cdot 10^2 = \frac{50 \pi}{3}$$

$$\text{Como son tres sectores: } 3 \cdot \frac{50 \pi}{3} = 50 \pi$$

$$\text{Área de la figura 2: } 100 \sqrt{3} - 50 \pi$$

El área total valdrá:

$$5\pi \cdot 10^2 + 5(200 - 50\pi) + 3(100\sqrt{3} - 50\pi) = 100(\pi + 10 + 3\sqrt{3}) \cong 1.833,77 \text{ cm}^2.$$

Problema 3. ROMERÍA DE SAN PATRICIO

A la gran romería que se celebra cada año en San Patricio, todos los participantes del pueblo asisten en grandes coches de caballos. El pasado año, cuando todos partieron a la romería, cada coche llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad del camino se rompieron diez coches, de modo que cada uno de los coches debió llevar una persona más.

Cuando volvían a casa descubrieron que se habían descompuesto quince coches más, de manera que durante el viaje de regreso había en cada coche tres personas más que al partir por la mañana.

¿Cuántas personas asistieron a la gran romería de San Patricio? ¿Cuántos coches llevaban?

Solución

Sea x el número de coches, n el número de personas en cada coche y p el número total de personas.

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot n = p \\ (x - 10)(n + 1) = p \Rightarrow x - 10n = 10 \\ (x - 25)(n + 3) = p \Rightarrow 3x - 25n = 75 \end{array} \right\} \Rightarrow n = 9, x = 100$$

Asistieron a la romería 100 coches y $100 \times 9 = 900$ personas.

Problema 4. SUMAS ADECUADAS

Haciendo sumas, adecuadamente, con los números 5 y 7, se pueden obtener muchos números:

$$\begin{array}{l} 15 = 5 + 5 + 5 \\ 12 = 5 + 7 \\ 27 = 5 + 5 + 5 + 5 + 7 \\ 21 = 7 + 7 + 7 \end{array}$$

¿Cuáles no puedes obtener? ¿Cuáles sí?
(Pon muchos ejemplos para que puedas dar con la solución).

Solución

No se pueden escribir desde el 1 hasta el 9 por ser 10 la menor de las sumas (5 + 5).

Con dos sumandos se pueden formar las sumas:

$$5 + 5 = 10 \quad 5 + 7 = 12 \quad 7 + 7 = 14$$

tres números pares consecutivos del 10 al 14.

Con tres sumandos serían: 15, 17, 19, 21, cuatro números impares consecutivos del 15 al 21.

Con cuatro sumandos, cinco pares consecutivos: 20, 22, 24, 26, 28.

Con cinco sumandos, seis impares, del 25 al 35.

Deduciendo que la ley de formación sería:

-- Si la cantidad de sumandos es de la forma $2n$, se formarán $2n + 1$ números pares desde $10n$ hasta $14n$.

-- Si la cantidad es impar, de la forma $2n + 1$, se forman $2n + 2$ números impares, desde $5(2n + 1) = 10n + 5$ hasta $14n + 7$.

De esta forma se podrían escribir todos los números mayores que 10, exceptuando el 11, 13, 16, 18 y 23.

FASE PROVINCIAL DE LEÓN

Problema 1

Tenemos 105 monedas, entre las que sabemos que hay 3 falsas. Las monedas auténticas pesan todas lo mismo, y su peso es mayor que el de las falsas, que también pesan todas lo mismo.

Indicar de qué manera se pueden seleccionar 26 monedas auténticas realizando sólo dos pesadas en una balanza de dos platos.

Solución

De las 105 monedas separamos una, que puede ser auténtica o falsa.

1º caso: la separada es falsa.

Las 104 restantes las dividimos en dos partes iguales, A y B, con 52 monedas cada una, pudiendo ocurrir:

a) Parte A: 50 buenas y 2 falsas

Parte B: 52 buenas

Poniendo cada parte en un platillo, pesará más la B. Dividimos B en 2 partes, cada una con 26, y las pesamos: pesarán lo mismo y cualquiera de ellas está formada por 26 buenas.

b) Parte A: 51 buenas y 1 falsa

Parte B: 51 buenas y 1 falsa

Pesarán ambas igual. Elegimos cualquiera de las dos y formamos dos partes de 26 monedas cada una, la que más pese es la que está formada por las 26 buenas.

2º caso: la separada es buena.

Igual que antes, formamos dos partes iguales de 52 cada una, pudiendo ocurrir:

a) Parte A: 49 buenas y 3 falsas

Parte B: 52 buenas

Las pesamos y elegimos la más pesada. Dividimos las 52 de B en dos partes iguales, que pesarán lo mismo. Cualquiera de ellas contiene 26 buenas.

b) Parte A: 50 buenas y 2 falsas

Parte B: 51 buenas y 1 falsa

Pesará más la parte B, pues una buena más una falsa pesan más que dos falsas. Dividimos las 52 de B en dos partes de 26 cada una y elegimos la que más pesa, que estará formada por 26 buenas.

En resumen: se separa una moneda y las que resultan se dividen en 2 lotes de 52, que se comparan en la balanza. Se toma el lote más pesado, o uno cualquiera si hubiera equilibrio, y con éste se procede del mismo modo: se divide en 2 lotes de igual número de monedas, se comparan y el más pesado, o uno cualquiera si hubiera equilibrio, será la solución.

Problema 2

Hemos escogido seis cifras, 1, 3, 4, 7, 8, 9, y con ellas queremos formar dos números que tengan tres cifras cada uno, sin repetir ninguna cifra.

¿Cómo debemos formar estos dos números si queremos que tanto su suma como su producto sea el más grande posible?

¿Sabrías encontrar un método que nos permita encontrar los dos números a partir de las 6 cifras sin hacer ninguna operación?

Solución

Para que el producto sea máximo los números deben ser de la forma 9__ y 8__ (novecientos y pico, ochocientos y pico).

Las segundas cifras deben ser 7 y 4, pudiendo ocurrir:

- A) 97_ y 84_ B) 94_ y 87_

En el caso A: 973 y 841, con suma 1.814 y producto 818.293
 ó 971 y 843, con suma 1.814 y producto 818.553

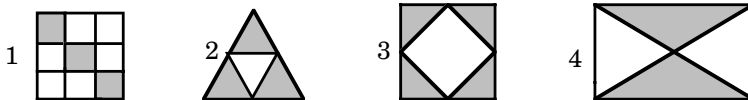
En el caso B: 943 y 871, con suma 1.814 y producto 821.353
 ó 941 y 873, con suma 1.814 y producto 821.493

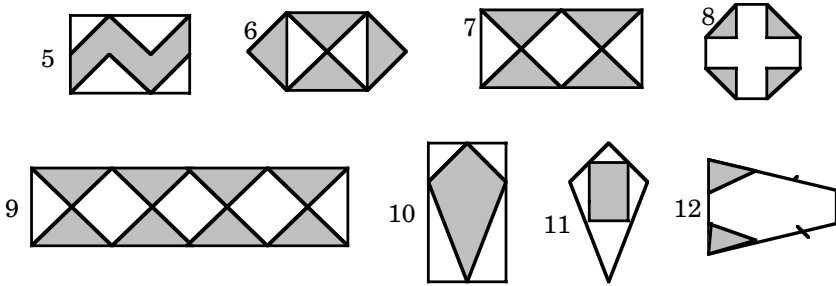
Solución: 941 y 873.

Problema 3

En el primero de los dibujos que aparecen abajo hay tres cuadrados sombreados, de un total de nueve; por tanto la fracción de la figura es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

¿Qué fracción de figura está sombreada en cada uno de estos casos?



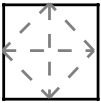


Solución

Figura 1: un cuadrado se divide en 9 partes iguales y se somborean 3. La fracción de área será $1/3$.

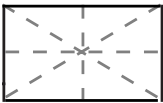
Figura 2: de un triángulo equilátero dividido en 4 triángulos equiláteros iguales, se somborean 3. La fracción de área sombreada es $3/4$.

Figura 3:



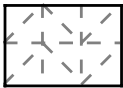
Un cuadro se divide, uniendo los puntos medios de sus lados de todas las formas posibles, en 8 triángulos rectángulos iguales y se somborean 4. La fracción es $1/2$.

Figura 4:



Si trazamos los segmentos que unen los puntos medios de los lados paralelos, el rectángulo queda dividido en cuatro iguales, y cada uno de ellos tiene la mitad sombreada; luego la fracción de área sombreada es $1/2$.

Figura 5:



El rectángulo se ha dividido en 12 triángulos iguales, de los que se han sombreado 6. La fracción de área será $1/2$.

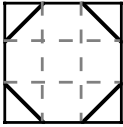
Figura 6: está formada por 6 triángulos iguales, de los que se han sombreado 4. La fracción es $2/3$.

Figura 7:



Hay 4 triángulos sombreados de un total de 8, que corresponden a los $1/2$ de la figura.

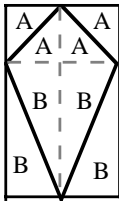
Figura 8:



La figura se ha obtenido trazando paralelas a los lados de un cuadrado por los puntos en que se divide cada lado en tres partes iguales y eliminado los triángulos correspondientes a los vértices. Por tanto, habrá 4 triángulos sombreados de un total de 14, lo que hace una fracción igual a $\frac{2}{7}$.

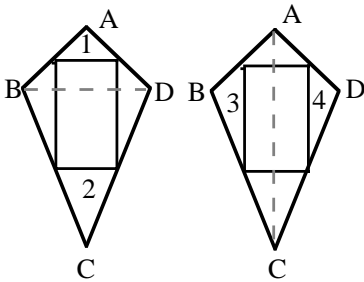
Figura 9: de 16 triángulos hay 8 sombreados, por lo que la parte sombreada es $\frac{1}{2}$ del total.

Figura 10:



Las diagonales del cuadrilátero inscrito en el rectángulo lo dividen en 4 triángulos sombreados (2 tipo A y 2 tipo B) iguales a cada uno de los no sombreados, por lo que la fracción de área es $\frac{1}{2}$.

Figura 11:



El triángulo 1 es $\frac{1}{4}$ del triángulo ABD y el triángulo 2 es $\frac{1}{4}$ del BDC; luego

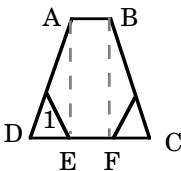
$$T_1 + T_2 = \frac{1}{4}S$$

siendo S el área ABCD.

$$\text{Análogamente: } T_3 + T_4 = \frac{1}{4}S$$

Por tanto, la suma de los cuatro triángulos es la mitad del área del cuadrilátero. La fracción sombreada será $\frac{1}{2}$.

Figura 12:



El triángulo 1 tiene igual base que el triángulo ADE y su altura es $\frac{1}{3}$ de la de éste; luego su área será $\frac{1}{3}$.

Como el triángulo ADE es $\frac{1}{4}$ del trapecio ABCD, el triángulo 1 será $\frac{1}{12}$ del trapacio

Por tanto, la parte sombreada será $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ del total.

FASE PROVINCIAL DE SALAMANCA

Problema 1. LA COMPRA

Arturo, Blas, Carlos y Dionisio van a unos almacenes. Uno de ellos compra un reloj, otro un libro, el tercero unas zapatillas y el cuarto una cámara fotográfica. Los almacenes tienen cuatro pisos. En cada uno de ellos se vende sólo un tipo de artículo.

Arturo hace su compra en el primer piso.

Los relojes se venden en el cuarto piso.

Carlos hace su compra en el segundo piso.

Blas compra un libro.

Arturo no compra una cámara fotográfica.

¿Quién ha comprado cada uno de los artículos y en qué piso?

Solución

A partir del enunciado se puede elaborar el siguiente cuadro:

	Artículo	Piso
Arturo	zapatillas	1º
Blas	libro	3º
Carlos	cámara	2º
Dionisio	reloj	4º

Problema 2. PENSANDO EN LAS MUSARAÑAS

(La musaraña es un pequeño mamífero semejante a un ratón, pero con el hocico más largo y puntiagudo).

Comen tanto 17 osos como 170 monos; 100.000 musarañas tanto como 50 monos; 4 elefantes comen lo mismo que 10 osos. ¿Cuántas musarañas son necesarias para acabar con la comida de 12 elefantes?

Solución

$$17 \text{ osos} \approx 170 \text{ monos} \Rightarrow 1 \text{ oso} \approx 10 \text{ monos}$$

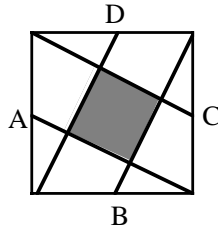
$$4 \text{ elefantes} \approx 10 \text{ osos} \approx 100 \text{ monos} \Rightarrow 12 \text{ elefantes} \approx 300 \text{ monos}$$

$$50 \text{ monos} \approx 100.000 \text{ musarañas} \Rightarrow 300 \text{ monos} \approx 600.000 \text{ musarañas}$$

$$\text{Luego } 12 \text{ elefantes} \approx 600.000 \text{ musarañas.}$$

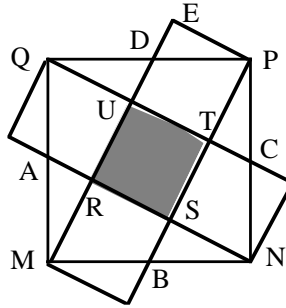
Problema 3. CUADRADOS

Tenemos un cuadrado de lado 10 cm. Calcula el área de la figura sombreada, donde A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrado.



Solución

Veamos qué tipo de cuadrilátero es la figura sombreada.



Los segmentos MD y BP son paralelos por determinar segmentos iguales sobre los segmentos paralelos QP y MN.

De igual modo QC es paralelo a AN.

Además los ángulos DMN y ANP son iguales y tienen perpendiculares uno de sus lados (MN perpendicular a NP), por lo que los otros lados de esos ángulos también son perpendiculares: DM perpendicular a AN.

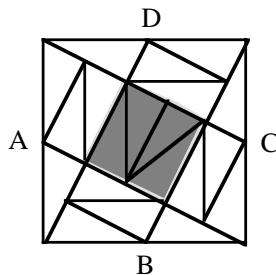
Y por la igualdad de los polígonos formados en la figura, es fácil ver que $RS = ST = TU = UR$, resultando que la zona rayada es un cuadrado.

Trazamos una paralela a QC por P y obtenemos un triángulo con la prolongación de MD, PED, igual al QUD; por tanto, la figura TUEP es un cuadrado igual al RUTS. Se podrían construir cuatro de esos cuadrados, que junto con el RUTS formarían el cuadrado primitivo MNPQ.

Por tanto, el área del cuadrado RUTS es $\frac{1}{5}$ del total = 20 cm^2 .

Otra forma:

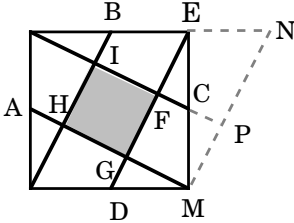
Haciendo la construcción que se indica en la figura siguiente, el cuadrado inicial queda descompuesto en 20 triángulos iguales.



Siendo S el área del cuadrado, el área de cada triángulo valdrá $\frac{1}{20}S$.

Como la parte sombreada está formada por 4 de esos triángulos, su área valdrá $\frac{1}{5}S=20 \text{ cm}^2$.

Otra forma:



Por el vértice M trazamos un segmento paralelo al DE .

Los triángulos EFC y CPM son iguales por tener los ángulos correspondientes al vértice C iguales por opuestos por el vértice, el ángulo P y el F iguales por ser rectos, y los lados EC y CM iguales.

Por tanto, el cuadrado $GMPF$ y el triángulo MGE tienen igual área, igual a la del cuadrado sombreado, ya que tienen el mismo lado.

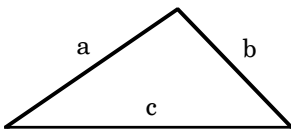
Así, el área del cuadrado sombreado es la quinta parte del cuadrado total: $\frac{1}{5}10 \cdot 10 = 20 \text{ cm}^2$.

Problema 4. TRIÁNGULOS

¿Cuántos triángulos hay de hasta 12 cm de perímetro con las unidades de sus lados todas enteras?

¿Cuál de todos los que tienen de perímetro 12 crees tú que es el de mayor área? Explicalo.

Solución



En todo triángulo se verifica que un lado es menor que la suma de los otros dos:

$$c < a + b$$

Sumando c a los dos miembros de la desigualdad y designando por $2p$ el perímetro del triángulo:

$$2c < a + b + c \Rightarrow 2c < 2p \quad c < p$$

Por tanto, un lado de un triángulo es menor que el semiperímetro.

En el siguiente cuadro aparecen las distintas posibilidades:

<u>perímetro</u>	<u>lado mayor</u>	<u>lados</u>
12	< 6	5, 5, 2; 5, 4, 3; 4, 4, 4
11	< 5,5	5, 5, 1; 5, 4, 2; 5, 3, 3; 4, 4, 3
10	< 5	4, 4, 2; 4, 3, 3
9	< 4,5	4, 4, 1; 4, 3, 2; 3, 3, 3

8	< 4	3, 3, 2
7	< 3,5	3, 3, 1; 3, 2, 2
6	< 3	2, 2, 2
5	< 2,5	2, 2, 1
4	< 2	ninguno
3	< 1,5	1, 1, 1

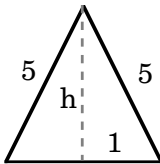
Con perímetro 2 y 1 no hay ningún triángulo.

El primer triángulo es isósceles

En total se pueden formar 18 triángulos.

Veamos entre los de perímetro 12 cuál es el de mayor área.

El primer triángulo es isósceles.



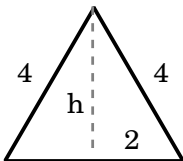
$$h = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \approx 4,90 \text{ cm}^2$$

El segundo es un triángulo rectángulo por verificarse: $5^2 = 3^2 + 4^2$

Los catetos miden 3 y 4; por tanto el área vale: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$.

El tercer triángulo es equilátero



$$h = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ cm}^2$$

El de área máxima es el equilátero.

Nota: Si alguno de los triángulos no hubiera sido tan “especial”, se podría calcular fácilmente su área por la fórmula de Heron:

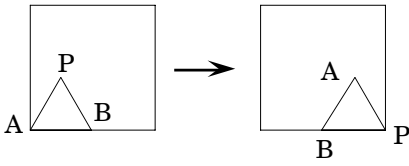
$$\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

siendo a, b, c los lados y p el semiperímetro.

FASE PROVINCIAL DE SORIA

Problema 1

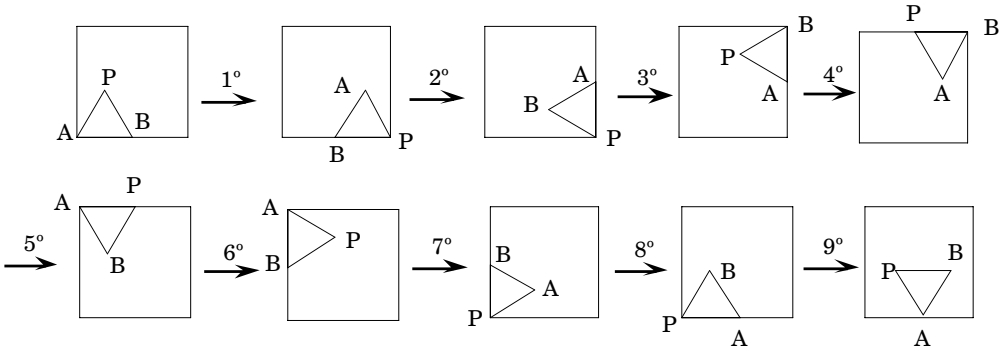
En la esquina inferior izquierda de un cuadrado de lado 4 metros se coloca el triángulo equilátero ABP de lado 2 metros, tal y como se observa en la parte izquierda de la figura.



El triángulo “rueda” sin deslizarse sobre los lados del cuadrado y por la parte interior de éste, girando en el sentido de las agujas del reloj y manteniendo siempre un vértice apoyado en un lado del cuadrado (el primer movimiento aparece en la figura)

Cuando el punto P vuelve a su posición inicial, ¿cuántos metros habrá recorrido?

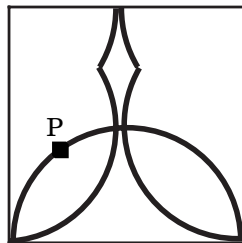
Solución



En la figura anterior se representan los pasos sucesivos, en los que el punto P recorre arcos de circunferencia de radio 2 m y distintas amplitudes.

- 1º: Arco de centro B y amplitud 120°.
- 2º: El punto P no se mueve.
- 3º: Arco de centro A y amplitud 120°.
- 4º: Arco de centro B y amplitud 30°.
- 5º: El punto P no se mueve.
- 6º: Arco de centro A y amplitud 30°.
- 7º: Arco de centro B y amplitud 120°.
- 8º: El punto P no se mueve.
- 9º: Arco de centro A y amplitud 60°.

La trayectoria es la siguiente:



Recorre: $2 \times 120^\circ + 2 \times 30^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 360^\circ + 120^\circ$, esto es, una circunferencia completa y un tercio de circunferencia, o sea $4/3$ de circunferencia.

Como el radio vale 2 m, la longitud total recorrida será:

$$\frac{4}{3} 2\pi \cdot 2 = \frac{16\pi}{3} \cong 16,76 \text{ m.}$$

Problema 2

Se dice que existió un rey que tenía la costumbre de dar la libertad a uno de sus prisioneros el día de su cumpleaños. Para ello sometía a varios prisioneros a una prueba, y el primero que la superaba quedaba libre.

En cierta ocasión, propuso una prueba de razonamiento lógico a tres condenados, con la promesa de que daría la libertad al primero que diera la respuesta correcta.

El rey pasó a los tres condenados, A, B y C, a una habitación oscura en la que había tres sombreros blancos y dos negros. Les puso a cada uno un sombrero y les sacó a la luz, donde cada uno podía ver el sombrero de los demás, pero no el suyo. A continuación preguntó al prisionero A si sabía el color de su sombrero. El prisionero contestó que no podía saberlo. Luego hizo la misma pregunta al condenado B. Después de mirar los sombreros de sus compañeros y reflexionar un poco, contestó que no sabía. Finalmente, formuló la pregunta al prisionero C, que era ciego, el cual contestó: *No me hace falta ver, mi sombrero es blanco.*

Comprobado por todos su acierto, el rey le dejó en libertad.

¿Cómo pudo llegar C a la conclusión?

Solución

B y C no pueden llevarlo ambos negro, pues A sabría que el suyo es blanco. Luego B y C llevan ambos sombrero blanco o uno negro y otro blanco.

Por la misma razón A y C no pueden llevarlo ambos negros, pues B sabría que el suyo es blanco.

<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	
B	B	B	
B	B	N	(1)
B	N	B	
N	B	B	
B	N	N	No
N	B	N	No
N	N	B	

El caso (1) no puede darse, pues A no puede saber el color de su sombrero, pero B sí, pues si B lo tuviese negro, A sabría su color (B sabe que que A no puede adivinar su color), luego B sabría que el suyo es blanco.

En los cuatro casos restantes C tiene el sombrero blanco, luego C puede acertar siempre.

Por tanto, C lo lleva siempre blanco.

Problema 3

Pottsylvania utiliza como moneda, únicamente, billetes de 7 y 17 dólares.

a) ¿Puedes comprar un libro de 5 dólares y que te devuelvan el cambio exacto?

b) ¿Y una revista de 11 dólares?

c) ¿Y unos terrenos de 98.769.876 dólares?

Solución

a) Si x es el número de billetes de 7 \$ que entregó e y el de billetes de 17 \$, debe verificarse: $7x + 17y = 5$, siendo x e y números enteros.

$$\text{Entonces: } x = \frac{5 - 17y}{7} = \frac{5 - 14y - 3y}{7} = \frac{5 - 3y}{7} - 2y$$

Como x es entero, deberá serlo también $\frac{5 - 3y}{7}$.

Una solución es $y = 4$, en cuyo caso $\frac{5 - 3y}{7} = \frac{5 - 12}{7} = -1$.

Será $x = -9$.

Entonces entregó 4 billetes de 17 \$, en total 68 \$, pagó los 5 que cuesta el libro y me devuelven 63 \$ en 9 billetes de 7 \$.

b) Procediendo de forma análoga, entrego 6 billetes de 17 \$, que son 102, me cobran los 11 \$ que cuesta la revista y me devuelven 91 \$ en 13 billetes de 7 \$.

c) Pagamos con 5.809.996 billetes de 17 \$, que son 98.769.932 \$, y nos devuelven 56 \$ en 8 billetes de 7 \$.

Nota: Con billetes de 7 y 17 \$ se puede pagar cualquier cantidad entera.

Problema 4

El primer dígito de un número de seis cifras es el 1. Si se mueve el 1 al otro extremo, el nuevo número es tres veces mayor que el primero. ¿Cuál es el número original?

Solución

Sea $N = \underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{e}$, $N' = \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{e} \underline{1}$

Al ser $3N = N'$, el producto $3.e$ terminará en 1, por lo que $e = 7$, y nos llevamos 2.

Entonces $N = \underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{7}$, $N' = \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{7} \underline{1}$

$3.d + 2$ debe terminar en 7 $\Rightarrow 3 \times 5 + 2 = 17 \Rightarrow d = 5$ y nos llevamos 1.

Resulta $N = \underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{5} \underline{7}$, $N' = \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

$3.c + 1$ debe terminar en 5 $\Rightarrow 3 \times 8 + 1 = 25 \Rightarrow c = 8$ y nos llevamos 2.

Será $N = \underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{8} \underline{5} \underline{7}$, $N' = \underline{a} \underline{b} \underline{8} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

$3.b + 2$ debe terminar en 8 $\Rightarrow 3 \times 2 + 2 = 8 \Rightarrow b = 2$.

Será $N = \underline{1} \underline{a} \underline{2} \underline{8} \underline{5} \underline{7}$, $N' = \underline{a} \underline{2} \underline{8} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

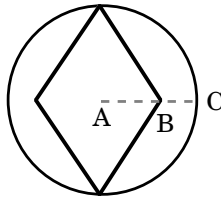
$3.a$ debe terminar en 2 $\Rightarrow 3 \times 4 = 12 \Rightarrow a = 4$.

Solución: $N = 142.857$, $N' = 428.571$.

FASE PROVINCIAL DE VALLADOLID

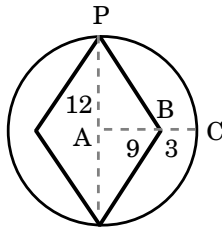
Problema 1. EL ESTANQUE

La alcaldesa de un pueblo ha encargado la construcción de un estanque en forma de rombo para colocarlo en el centro de la plaza circular. Sabiendo que $AB = 9$ dam y $BC = 3$ dam, la arquitecta supo enseguida lo que medía el lado del estanque. ¿Podrías averiguarlo tú?



El concejal de jardines quiere saber cuánta superficie queda libre en la plaza, después de construir el estanque, para plantar césped. ¿Podrías ayudarle también?

Solución



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABP , se halla el lado del rombo:

$$BP = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ dam}$$

Las diagonales del rombo miden 24 y 18 dam.

El área disponible para plantar césped es la diferencia entre las áreas del círculo de radio 12 dam y del rombo:

$$\pi \cdot 12^2 - \frac{24 \times 18}{2} = 144\pi - 216 \cong 236,4 \text{ dam}^2$$

Problema 2. EN LA FRUTERÍA

Dos sandías de igual calidad tienen un perímetro máximo de 60 cm y 50 cm, respectivamente. La primera sandía cuesta vez y media más que la segunda. ¿Qué sandía es más conveniente comprar?

Solución

Suponiendo que son esféricas, vamos a calcular el precio de la unidad de volumen en cada sandía.

$$\text{Sandía grande: radio} = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi} \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27.000}{\pi^3} = \frac{36.000}{\pi^2} \text{ cm}^3$$

$$\text{Sandía pequeña: radio} = \frac{25}{\pi} \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{25^3}{\pi^3} = \frac{62.500}{3\pi^2} \text{ cm}^3$$

Si 1 cm^3 de la pequeña vale P pesetas:

$$\text{Precio de la pequeña: } \frac{62.500}{3\pi^2} \cdot P \cong 2.110,86 P \text{ pts.}$$

$$\text{Precio de la grande: } \frac{3}{2} \cdot P \cdot \frac{36.000}{\pi^2} \cong 5.471,34 P \text{ pts.}$$

Por tanto, es más económico el precio de la sandía pequeña.

Problema 3. LAS CANICAS Y LA PELOTA

En una balanza de dos platillos comprobamos que tres cubos de un rompecabezas infantil y una pelota se equilibran con doce canicas. En una segunda pesada vemos que la pelota sola se equilibra con un cubo y ocho canicas.

¿Cuántas canicas habrá que poner en un platillo para equilibrar la balanza, con la pelota colocada en el otro platillo?

Solución

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ cubos} + 1 \text{ pelota} = 12 \text{ canicas} \\ 1 \text{ pelota} = 1 \text{ cubo} + 8 \text{ canicas} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \text{ cubos} + 1 \text{ cubo} + 8 \text{ canicas} = 12 \text{ canicas} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \text{ cubos} + 8 \text{ canicas} = 12 \text{ canicas} \Rightarrow 4 \text{ cubos} = 4 \text{ canicas} \Rightarrow 1 \text{ cubo} = 1 \text{ canica}$$

Por tanto: $1 \text{ pelota} = 1 \text{ cubo} + 8 \text{ canicas} = 9 \text{ canicas}$.

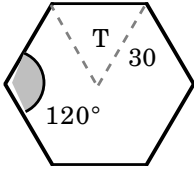
FASE PROVINCIAL DE ZAMORA

Problema 1. CAÍDA EN PARACAÍDAS

Disponemos de un recinto en forma de hexágono regular de 30 m de lado, en cuyos vértices existen piscinas con forma de sector circular de 10 m de radio. Si unos paracaidistas caen aleatoriamente dentro del recinto, ¿cuál es la probabilidad de que:

- no caigan en el agua?
- se mojen al caer en alguna de dichas piscinas?
- caigan con un pie en cada piscina?

Solución



El hexágono se compone de 6 triángulos equiláteros, T, de lado 30 m.

Las piscinas son sectores de 120°, un tercio de círculo, y 10 m de radio.

$$\text{Área del hexágono} = 6 \cdot T = 6 \cdot \frac{30^2 \sqrt{3}}{4} = 1.350 \sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$\text{Área de un sector: } \frac{1}{3} \pi \cdot 10^2 = \frac{100 \pi}{3} \text{ m}^2$$

Las probabilidades que se calculan se refieren a un solo paracaidista.

a) Probabilidad de no caer en el agua:

$$\frac{\text{área del hexágono} - \text{área de 6 sectores}}{\text{área del hexágono}} = \frac{1.350 \sqrt{3} - 200 \pi}{1.350 \sqrt{3}} \cong 0,73$$

b) Probabilidad de caer en alguna de las piscinas: $1 - 0,73 = 0,27$

c) Probabilidad de caer con un pie en cada piscina: es 0, es un caso imposible, ya que la mínima distancia entre dos piscinas es 10 m.

Problema 2. HIJOS Y EDADES

Un matrimonio tiene hijos de tres edades diferentes. El mayor es todavía menor de edad y sus años son múltiplos de seis. El más pequeño será el primero en celebrar su cumpleaños y cumplirá la mitad de los que tiene el mayor. La suma de las edades de los tres hijos es 28.

¿Cuántos hijos tienen y de qué edades?

Solución

Al final del enunciado se dice: “la suma de las edades de los tres hijos es 28”. Luego tienen 3 hijos.

El mayor tiene 6 ó 12 años por ser menor de 18 años y múltiplo de 6.

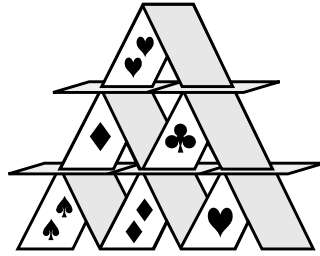
El menor tiene 2 ó 5. Cumplirá 3 ó 6, que es la mitad de la edad del mayor.

Si fueran 6 y 2, el mediano tendría $28 - (6 + 2) = 20$, que es imposible.

Por tanto, el mayor tiene 12 años, el menor 5 y el mediano 11.

Problema 3. CASTILLO DE NAIPES

Este es un castillo de cartas de tres pisos. Se aprecia que se necesitan 15 cartas.



a) ¿Cuántas cartas necesitaríamos para tener un castillo similar, pero de 10 pisos de altura?

b) El record mundial está en 61 pisos. ¿Cuántas cartas necesitaríamos para batir este record mediante un castillo de 62 pisos?

Solución

a) La disposición de las cartas para 3 pisos, contados de arriba hacia abajo, es:

2 inclinadas (I) + 1 horizontal (H)	
4 inclinadas + 2 horizontales	
6 inclinadas	Total: 15.

Para 10 pisos será:

2 I + 1 H
4 I + 2 H
6 I + 3 H
8 I + 4 H
10 I + 5 H
12 I + 6 H
14 I + 7 H
16 I + 8 H
18 I + 9 H
20 I

$$\text{Total: } \frac{22 \times 10}{2} + \frac{10 \times 9}{2} = 155$$

b) En el castillo de 62 pisos se necesitarán:

$$\begin{aligned} & (2 + 4 + 6 + \dots + 62 \times 2) \text{ inclinadas} + (1 + 2 + 3 + \dots + 61) \text{ horizontales} = \\ & = \frac{2 \times 62 + 2}{2} \times 62 + \frac{1 + 61}{2} \times 61 = 63 \times 62 + 31 \times 61 = 5.797 \text{ cartas} \end{aligned}$$

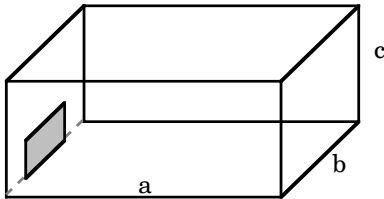
Problema 4. EL PALACIO MISTERIOSO

Algunos historiadores estaban tratando de reunir información, obtenida de distintas fuentes, sobre un antiguo palacio destruido hacía mucho tiempo.

Sabían que una de las habitaciones principales tenía un muro largo completamente cubierto con paneles de madera de roble, mientras que la pared del fondo, opuesta a la puerta, estaba cubierta con un tapiz fabricado en Francia. El suelo estaba cubierto con una alfombra especialmente hecha en Persia.

En cada caso, conocían muchos detalles sobre el diseño y los colores, y sabían también que la superficie de los paneles, el tapiz y la alfombra eran 648, 288 y 1.296 m² cada una. Sin embargo, no pudieron encontrar referencia alguna sobre las dimensiones lineales de la habitación. ¿Puedes ayudarle tú?

Solución



Se supone que la habitación tiene forma de prisma rectangular u ortoedro.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Paneles de roble: } a \cdot c = 648 \\ \text{Tapiz: } b \cdot c = 288 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{648}{288} = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{9b}{4}$$

Alfombra: $a \cdot b = 1.296$

Sustituyendo en la tercera: $\frac{9b}{4} \cdot b = 1.296 \Rightarrow b^2 = 576 \Rightarrow b = 24 \text{ m.}$

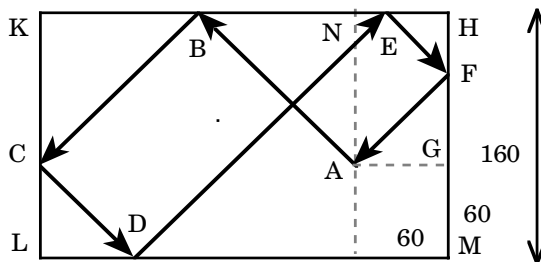
Entonces: $a = 9 \cdot 6 = 54 \text{ m}$ y $c = \frac{288}{24} = 12 \text{ m}$

FASE AUTONÓMICA

Problema 1. BILLAR A CINCO BANDAS

En un billar de 160 cm de ancho, está colocada una bola en la parte inferior derecha, a 60 cm de cada uno de los bordes. Esta bola es lanzada sin efecto hacia la parte superior izquierda con el taco en un ángulo de 45° con el lado mayor del billar. Después de haber tocado cinco bandas, la bola vuelve a su punto de partida. ¿Cuánto puede medir el largo del billar?

Solución



Sea A el punto de partida de la bola; después de tocar en los puntos B, C, D, E y F, vuelve al punto A.

Largo del billar: $HK = HN + NB + BK$.

Como en todas las bandas incide la bola con ángulos de 45° , todos los triángulos rectángulos de la figura son isósceles, por lo que sus catetos son iguales, y, además, los triángulos BKC y BNA son iguales.

$$HN = GA = 60 \text{ cm.}$$

$$NB = NA = HG = HM - GM = 160 - 60 = 100 \text{ cm.}$$

$$BK = NB = 100 \text{ cm.}$$

$$\text{Entonces } HK = 60 + 100 + 100 = 260 \text{ cm.}$$

Problema 2, LA CARRERA

En una carrera, exactamente el 20 % de los corredores que llegaron a la meta tardaron menos de 45 minutos; y exactamente el 25 % tardaron más de una hora. 49 corredores se declararon satisfechos con el tiempo que habían hecho y el total de los corredores que inició la carrera era 73. ¿Cuántos se retiraron sin concluir la carrera?

Solución

Sean F los que finalizaron y R los que se retiraron: $F + R = 73$.

El 20% de F es $\frac{F}{5}$; luego F ha de ser múltiplo de 5.

El 25% de F es $\frac{F}{4}$; luego F ha de ser múltiplo de 4.

Por tanto, F será múltiplo de 20.

Si $F = 20$, sólo podría haber 20 satisfechos, y hay 49.

Si $F = 40$, sólo podría haber 40 satisfechos.

Por tanto, $F = 60$ y $R = 73 - 60 = 13$.

Problema 3. LOS APRETONES DE MANOS

En una reunión hay 9 personas. La primera da la mano a una persona; la segunda da la mano a 2 personas; la tercera da la mano a 3 personas,..., la octava da la mano a 8 personas. ¿Cuántas veces da la mano la novena persona?

Si en la reunión hubiera 100 personas y la primera da la mano a una persona, la segunda da la mano a 2 personas, la tercera da la mano a 3 personas,..., la 99^{a} da la mano a 99 personas, ¿a cuántas personas da la mano la persona número 100? ¿Puedes generalizar el problema a cualquier número de personas?

Solución

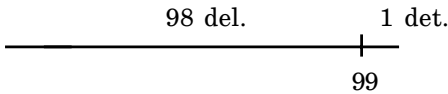
Numeramos a las personas del 1 al 9.

-- El 8 da la mano a 8 personas: 1-8, 2-8, 3-8, 4-8, 5-8, 6-8, 7-8, 9-8.

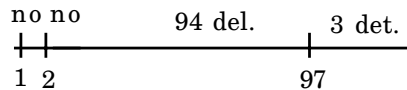
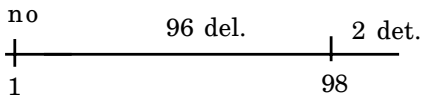
El 1 ya no puede dar la mano a nadie.

- El 7 da la mano a 7 personas: 7-2, 7-3, 7-4, 7-5, 7-6, 7-8, 7-9.
- El 2 ya no puede dar la mano a nadie.
- El 6 da la mano 6 veces: 6-3, 6-4, 6-5, 6-7, 6-8, 6-9.
- El 3 ya no puede dar la mano a nadie.
- El 5 da la mano 5 veces: 4-5, 6-5, 7-5, 8-5, 9-5.
- El 4 ya no puede dar la mano a nadie, ni el 3, ni el 2, ni el 1.
- Ya están contabilizados todos los casos, luego el 9 da la mano 4 veces.

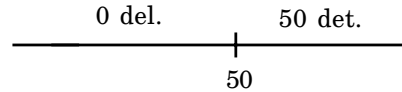
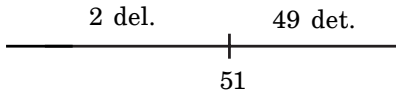
Para el caso de 100 personas:



El 99 da 99 veces la mano, por detrás al 100, y por delante desde el 1 hasta el 98.



Siguiendo este proceso:



Por tanto, el 100 le ha dado la mano al 50, 51, 52, ... , 99, es decir, a 50 personas.

En general: si hay n personas y n es par, la última da la mano a $\frac{n}{2}$ personas. Si n es impar, la última da la mano $\frac{n-1}{2}$ veces.

Problema 4. EL CASO DE LA TIENDA DE MCGREGOR

El señor McGregor, un comerciante londinense, telefoneó a Scotland Yard para decir que su tienda había sido robada. Se capturaron tres sospechosos, A, B, C, para su interrogatorio. El inspector Sherlock Holmes estableció sin ninguna duda los siguientes hechos:

- a) Cada uno de los tres hombres A, B, C, había estado en la tienda el día del robo, y nadie más había estado en ella ese día.
 - b) Si A es culpable, entonces tenía un cómplice y sólo uno.
 - c) Si B es inocente, también lo es C.
 - d) Si dos, y sólo dos, son culpables, entonces A es uno de ellos.
 - e) Si C es inocente, también lo es B.
- ¿A quién inculpó el inspector Sherlock Holmes?

Solución

→ Si A es culpable \Rightarrow tiene un cómplice: B o C.

A culpable y B cómplice \Rightarrow B también es culpable y C sería inocente.

Pero si C es inocente \Rightarrow B también lo es. Luego B no es culpable. Contradicción.

→ Si A es culpable y C cómplice \Rightarrow B inocente \Rightarrow C inocente.

Imposible pues C es culpable. Contradicción.

A no puede ser culpable.

→ Si B es culpable \Rightarrow C inocente \Rightarrow B inocente. Contradicción.

→ Si C es culpable \Rightarrow B inocente \Rightarrow C inocente. Contradicción.

Si hay dos culpables \Rightarrow A es uno de ellos; no puede ser el otro, ni B ni C, pues ya hemos llegado a contradicciones.

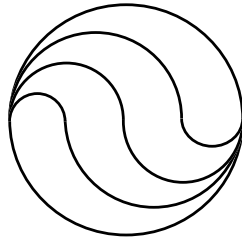
Luego los tres tienen que ser inculpados.

EXTREMADURA

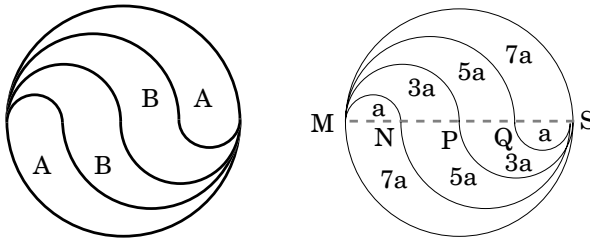
FASE COMARCAL

Problema 1.

Calcular el área y el perímetro de cada una de las cuatro partes del jardín circular de radio 16 metros.



Solución



Las zonas designadas con A (1ª figura) son iguales y también lo son las designadas con B.

Área de la zona A: semicírculo de radio 16, menos semicírculo de radio $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$, más semicírculo de radio $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$.

$$\text{Zona A} = \frac{1}{2} \pi 16^2 - \frac{1}{2} \pi 12^2 + \frac{1}{2} \pi 4^2 = \frac{1}{2} \pi (16^2 - 12^2 + 4^2) = 64 \pi \cong 201,1 \text{ m}^2.$$

Resulta que el área de la zona A es $\frac{1}{4}$ del círculo dado, por lo que entre las dos zonas A sumarán $\frac{1}{2}$ del círculo; el otro medio corresponde a las dos zonas B, cada una de las cuales tendrá de área $\frac{1}{4}$ del círculo.

Resulta, pues, que las cuatro zonas tienen áreas iguales.

El perímetro de la zona A se compone de tres semicircunferencias de radios respectivos 16, 12 y 4: $\pi(16 + 12 + 4) = 32 \pi \cong 100,53 \text{ m}$.

El perímetro de la zona B se compone de dos semicircunferencias de radios 12 y 4, más una circunferencia de radio 8:

$$12\pi + 2 \cdot 8\pi + 4\pi = 32\pi \cong 100,53 \text{ m.}$$

Otra forma de calcular el área.

Sea a el área de cada uno de los semicírculos de diámetros MN y QS (2ª figura).

Como las áreas de los semicírculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros, las áreas de los semicírculos de diámetros MP y PS, dobles de los anteriores, valdrán $4a$; las de los semicírculos de diámetros MQ y NS, triples de los primeros, valdrán $9a$, y las de los semicírculos de diámetro MS, cuádruples de los primeros, valdrán $16a$.

En la figura aparecen las áreas de las distintas partes, y podemos observar que valen cada una $8a$; por tanto el círculo queda dividido en cuatro partes iguales.

$$\text{El área de cada una es } \frac{1}{4}\pi \cdot 16^2 = 64\pi \cong 201 \text{ m}^2$$

Problema 2

¿Cuál es el resultado de realizar correctamente la operación?

$$8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1$$

Coloca convenientemente dos paréntesis en cada caso, para que se obtenga:

- a) $8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1 = 5$
- b) $8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1 = 3$
- c) $8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1 = 1$
- d) $8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1 = 5,5$

Solución

El orden en que deben efectuarse las operaciones es: productos y cocientes, sumas y restas.

$$8 + 4 : 2 - 12 : 3 + 1 = 8 + 2 - 4 + 1 = 7$$

- a) $(8 + 4 : 2) - (12 : 3 + 1) = 10 - 5 = 5$
- b) $(8 + 4) : 2 - 12 : (3 + 1) = 6 - 3 = 3$
- c) $(8 + 4) : 2 - (12 : 3 + 1) = 6 - 5 = 1$
- d) $8 + (4 : 2 - 12) : (3 + 1) = 8 - 10 : 4 = 8 - 2,5 = 5,5$

Problema 3

He vendido manzanas en cuatro casas.

En cada una vendí la mitad de las que llevaba más media, y conste que jamás partí manzanas.

Ya no me queda ninguna.

¿Cuántas manzanas había en la cesta?

Solución

Estos problemas se resuelven fácilmente si se razonan comenzando por el final.

Si al llegar a la 4ª casa lleva x manzanas, vende $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$; le quedan

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Razonando análogamente, llega a la 3ª casa con 3 (vende $1,5 + 0,5 = 2$), a la 2ª con 7 y a la 1ª con 15.

Otra forma. Puede elegirse como incógnita el número x de manzanas que había en el cesto al comienzo e ir restando lo que se vende en cada casa. El proceso se indica en la siguiente tabla:

<u>Casa</u>	<u>manzanas con que llega</u>	<u>manzanas que vende</u>
1ª	x	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
2ª	$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
3ª	$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$
4ª	$\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8} - \frac{7}{8}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}$

Al final han de quedar cero manzanas, por lo que

$$\frac{x}{8} - \frac{7}{8} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16} \Rightarrow x = 15 \text{ manzanas que había en la cesta.}$$

Esta segunda forma permite generalizar el problema y preguntar cuántas manzanas habría en la cesta si se acaban en la casa n .

Si se acaban en la primera casa se cumple: $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$

Si se acaban en la segunda casa: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3$

Si se acaban en la tercera casa: $\frac{x}{4} - \frac{3}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \Rightarrow x = 7$

Ya se ha visto que si se acaban en la cuarta casa $x = 15$.

Los valores de x obtenidos son las potencias de 2 disminuidas en una unidad. Por tanto, a partir de estos casos particulares, parece que si las manzanas se terminan en la casa n , el número de manzanas que había es $2^n - 1$.

Nota. Para que esta demostración fuera rigurosa habría que “completarse” la inducción, lo que parece fuera de nivel.

Problema 4

Al numerar las páginas de un libro usamos las cifras del 0 al 9.

a) ¿Cuántas cifras se utilizan en total para paginar un libro de 358 páginas?

b) ¿Cuántas páginas tendrá un libro, si al paginarlo se han empleado 678 cifras?

Solución

a) Páginas de una cifra (de 1 a 9): se utilizan 9 cifras.

Páginas de 2 cifras (de 10 a 99): se utilizan $90 \times 2 = 180$ cifras.

Páginas de 3 cifras (de 100 a 358): se utilizan $259 \times 3 = 777$ cifras.

En total se utilizan $777 + 180 + 9 = 966$ cifras.

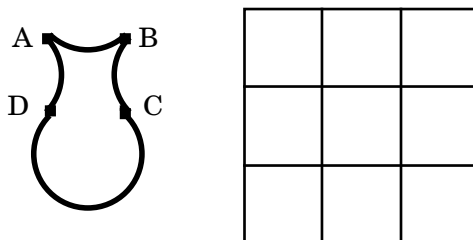
b) Si se han empleado 678 cifras en total, quitándole 9 (de las páginas de una cifra) y 180 de las de 2 cifras, nos quedan $678 - 189 = 489$ cifras para las páginas de 3 cifras. $489 : 3 = 163$

El libro tiene 9 páginas de una cifra, 90 de dos cifras y 163 de tres cifras, en total $9 + 90 + 163 = 262$ páginas.

FASE REGIONAL

Problema 1.

Aquí tienes una figura, que representa la silueta de un jarrón, y una trama cuadrada.



La figura está formada por cuatro arcos de circunferencias del mismo radio; los tres menores son de 90° .

a) Dibuja en la trama la silueta haciendo coincidir los puntos A, B, C y D con vértices de la trama.

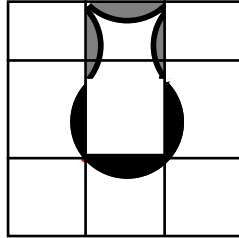
b) Si el lado de los cuadrados de la trama es 1 cm, calcula el área de la figura.

c) Construye un cuadrado cuya área sea igual a la de la figura dada.

d) Calcula el perímetro de esta figura.

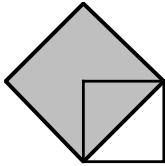
Solución

a) Los arcos corresponden a cuadrantes de la circunferencia circunscrita a un cuadrado.



b) Si con las zonas en negro completamos las rayadas, el área del jarrón es la de un rectángulo formado por dos cuadrados, es decir, 2 cm^2 .

c) Se trata de construir un cuadrado de área 2 cm^2 .



El cuadrado de área doble que uno dado, es aquel cuyo lado es la diagonal del primero.

Podemos seguir el procedimiento general usado en Geometría para cuadrar figuras.

Si x es el lado del cuadrado, ha de ser $x^2 = 2 \cdot 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

El segmento $x = \sqrt{2}$ se construye teniendo en cuenta que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1.

d) El perímetro de la figura está formado por 6 cuadrantes de circunferencia, es decir circunferencia y media: $2\pi r + \pi r = 3\pi r = 3\pi \text{ cm} \cong 9,42 \text{ cm}$.

Problema 2.

Haciendo uso de todos los números naturales del 1 al 9, coloca uno distinto en cada casilla.

	×		+		= 20
+		×		×	
	×		-		= 20
+		+		×	
	+		+		= 20
= 20		= 20		= 20	

Solución

La clave es la tercera columna, donde aparece un producto de tres factores igual a 20; esto sólo es posible con $5 \times 4 \times 1$. Falta saber el orden.

Si fuese $5 \times 4 \times 1$, la primera fila sería: $a \times b + 5 = 20$; a y b deben ser 5 y 3 ó 3 y 5, con lo cual el 5 se repite.

Si fuese $1 \times 5 \times 4$, la primera fila sería: $a \times b + 1 = 20$; $a \times b$ debe ser 19, que es imposible.

Luego la tercera columna será $4 \times 5 \times 1$ ó $4 \times 1 \times 5$, y será $4 \times 1 \times 5$, pues si fuese $4 \times 5 \times 1$, la segunda fila repetiría el 5.

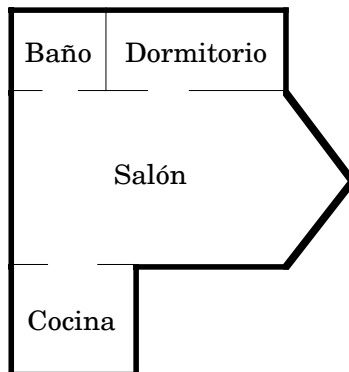
La primera fila debe $8 \times 2 + 4$, pues si fuese $2 \times 8 + 4$, no podría completarse la primera columna.

Con estos datos es fácil completar el cuadro:

8	×	2	+	4	= 20
+		×		×	
3	×	7	-	1	= 20
+		+		×	
9	+	6	+	5	= 20
= 20		= 20		= 20	

Problema 3. He aquí el plano de la superficie útil de un apartamento a la escala 1:100.

Tomando medidas en la figura con una regla:



- a) ¿Cuál es la superficie real del salón en metros cuadrados?
- b) Si la Agencia Inmobiliaria que lo vende tiene establecido un precio de

90.000 pesetas el metro cuadrado, con IVA incluido, ¿cuánto vale el apartamento? El IVA es un impuesto que cobra el Ministerio de Hacienda.

c) Actualmente el IVA es del 6 % sobre el precio de venta. ¿Cuál será el precio del metro cuadrado sin IVA?

Solución

1 cm del plano \approx 100 cm reales = 1 m real

a) El salón tiene un rectángulo de 2,1 m \times 3,3 m, más un triángulo de base 2,1 y altura 0,8. Total: $2,1 \times 3,3 + \frac{2,1 \times 0,8}{2} = 7,77 \text{ m}^2$.

b) Para completar el apartamento faltan el baño, el dormitorio y la cocina.

baño + dormitorio forman un rectángulo de $3,3 \times 1 = 3,3 \text{ m}^2$.

cocina forma un rectángulo de $1,5 \times 1,3 = 1,95 \text{ m}^2$.

Total: $7,77 + 3,3 + 1,95 = 13,02 \text{ m}^2$.

El precio del apartamento será: $13,02 \times 90.000 = 1.171.800 \text{ pts}$.

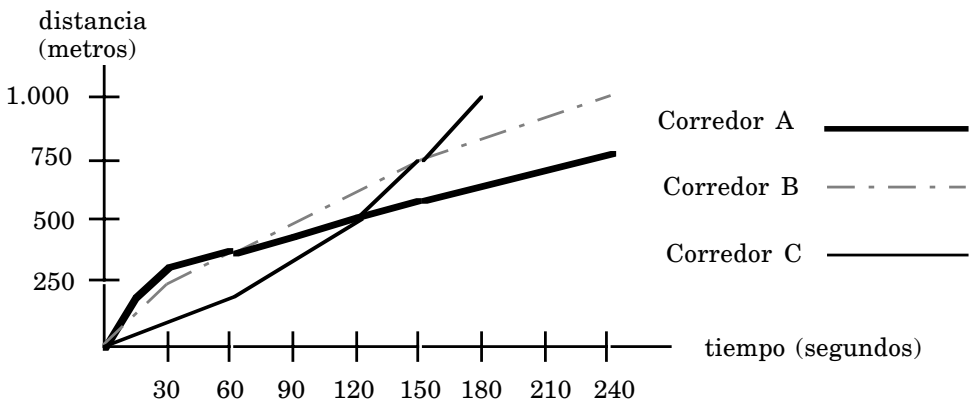
c) Por cada 100 pts se pagan 6 de impuestos, es decir, 100 pts sin IVA, 106 con IVA.

$$\left. \begin{array}{l} 100 \longrightarrow 106 \\ x \longrightarrow 90.000 \end{array} \right\} x = \frac{90.000 \times 100}{106} \cong 84.906 \text{ pts}$$

Problema 4.

Tres atletas participan en una carrera de 1.000 metros.

La presente gráfica describe de forma aproximada el comportamiento de los atletas en dicha prueba.



- a) ¿Cuál de los tres corredores ha salido más rápido?
b) ¿Hay algún instante en que coincidan los tres corredores? ¿Y dos de ellos? ¿Qué distancia llevaban recorrida en ese momento?
c) ¿Quién ganó? ¿Qué velocidad media llevó en la prueba?
d) Comenta otros aspectos interesantes que observes en la carrera.

Solución

a) En los 30 segundos iniciales el corredor A recorre más metros que el B y que el C, sale más rápido A, luego B y por último C.

b) No, pues en ningún punto se cortan las tres gráficas.

A los 60 s coinciden B y A; llevaban recorridos $250 + 125 = 375$ m.

A los 120 s coinciden A y C; llevaban recorridos 500 m.

A los 150 s coinciden B y C, que llevaban recorridos 750 m.

c) Ganó el corredor C, que recorre los 1.000 m en 180 s.

Su velocidad media fue: $\frac{1.000}{180} \cong 5,55$ m/s.

d) A pesar de que el corredor C sale menos rápido, va ganando velocidad y al final gana; realiza un esfuerzo progresivo y la segunda mitad del trayecto la hace a doble velocidad que la primera.

El corredor B queda el segundo e invierte 240 s.

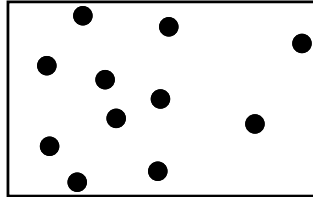
Cuando B entra en la meta, A no ha llegado aún, le quedan 150 m para finalizar.

MADRID 1998

FASE SEMIFINAL

Problema 1. LA PARCELA

Usando solamente cuatro líneas rectas



- a) Crees que es posible dividir la parcela en zonas, de modo que en cada zona haya un único punto?
- b) Inténtalo.

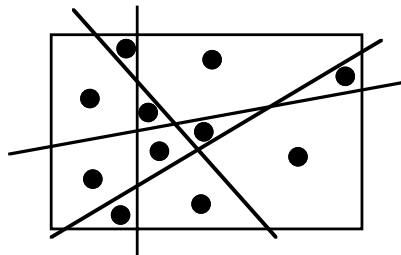
Solución

Sí es posible porque dos rectas secantes dividen al plano en 4 regiones.

Si se traza una tercera recta que corta a las anteriores en puntos no coincidentes, se habrán formado 7 regiones diferentes.

Y al añadir una cuarta recta que corta a las tres anteriores en puntos no coincidentes, se forman 11 regiones, que coincide con el número de puntos de la figura.

He aquí una solución:



Problema 2. VALOR DEL AGUA

En esta suma cada letra representa una cifra. ¿Cuál es el valor del AGUA?

$$\begin{array}{r} \text{GOTA} \\ \text{GOTA} \\ \text{GOTA} \\ \text{GOTA} \\ \hline \text{GOTA} \\ \hline \text{AGUA} \end{array}$$

Solución

Se interpreta el resultado como que cada letra representa una cifra diferente, y además que el número es de cuatro cifras, de donde se deduce que $A \neq 0$.

Al sumar la columna de las unidades, resulta que $A + A + A + A + A$ es un número terminado en A, lo que sólo es posible si $A = 5$.

La suma de las unidades de millar más las que nos llevamos de la columna anterior da 5. Sólo es posible si G es 0 ó 1.

Si fuese $G = 0$, tendría que llevarse 5 de las anteriores, lo que es imposible; por tanto $G = 1$, y no nos llevamos nada de las centenas, lo que obliga a $O = 0$.

El sumar las decenas debemos llevarnos 1, por tanto T vale 2 ó 3.

Si $T = 2$, quedaría $1.025 \times 5 = 5.125$, con $U = 2$, que no puede ser; por tanto $T = 3$.

El valor del AGUA es $1.035 \times 5 = 5.175$.

Problema 3. LA CINTA DE VÍDEO

Una cinta de vídeo puede grabar 2 horas en modo SP, o 4 horas en modo LP, o 6 horas en modo XLP. Después de grabar 32 minutos en modo SP y 44 minutos en modo LP, ¿cuántos minutos pueden grabarse todavía en modo XLP?

Solución

Los 32 minutos grabados en SP han consumido una fracción de la capacidad de la cinta igual a $\frac{32}{120}$.

De la misma manera, los 44 minutos de LP han consumido $\frac{44}{240}$ de la cinta.

Entre ambas grabaciones han consumido $\frac{32}{120} + \frac{44}{240} = \frac{9}{20}$ de la cinta.

Quedan libres sus $\frac{11}{20}$, con lo que se podrá grabar en modo XLP durante un tiempo de $\frac{11}{20} 360 = 198$ minutos = 3 horas y 18 minutos.

FASE FINAL

Problema 1. RELOJES DE ARENA

¿Cómo medirías 12 minutos con dos relojes de arena, uno que tarde 15 minutos en agotarse y el otro 9 minutos?

Solución

Se ponen los dos relojes al mismo tiempo. Al terminar el pequeño han transcurrido 9 min y al grande le faltan 6 min.

Se da la vuelta al pequeño y se empieza en ese instante a contar los 12 min deseados. Cuando finalice el grande han pasado los 6 min que le faltaban.

Se da la vuelta al pequeño y cuando éste se vacía han transcurrido otros 6 min, que junto a los anteriores completan los 12.

Problema 2. LA CICLISTA

Una ciclista tiene que hacer un viaje de 120 km. Como sale con 1 hora de retraso sobre lo previsto, debe viajar 4 km/h más deprisa de lo habitual, con objeto de llegar a tiempo. ¿Cuál es la velocidad habitual de la ciclista?

Solución

Sean t y v el tiempo y la velocidad habitual. Como quiere que el tiempo invertido se mantenga, incluida la hora de retraso, tenemos

$$\left. \begin{array}{l} v \cdot t = 120 \\ (v + 4)(t - 1) = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{120}{v} \Rightarrow v^2 + 4v - 480 = 0$$

Resulta $v = 20$ km y $t = 6$ horas.

Otra forma:

Sea t el tiempo no habitual y v la velocidad habitual; entonces tenemos:

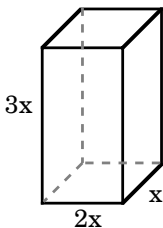
$$t(v + 4) = (t + 1)v \Rightarrow t = \frac{v}{4}$$

Como $(t + 1)v = 120 \Rightarrow v^2 + 4v - 480 = 0 \Rightarrow v = 20$ km y $t = 5$ horas.

Problema 3. EL PRISMA

Las longitudes de los lados de un prisma recto de base rectangular son proporcionales a los números 1, 2 y 3. La superficie total del prisma es de 550 cm². Calcula el volumen.

Solución



Como los lados del prisma son proporcionales a 1, 2 y 3, tenemos:

$$2(2x^2 + 6x^2 + 3x^2) = 550 \Rightarrow 11x^2 = 275 \Rightarrow x = 5$$

El volumen valdrá: $x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3 = 750$ cm³.

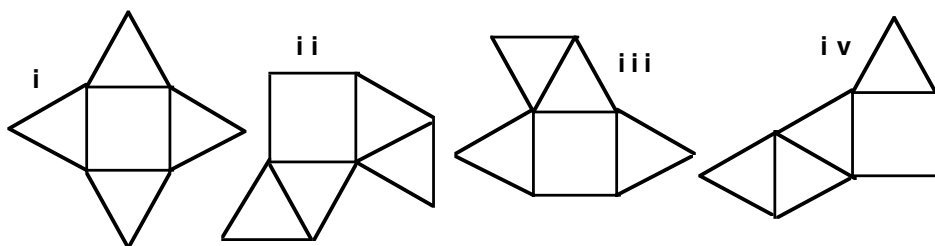
MURCIA 1998

SEGUNDO NIVEL (2º DE ESO)

Problema 1

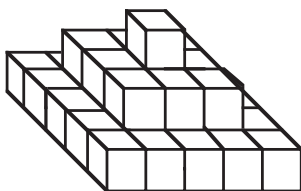
La pirámide de Keops, que se encuentra en Egipto, muy cerca de la esfinge, fue construida hace cerca de 4.500 años y es la más grande del mundo. Hablando de pirámides:

a) ¿Cuáles de los siguientes desarrollos planos corresponden a una pirámide cuadrada?



b) Queremos pintar una pirámide cuadrada de colores, de modo que dos caras que tengan alguna arista común no estén pintadas del mismo color. ¿Qué número de colores necesitamos como mínimo?

c) Cuando se construyó la ciudad de El Cairo en el siglo X, a la pirámide de Keops se le arrancó la parte exterior de piedra para usarla como material de construcción. Sin esta piedra que la cubría, la pirámide ofrece una imagen parecida a ésta:



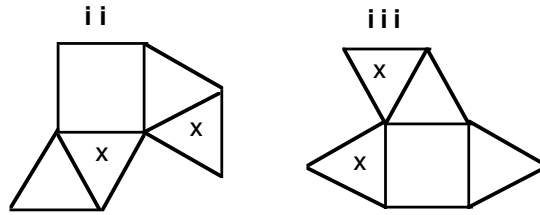
¿Sabrías decir cuántos bloques hay en cada “piso”? ¿Y en total?

d) ¿Cuántos bloques habría si continuamos poniendo cubos por abajo, hasta que en el fondo haya un cuadrado 9×9 ?

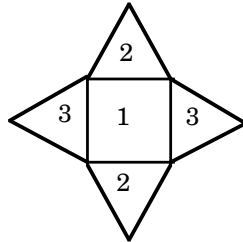
Solución

a) Corresponden a pirámides los desarrollos i y iv.

Los otros dos desarrollos no corresponden a pirámides porque en ambos coincidirán las caras laterales señaladas con una x en la figura siguiente, y faltará una cara lateral.



b) Se necesita un mínimo de tres colores, uno para la base y otros dos para las caras laterales, siendo del mismo color las opuestas.



c) El piso bajo tiene 5 bloques en cada una de sus dimensiones, por lo que totaliza 25 bloques. El intermedio tiene 9 bloques y el superior 1. En total $25 + 9 + 1 = 35$ bloques.

d) Si se continúa hasta el 9×9 , el total de bloques es:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 165$$

Problema 2

Un anuncio de las Páginas Amarillas decía: “*Deja a tus dedos andar*”. Un día, acordándome de esto, medí la distancia que recorría mi dedo al marcar el número 968363620 en mi teléfono, que tiene las teclas de la siguiente manera:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

Si la distancia del 1 al 2 ó la del 1 al 4 es 1 cm en mi teléfono, ¿cuántos centímetros “anduvo” mi dedo desde que señala el 9 hasta que señala el 0?

Solución

Al ir el dedo desde el 9 al 6 “anda” 1 cm.

Al ir del 6 al 8 recorre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos unidad, o sea $\sqrt{2}$ cm.

Del 8 al 3 recorre la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 y 2, respectivamente, por lo que “anda” una distancia de $\sqrt{5}$ cm.

En los recorridos 3 a 6, 6 a 3 y 3 a 6, “anda” 3 cm.

Del 6 al 2 recorre $\sqrt{2}$ cm.

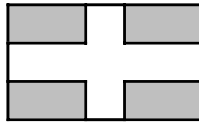
Y desde el 2 hasta el 0 recorre 3 cm.

Por tanto, la distancia total “andada” por el dedo es:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3 + \sqrt{2} + 3 = 7 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \cong 12,06 \text{ cm.}$$

Problema 3

Entre los diseños presentados para elegir el logotipo de la olimpiada, uno tiene forma de bandera:



Se trata de una cruz roja con los cuatro brazos iguales de ancho, colocada en el centro de un rectángulo gris. Los lados del rectángulo miden 12 cm y 16 cm, respectivamente.

¿Cuál ha de ser la anchura de los brazos de la cruz para que la porción roja sea de la misma área que la gris?

Solución

El área del rectángulo dado es $12 \times 16 = 192 \text{ cm}^2$.

Al observar la figura parece que el ancho de la cruz debe ser la tercera parte del ancho del rectángulo, es decir, 4 cm. Entonces las dimensiones de cada uno de los rectángulos grises son 4 y 6 cm. Y el área de toda la zona gris $4 \times 4 \times 6 = 96 \text{ cm}^2$, que efectivamente es la mitad del rectángulo dado.

Esta forma de resolver el problema “a ojo” sólo es posible en casos con soluciones fáciles de ver. Si no se diera esta circunstancia habría que hacerlo por un procedimiento más general, planteando y resolviendo una ecuación, tal como se expone a continuación.

Llamamos “a” a la anchura de los brazos de la cruz, la zona gris está formada por 4 rectángulos de dimensiones $\frac{12-a}{2}$ y $\frac{16-a}{2}$.

El área de la zona gris debe ser la mitad del área del rectángulo de partida, por lo que se verifica:

$$4 \frac{12-a}{2} \cdot \frac{16-a}{2} = \frac{12 \times 16}{2}$$

equivalente a la ecuación de 2º grado: $a^2 - 28a + 96 = 0$.

De sus dos soluciones, sólo tiene sentido en este problema $a = 4 \text{ cm}$.

Problema 4

Encuentra tres números de 3 cifras que sean cuadrados perfectos, tales que entre los tres aparezcan todas las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Solución

Sólo existen los siguientes 13 números de tres cifras diferentes que son cuadrados perfectos:

169 196 256 289 324 361
 529 576 625 729 784 841 961

La solución del problema es la única terna de entre ellos que emplea todas las cifras desde el 1 al 9: $361 = 19^2$, $529 = 23^2$, $784 = 28^2$.

Problema 5

Pedro, Lorenzo e Irene son tres amigos que viven en el mismo edificio. La madre del primero se llama Pilar, la del segundo Loli y la del tercero Antonia. Pedro y Lorenzo van juntos los sábados a una academia de música. Al salir, Pedro y Lorenzo, junto con Irene, van a clase de inglés. Sus madres deciden ponerse de acuerdo para llevarlos a las academias y recogerlos, de manera que al final del curso el reparto de viajes entre ellas sea justo. Antonia nunca hace el primero de los tres viajes, porque su hija no va a música.

1. ¿Sabrías escribir todas las posibles maneras que tienen las madres de hacer los tres viajes el primer sábado?

2. Si el curso dura 6 sábados, ¿cuántos viajes hará cada una de las madres para que el reparto sea justo? Pon sólo un ejemplo de cómo pueden combinarse.

Solución

1. Las madres pueden hacer los viajes el primer sábado de cualquiera de las cuatro formas siguientes:

EDIFICIO	→	MÚSICA	→	INGLÉS	→	EDIFICIO
Pilar		Lola		Antonia		
Pilar		Antonia		Lola		
Lola		Pilar		Antonia		
Lola		Antonia		Pilar		

2. Cada sábado hace un viaje cada una de las madres. Por tanto, a lo largo del curso cada madre realizará seis viajes.

Una posible combinación para todo el curso sería la siguiente:

Sábado 1º	Pilar	Lola	Antonia
2º	Pilar	Antonia	Lola
3º	Lola	Pilar	Antonia
4º	Lola	Antonia	Pilar
5º	Pilar	Lola	Antonia
6º	Lola	Antonia	Pilar

NAVARRA 1998

Problema 1

¿Cuántas frases verdaderas hay en el siguiente cuadro?

En este cuadro hay exactamente una frase verdadera.
 En este cuadro hay exactamente una frase falsa.
 En este cuadro hay exactamente dos frases verdaderas.
 En este cuadro hay exactamente dos frases falsas.

NOTA: Tened en cuenta que puede haber más de una respuesta correcta.

Solución

* Supongamos que haya solamente una verdadera:

Si es la primera: V F F F Es posible

Si es la segunda: F V F F No es posible, pues la primera frase “en este cuadro hay exactamente una frase verdadera” sería falsa, y es verdadera por haber sólo una verdadera.

Si es la tercera: F F V F No es posible

Si es la cuarta: F F F V No es posible

* Supongamos que haya dos verdaderas:

V V F F No es posible

V F V F No es posible

V F F V No es posible

F V V F No es posible

F V F V No es posible

F F V V Es posible

* Supongamos que haya tres verdaderas:

V V V F No es posible

V V F V No es posible

V F V V No es posible

F V V V No es posible

* Supongamos que las cuatro sean verdaderas:

V V V V No es posible

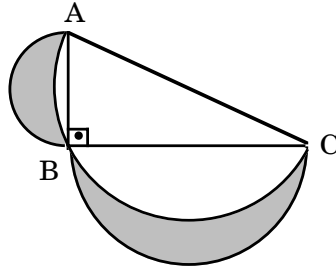
* Que las cuatro sean falsas:

F F F F Es posible

Soluciones: V F F F, F F V V y F F F F

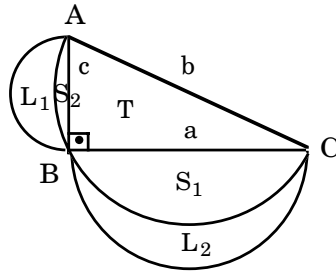
Problema 2

Teniendo en cuenta que las semicircunferencias que aparecen en el dibujo tienen sus centros en los puntos medios de los lados del triángulo rectángulo, comparar el área del triángulo y el área total de las *lúnulas* (partes sombreadas).



Solución

Con las notaciones de la siguiente figura:



El área L_1 = semicírculo de radio $\frac{c}{2}$ - el área de $S_2 = \pi \frac{c^2}{8} - S_2$

El área L_2 = semicírculo de radio $\frac{a}{2}$ - el área de $S_1 = \pi \frac{a^2}{8} - S_1$

El área $S_1 + S_2$ = semicírculo de radio $\frac{b}{2}$ - el área T

$$L_1 + L_2 = \frac{\pi}{8}(c^2 + a^2) - (S_1 + S_2) = \frac{\pi}{8}b^2 - \left(\frac{\pi b^2}{8} - T\right) = T$$

Luego la suma de las áreas de las lúnulas es igual al área del triángulo rectángulo.

Problema 3

El banquero ha dejado olvidado el código de la caja fuerte dentro de ésta. Afortunadamente recuerda que dicho código consta de nueve cifras significativas distintas, todas excepto el cero. Además, sabe que, a partir de la izquierda:

- El número formado por la primera y la segunda cifras es múltiplo de 2.

- El número formado por la segunda y la tercera cifras es múltiplo de 3.
 - El número formado por la tercera y la cuarta cifras es múltiplo de 4.
 - ... y así sucesivamente, hasta
 - El número formado por la octava y la novena cifras es múltiplo de 9.
- Con estos datos encuentra dos posibilidades. ¿Cuáles son?

Solución

Sea el número $N = _ _ _ \underline{A} \underline{B} \underline{C} \underline{D} \underline{E} \underline{F}$

$\underline{A} \underline{B}$ múltiplo de 5. Como B no puede ser cero, será $B = 5$.

$\underline{B} \underline{C} = \underline{5} \underline{C}$ es múltiplo de 6; el único es 54 $\Rightarrow C = 4$

$\underline{C} \underline{D} = \underline{4} \underline{D}$ es múltiplo de 7: será 42 ó 49 $\Rightarrow D = 2$ ó $D = 9$

Si $D = 2$, será $N = _ _ _ \underline{5} \underline{4} \underline{2} \underline{E} _$

$\underline{2} \underline{E}$ es múltiplo de 8; el único es 24 $\Rightarrow E = 4$. Imposible porque habría dos cifras repetidas.

Por tanto $D = 9$.

El número será $N = _ _ _ \underline{5} \underline{4} \underline{9} \underline{E} \underline{F}$

$\underline{9} \underline{E}$ es múltiplo de 8; el único es 96 $\Rightarrow E = 6$

$\underline{6} \underline{F}$ es múltiplo de 9; será 63 $\Rightarrow F = 3$

Por ahora el número buscado es $N = \underline{X} \underline{Y} \underline{Z} \underline{A} \underline{5} \underline{4} \underline{9} \underline{6} \underline{3}$

Nos faltan por colocar las cifras 1, 2, 7, 8.

$\underline{Z} \underline{A}$ es múltiplo de 4 $\Rightarrow A = 2$ ó $A = 8$.

Si $A = 2 \Rightarrow \underline{Z} \underline{A} = 12$ ó 72 (82 no, por no ser múltiplo de 4).

Si $\underline{Z} \underline{A} = 12 \Rightarrow Z = 1, A = 2$.

Entonces $N = \underline{X} \underline{Y} \underline{1} \underline{2} \underline{5} \underline{4} \underline{9} \underline{6} \underline{3}$ y falta por colocar el 7 y el 8.

$\underline{Y} \underline{1}$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow Y = 8$, pues 71 no lo es. Entonces $X = 7$.

Primera solución: 7 8 1 2 5 4 9 6 3

Si $\underline{Z} \underline{A} = 72 \Rightarrow Z = 7, A = 2$

$N = \underline{X} \underline{Y} \underline{7} \underline{2} \underline{5} \underline{4} \underline{9} \underline{6} \underline{3}$

X, Y sólo pueden ser 1, 8 u 8, 1. Debe ser $\underline{X} \underline{Y} = 18$, pues ha de ser múltiplo de 2.

Segunda solución: 1 8 7 2 5 4 9 6 3

Problema 4

El número de habitantes de la ciudad de Apton aumenta regularmente cada año un 10 %; en cambio el número de habitantes de la ciudad de Lipton descende regularmente cada año un 10 %. Hace un año, Apton tenía 6.561.000 habitantes. Dentro de dos años las dos ciudades tendrán exactamente el mismo número de habitantes.

¿Cuántos habitantes tenía la ciudad de Lipton hace dos años?

Solución

Aumentar el número de habitantes un 10% equivale a multiplicarlo por 1,1. Así los habitantes de Apton dentro de 2 años serán:

$$1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times 6.561.000.$$

Así mismo, disminuir el número de habitantes un 10% equivale a multiplicarlo por 0,9. Si x es el número de habitantes que tenía Lipton hace 2 años, dentro de otros 2 tendrá: $0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times x$.

Igualando ambas expresiones:

$$1,1^3 \times 6.561.000 = 0,9^4 x \quad \Rightarrow \quad x = 13.310.000$$

Problema 5

He realizado un examen a los 35 estudiantes de la clase y ha resultado que la media de las calificaciones de las chicas es 6 y la de los chicos es 4,75. Sabiendo que la media de todos los estudiantes de la clase es de 5,25 ¿cuántas chicas hay en la clase?

Solución

La media aritmética es la suma de las calificaciones de cada alumno, dividida por el número total de alumnos.

Sea V la suma de las notas de los chicos y H la suma de las notas de las chicas.

Si x es el número de chicas, el de chicos será $35 - x$.

$$6 = \frac{H}{x} \Rightarrow H = 6x \qquad 4,75 = \frac{V}{35 - x} \Rightarrow V = 4,75(35 - x)$$

Como la nota media total es 5,25:

$$5,25 = \frac{H + V}{35} = \frac{6x + 4,75(35 - x)}{35} \Rightarrow x = \frac{35 \times 0,5}{1,25} = 14 \text{ chicas.}$$

OLIMPIADA NACIONAL 1998 ALMERÍA

Problema 1. PINTORES

Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo.

¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

NOTA: la jornada laboral está compuesta por 4 horas antes del mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

Solución

Sea S la superficie de la pared grande y “ x ” el número de personas de la cuadrilla.

Número de horas invertidas en pintar S : $4x + 4 \cdot \frac{x}{2} = 6x$

Número de horas invertidas en pintar $\frac{S}{2}$: $4 \cdot \frac{x}{2} + 8 = 2x + 8$ (el 8 corresponde a un solo obrero en el segundo día). Este último número de horas ha de ser la mitad del anterior: $2x + 8 = 3x \Rightarrow x = 8$ personas.

Otra forma.

Llamando N al número de personas y S a la superficie que pinta una persona en un día, se obtiene que las superficies pintadas en las paredes grandes y pequeñas son, respectivamente:

$$N \cdot \frac{S}{2} + \frac{N}{2} \cdot \frac{S}{2} \quad \text{y} \quad \frac{N}{2} \cdot \frac{S}{2} + 1 \cdot S$$

Como sabemos que la una es doble de la otra, escribimos la relación:

$$N \cdot \frac{S}{2} + \frac{N}{2} \cdot \frac{S}{2} = 2 \left(\frac{N}{2} \cdot \frac{S}{2} + 1 \cdot S \right)$$

Operando y simplificando sale $N = 8$.

Problema 2. LA MESA DE BILLAR

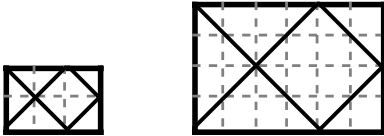
Tenemos una mesa de billar con forma rectangular, de lados a y b , números enteros. Golpeamos una bola desde una esquina con ángulo de 45° .

¿Cuántas veces rebotará en las bandas antes de entrar en otra esquina?

Se supone que la bola no toma efecto y que puede rodar indefinidamente.

Solución


Si los rectángulos que forma la mesa de billar son semejantes, es decir, si las dimensiones son proporcionales, el número de choques es el mismo. Por ejemplo: en mesas con dimensiones 3x2 el número de choques es el mismo que en mesas de 6x4, según vemos en las siguientes figuras:




En ambos casos hay 3 choques.

Por esta razón sólo consideraremos el caso en que las dimensiones sean números primos entre sí.

Estudiemos diferentes casos:

1x1  0 choques: $1 + 1 - 2$

2x1  1 choque: $2 + 1 - 2$

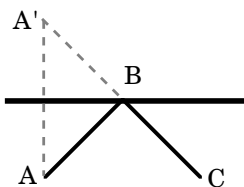
3x1  2 choques: $3 + 1 - 2$

En el caso de la 1ª figura, 3x2, observamos que hay 3 choques: $3 + 2 - 2$.

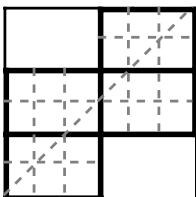
Podemos hacer una generalización cuando las dimensiones son a y b, números primos entre sí: el número de choques será: $a + b - 2$.

Otra forma.

Podemos hacerlo aplicando simetrías axiales.



La bola que parte del punto A choca en el punto B de la banda y llega a C, de manera que los ángulos que forman AB y CB con la banda son iguales. Es como si procediera del punto A', simétrico de A respecto de la banda.

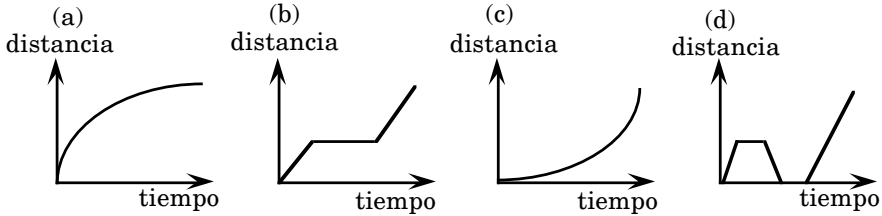


Colocamos sucesivamente las mesas 1, 2, 3, 4, como indica la figura. La trayectoria será la diagonal de un cuadrado de lado 6, que es el mínimo común múltiplo de las dimensiones, 3 y 2.

El número de choques será el de intersecciones de esa diagonal con las bandas interiores.

Problema 3. CADA GRÁFICA CON SU PAREJA

Las gráficas de la figura corresponden al recorrido que efectúan hasta la misma oficina cuatro personas que habitan en un mismo edificio. Da una posible interpretación.



Solución

a) Desde que sale de su casa no se para nunca. Va rápido en la primera parte, pues aumenta la distancia en poco tiempo; al final va más despacio.

b) Hace el recorrido en tres tramos: en el primero va a velocidad constante; en el segundo está parado, pues la distancia es constante; en el tercero va a velocidad constante.

c) Al principio va despacio y al final va más rápido, pues aumenta la distancia en poco tiempo.

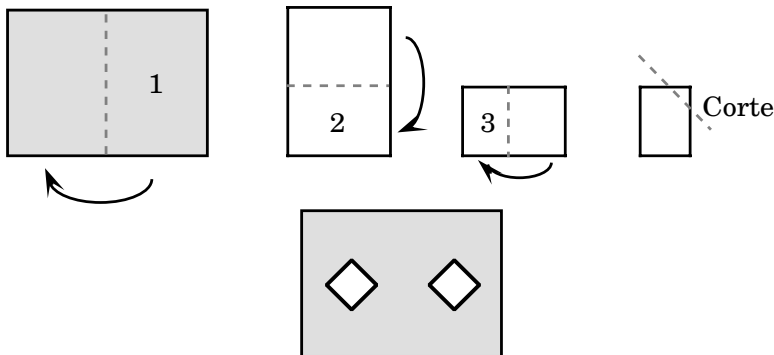
d) En el primer tramo va a velocidad constante, en el segundo está parado, en el tercero vuelve a casa, pues disminuye la distancia; en el cuarto va a velocidad constante desde casa.

Problema 4. DOBLAR Y CORTAR

Se dobla un papel A4 tres veces y se corta, por la esquina que no forma libro, un triángulo isósceles y rectángulo. ¿Qué figura aparece si se despliega el papel?

Solución

En el esquema siguiente se indican las sucesivas dobleces del papel y el corte, así como la figura que resulta al desdoblarlo.



Aparecen dos cuadrados iguales de lado igual al corte que se ha dado. El área de cada uno es cuatro veces la del triángulo cortado.

X OLIMPIADA
1999

ALBACETE 1999

CICLO 12-14
PRIMERA FASE

Problema 1. LA MATRÍCULA DEL COCHE

La matrícula de un coche estaba formada por cinco cifras, todas diferentes. Al instalarla, el mecánico se equivocó, poniéndola *cabeza abajo*. Posteriormente, al recoger el vehículo, el dueño se dio cuenta de que el número obtenido era mayor que el original en 78633.

¿Cuál era el número de matrícula?

Nota: el número uno se escribía así: 1 y no así 1.

Solución

En la matrícula figuran todos los dígitos que pueden leerse cabeza abajo: 0, 1, 6, 8, 9.

Para averiguar la matrícula podemos seguir el siguiente procedimiento:

Al poner la matrícula boca abajo, el dígito de las unidades pasa invertido a la posición de decenas de millar y viceversa; el de las decenas pasa a unidades de millar y el de las centenas es el único que permanece en su posición, aunque invertido. En esta situación debe haber un dígito que restado al invertido pueda dar 6, y el único posible es el 9.

Por otra parte, en las unidades debe haber dos dígitos distintos del 9, que ya está colocado, tales que su diferencia sea 3; esto sólo lo verifican el 1 con el 8.

Hasta ahora se tiene:

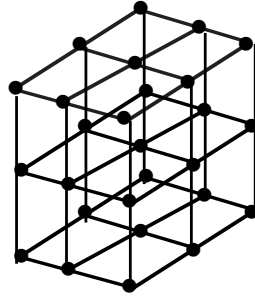
$$\begin{array}{r}
 _ _ 6 _ 1 \\
 - _ _ 9 _ 8 \\
 \hline
 7 \ 8 \ 6 \ 3 \ 3
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 8 _ 6 _ 1 \\
 - 1 _ 9 _ 8 \\
 \hline
 7 \ 8 \ 6 \ 3 \ 3
 \end{array}$$

Por último, para que en las decenas se cumpla que la diferencia es 3 y 8 en las unidades de millar, las cifras que quedan han de colocarse así:

$$\begin{array}{r}
 8 \ 9 \ 6 \ 0 \ 1 \\
 - 1 \ 0 \ 9 \ 6 \ 8 \\
 \hline
 7 \ 8 \ 6 \ 3 \ 3
 \end{array}$$

Por todo ello, la matrícula era 10968.

Problema 2. BOLAS Y VARILLAS



La figura representa un modelo construido con bolas y varillas. ¿Cuántas bolas y cuántas varillas de conexión tiene?

¿Cuántas bolas y varillas de conexión tendrá una construcción de cinco pisos con la misma base?

Calcula las bolas y las varillas necesarias para construir un modelo de 100 pisos.

Solución

Partiendo de los casos más sencillos se va a intentar inducir el caso general.

Si la estructura fuese de planta 2x2 y altura unidad, estaría formada por 2 cuadrículas horizontales de 9 bolas y 12 varillas cada una, además de otras 8 varillas verticales.

Si ahora se aumenta una altura para obtener la figura representada en el enunciado, se habrá añadido una cuadrícula horizontal de 9 bolas y 12 varillas, y otras 8 varillas verticales. T así sucesivamente para cada altura que se aumente con la misma base.

Lo dicho se resume en la siguiente tabla:

<u>dimensiones</u>	<u>nº de bolas</u>	<u>nº de varillas</u>
$2 \times 2 \times 1$	2×9	$2 \times 12 + 8$
$2 \times 2 \times 2$	3×9	$3 \times 12 + 2 \times 8$
.....
$2 \times 2 \times 5$	6×9	$6 \times 12 + 5 \times 8$
.....
$2 \times 2 \times 100$	101×9	$101 \times 12 + 100 \times 8$

Conclusión: la construcción de 5 pisos tiene 54 bolas y 112 varillas, y la de 100 pisos tiene 909 bolas y 2.012 varillas.

En el caso general, una construcción de n pisos tendrá $(n + 1) \cdot 9$ bolas y $(n + 1) \cdot 12 + n \cdot 8$ varillas.

Problema 3. CRIPTOGRAMA

Cada letra corresponde a un número distinto entre 0 y 9:

$$\text{ZOO}^2 = \text{TOPAZ}$$

¿Sabrías calcular el valor de cada letra?

Solución

TOPAZ es un número de 5 cifras, por lo que está comprendido entre 10.000 y 99.999. Por tanto: $\sqrt{10.000} \leq \text{ZOO} \leq \sqrt{99.999} \Rightarrow 100 \leq \text{ZOO} \leq 316$.

Z debe ser 1, 2 ó 3.

Como Z es la cifra de las unidades del número TOPAZ, debe proceder del cuadrado de la cifra O, por lo que no puede ser ni 2 ni 3; será $Z = 1$ y $O = 9$.

$\text{ZOO}^2 = 199^2 = 39.601$, de donde se deduce que $T = 3$, $P = 6$ y $A = 0$.

Problema 4. HERMANAS CON HERMANOS

Tres amigas, Irene, Sandra y Erika, tienen un hermano cada una. Con el tiempo, cada chica acaba saliendo con el hermano de una de sus amigas.

Un día Irene se encuentra con el hermano de Sandra y le dice: *Mira, ahí veo entrar al cine a alguien con tu pareja. ¿Puedes decir cómo están formadas las parejas?*

Solución

De lo dicho por Irene se deduce que su pareja no es el hermano de Sandra, por lo que tiene que ser el hermano de Erika.

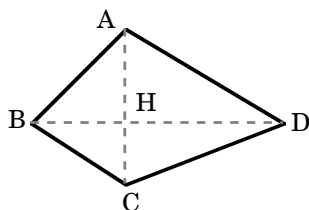
La pareja de Sandra será el hermano de Irene y la de Erika el de Sandra.

Problema 5. EL CUADRILÁTERO

Tenemos un cuadrilátero con los cuatro lados diferentes, pero las diagonales son perpendiculares y miden 8 y 5 metros, respectivamente.

¿Cuánto vale su área?

Solución



Sea el cuadrilátero ABCD cuyas diagonales $BD = 8$ cm y $AC = 5$ cm son perpendiculares.

Su área se obtiene sumando las áreas de los triángulos ABD y CBD.

$$\text{área ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH \qquad \text{área CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot HC$$

El área del cuadrilátero valdrá:

$$\frac{1}{2}BD \cdot AH + \frac{1}{2}BD \cdot HC = \frac{1}{2}BD(AH + HC) = \frac{1}{2}BD \cdot AC$$

Resulta entonces que el área del cuadrilátero vale $\frac{1}{2}8 \cdot 5 = 20 \text{ m}^2$.

**CICLO 12-14
SEGUNDA FASE**

Problema 1. EL PROBLEMA DE ROBERT RECORD (1510-1158)

Una persona quiere vender su caballo y el comprador le pide precio. El amo del caballo dice: *El caballo tiene cuatro herraduras y cada herradura seis clavos. Me has de pagar una moneda por el primer clavo, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto y así hasta los 24 clavos de las herraduras del caballo.*

¿Cuántas monedas vale el caballo?

Solución

Sea S el número de monedas que vale el caballo. Es la suma de 24 sumandos de la forma $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$; como son potencias de 2, puede escribirse

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{23} \quad (1)$$

Para calcular su valor se multiplican los dos miembros de la igualdad por 2: $2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{24}$ (2)

Restando (1) de (2): $S = 2^{24} - 2^0 = 16.777.215$ monedas.

Otra forma.

El problema plantea el cálculo de la suma de los 24 términos de una progresión geométrica de razón igual a 2 y primer término igual a 1. Se puede resolver aplicando la correspondiente fórmula:

$$S = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1(1 - 2^{24})}{1 - 2} = 2^{24} - 1 = 16.777.215 \text{ monedas.}$$

Problema 2. LA TARJETA DE CRÉDITO

Los 16 dígitos de una tarjeta de crédito están escritos en sus casillas de modo que la suma de cada tres cifras consecutivas es 18. ¿Podrías averiguar el número completo?

			7							8				
--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

Solución

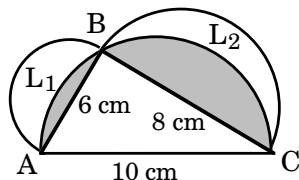
Se trata de una descomposición del número 18 en tres sumandos, dos de los cuales deben ser el 7 y el 8; por tanto $3 + 7 + 8$.

Esta es la suma que debe repetirse, colocando los sumandos en el orden adecuado para que la casilla cuarta esté ocupada por 7 y la casilla décimo-segunda por 8.

4^a								12^a							
7	3	8	7	3	8	7	3	8	7	3	8	7	3	8	7

Problema 3. LAS LÚNULAS

Hipócrates de Chios, matemático griego del siglo VI aC, trabajó en el problema de cuadrar el círculo, es decir, construir un cuadrado cuya área fuera igual a la del círculo. Como consecuencia de estos trabajos, fue el primero que enseñó a cuadrar “lúnulas”, que son figuras planas limitadas por arcos de circunferencia de radios distintos, como las zonas L_1 y L_2 de la siguiente figura:



Los tres semicírculos de la figura tienen por diámetros respectivos la hipotenusa y los catetos del triángulo ABC, rectángulo en B.

- a) Hallar el área del triángulo ABC.
- b) Hallar el área de la zona sombreada.
- c) Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas L_1 y L_2 es igual al área del triángulo.

Solución

a) El triángulo ABC es rectángulo en B y su área es: $S = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

b) El área de la zona sombreada equivale a la del semicírculo de diámetro la hipotenusa menos la del triángulo, es decir:

$$S = \frac{1}{2} \pi 5^2 - 24 = \frac{25\pi - 48}{2} \cong 15,27 \text{ cm}^2$$

c) La suma de las áreas de las lúnulas L_1 y L_2 equivale a la suma de las áreas de los semicírculos de diámetros los lados AB y CB, menos la de la zona punteada, así:

$$S = \frac{1}{2} \pi 3^2 + \frac{1}{2} \pi 4^2 - \frac{25\pi - 48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

**CICLO 14-16
PRIMERA FASE**

Problema 1. CUBO PINTADO

Pintamos un cubo de color azul y después lo cortamos en $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos. ¿Cuántos cubitos tendremos:

- * Con una cara pintada.
- * Con dos caras pintadas.
- * Con tres caras pintadas.
- * Sin caras pintadas?

Haz lo mismo con un cubo de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubos. ¿Cuántos cubos tienen ahora 1, 2, 3 ó ninguna caras pintadas?

Busca una fórmula para hallar el número de caras pintadas en un cubo de $n \times n \times n$.

Solución.

Tienen las tres caras pintadas de color azul los cubos pequeños que ocupan los vértices, que son 8 en todos los casos.

Con sólo dos caras azules están los que forman las 12 aristas, excluidos los de los vértices.

Tienen una sola cara azul los de las 6 caras, excluidos los de las aristas; forman, en cada cara, un cuadrado de lado 2 unidades menos que la longitud de la arista.

Los que no tienen ninguna cara azul forman un cubo de arista 2 unidades menos que la longitud de la arista.

Resulta entonces el siguiente cuadro:

	Nº de cubos con 3 caras azules	Nº de cubos con 2 caras azules	Nº de cubos con 1 cara azul	Nº de cubos con 0 caras azules
Cubo $3 \times 3 \times 3$	8	12	6	1
Cubo $4 \times 4 \times 4$	8	24	24	8
Cubo $5 \times 5 \times 5$	8	36	54	27
.....
Cubo $n \times n \times n$	8	$12(n-2)$	$6(n-2)^2$	$(n-2)^3$

Problema 2. MERCADER

Un mercader tenía una piedra que pesaba 40 *artales*. Cierta vez esa piedra se cayó y se partió en cuatro pedazos, causando gran contrariedad al

mercader. Un calculista, que se hallaba presente, pesó los cuatro pedazos y dijo al mercader: *Es una división conveniente. Con estos cuatro pedazos podrás hacer cualquier pesada entera desde 1 hasta 40 artales, usando una balanza de dos platillos.*

Se pregunta: ¿Cuánto pesaba cada uno de los cuatro fragmentos de piedra?

Solución

Se supone que al efectuar la pesada, la carga se pone en uno de los platillos, pero las pesas pueden repartirse entre el platillo opuesto y el que lleva la carga, según se necesite.

Con una pesa de 1 artal (A) sólo se puede pesar un objeto, precisamente el que pesa 1 A.

Con pesas de 1 y 2 A pesamos objetos de 1, 2 y 3 A.

Con dos pesas de 1 y 3 A podemos pesar los objetos de:

1 A, 3 A, $3 - 1 = 2$ A y $3 + 1 = 4$ A, luego es preferible elegir 1 y 3 A.

Si a las dos anteriores le añadimos una de 9 A, pesaremos los cuatro anteriores más los de:

$$9, \quad 9 - 1 = 8, \quad 9 + 1 - 3 = 7, \quad 9 - 3 = 6, \quad 9 - 4 = 5, \\ 9 + 1 = 10, \quad 9 + 3 - 1 = 11, \quad 9 + 3 = 12, \quad 9 + 3 + 1 = 13$$

es decir, de 1 a 13 A.

Si a las tres anteriores le añadimos otra pesa de 27 A, se podrán pesar los 13 objetos anteriores más los de:

$$27, \quad 27 - 1, \quad 27 + 1 - 3, \dots, 27 - 9 - 3 - 1, \quad 27 + 1, \quad 27 + 3 - 1, \\ \dots, 27 + 1 + 3 + 9 = 40 \text{ A.}$$

Por tanto se necesitan cuatro pesas con valores 1, 3, 9 y 27 A.

Si se supone que las pesas sólo se pueden colocar en uno de los platillos, serían necesarias seis pesas de 1, 2, 4, 8, 16 y 32 artales, tal como se explica en el problema 5 de la segunda fase de Canarias.

Problema 3. CORTANDO CUADRÍCULAS

Se tiene un rectángulo dividido en cuadrados. Cada jugador por turno va separando trozos rompiendo por una línea recta de la cuadrícula. El jugador obligado a coger el cuadrado superior izquierdo pierde.

Intenta encontrar, si la hay, alguna estrategia ganadora.

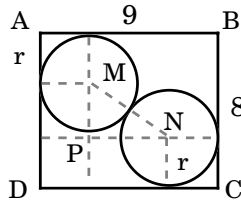
Solución

El jugador que interviene en primer lugar puede ganar siempre si juega de forma que el número de cortes que se da al rectángulo sea impar; de esta forma conseguiría que el otro jugador coja el cuadrado superior izquierdo.

Problema 4. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES

Sea un rectángulo de lados 8 y 9 cm. Se dibujan dos circunferencias de igual radio tangentes entre sí y de forma que una de ellas sea tangente a dos lados consecutivos del rectángulo y la otra tangente a los otros dos. ¿Cuál es el radio?

Solución



Sea ABCD el rectángulo con $AB = 9$ y $AD = 8$.

Sean M y N los centros de las dos circunferencias y r el radio pedido.

Los lados del triángulo rectángulo MPN valen: $MP = AD - 2r = 8 - 2r$,
 $PN = CD - 2r = 9 - 2r$, $MN = 2r$.

$$\text{Por tanto: } MP^2 + PN^2 = MN^2 \Rightarrow (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2 = 4r^2$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, resultan las soluciones 14,5 y 2,5, siendo válida sólo la segunda. Por tanto, el radio vale 2,5 cm.

Problema 5. MARCAR DADOS

Queremos marcar los puntos de dos dados usando los números 1 al 6 o en blanco.

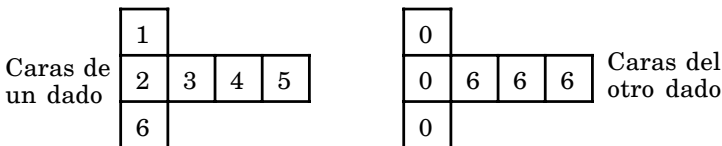
¿Cómo hay que hacerlo para que al lanzarlos la suma de las puntuaciones del 1 al 12 sean igualmente posibles?

Solución

Como cada dado tiene 6 caras, pueden resultar 36 casos distintos al lanzar los dos dados.

Por otra parte, las puntuaciones diferentes que deben resultar son 12, para que sean igualmente posibles, cada una debe darse de 3 formas distintas ($36 : 12 = 3$) como suma de una cara de un dado con otra cara del otro dado.

Esto se consigue si un dado lleva los números 1, 2, ..., 6 en sus caras, y el otro lleva el número 6 en tres de sus caras y en blanco las restantes.



Problema 6. EL TÉRMINO 100.000

A partir de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se forman todos los números posibles de 9 cifras, todas ellas distintas. Y se ordenan de forma creciente:

123456789; 123456798; 123456879; ... ; 987654321
 ¿Qué número ocupará la posición 100.000?

Solución

Los números que se pueden formar con las nueve cifras sin repetir ninguna son $9! = 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 1 = 362.880$, nueve factorial.

Se trata de averiguar cuál será el que ocupa el lugar 100.000 en una supuesta ordenación creciente.

Los primeros serían los que comienzan por 1, que son $8! = 40.320$; y otros tantos que comienzan por 2

Después los que comienzan por 31, que son $7! = 5.040$; y los que comienzan por 32 y 34, que son $2 \times 7! = 10.080$.

A continuación los que empiezan por 351, que son $6! = 720$; y por 352, 354, 356 y 357, que son $4 \times 6! = 2.880$.

Seguirían los que empiezan por 3581, 3582, 3584, 3586 y 3587, que son $5 \times 5! = 600$.

Después los de la forma 35891_ _ _ , que son $4! = 24$.

Siguen los 358921 _ _ _ y 358924 _ _ _ , que son $2 \times 3! = 12$.

Y los de la forma 3589261 _ _ y 3589264 _ _ , que son $2 \times 2! = 4$.

Resulta que ocupa el lugar 100.000 el último de los indicados, que es el 358926471.

Comprobación:

Empiezan por 1 y 2	80.640
por 31, 32, 34	15.120
por 351, 352, 354, 356, 357	3.600
por 3581,3582,3584,3586,3587	600
por 35891	24
por 358921,358924	12
por 3589251, 3589254	4
La suma vale	100.000

CICLO 14-16 FASE SEMIFINAL

Problema 1. EL PROBLEMA

El 95% de los alumnos que han resuelto correctamente el 4º problema de la primera fase de la X Olimpiada Matemática son de 3º de ESO.

Si lo han presentado 38 alumnos, ¿cuántos no lo han hecho bien?

Solución

El número de alumnos que lo han hecho bien debe ser menor o igual que 38 y tal que su 95% sea un número entero. El único posible es el de 20 alumnos.

Por tanto:

38 alumnos han presentado el problema.

20 alumnos lo han hecho bien.

Y el 95% de estos, o sea 19 alumnos, son de 3º de ESO y 18 no lo han hecho bien

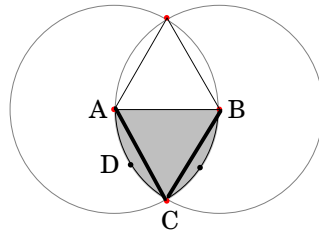
Problema 2. OVEJAS Y PASTOS

Hemos encontrado a dos ovejas atadas, cada una con una cuerda de 9 metros, a una esquina diferente de un corral rodeado de pastos. El corral tiene forma de triángulo equilátero de 9 metros de lado.

¿Cuál es la superficie máxima que tienen para pastar entre las dos ovejas?

Solución

Se supone que las ovejas están en el exterior de la cerca.



La superficie que pasta cada una es la de un sector circular de 9 metros de radio y 300° de amplitud. Al área de estos dos sectores hay que restarle el área de la zona común a ambos, que aparece sombreada en la figura.

$$\text{Área de los dos sectores: } 2 \frac{\pi 9^2 \times 300}{360} = 135 \pi \text{ m}^2$$

La zona común está formada por el sector circular ABC de centro en A y amplitud 60°, y el segmento circular ACD de centro en B.

$$\text{Área del sector circular ABC: } \frac{\pi 9^2 \times 60}{360} = \frac{27 \pi}{2} \text{ m}^2$$

El área del segmento circular es la diferencia entre la de otro sector como el anterior y la de un triángulo equilátero igual a la cerca:

$$\frac{27 \pi}{2} - \frac{81 \sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$$

Por tanto, la zona que tienen para pastar las dos ovejas es

$$135 \pi - \frac{27 \pi}{2} - \left(\frac{27 \pi}{2} - \frac{81 \sqrt{3}}{4} \right) = 108 \pi + \frac{81 \sqrt{3}}{4} \text{ m}^2 \cong 374,4 \text{ m}^2$$

Si se supone que las ovejas están en el interior de la cerca, el problema es trivial, pues ambas pastarían en la totalidad del área del triángulo.

Problema 3. PINTORES

Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde, la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad pintó en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó por pintar un trozo de la pared pequeña, para terminar el cual fue necesario que un pintor trabajase durante todo el día siguiente. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

NOTAS:

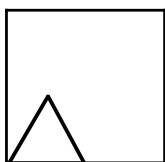
1. La jornada laboral consta de 4 horas por la mañana y 4 horas por la tarde.
2. Todos los pintores desarrollan el mismo trabajo y de manera uniforme.

Hecho en NACIONAL ALMERÍA 1998, problema 1.

CICLO 14-16 FASE FINAL

Problema 1. LA MOVIDA DEL TRIÁNGULO

El triángulo equilátero ABP de lado 2 cm está dentro del cuadrado $AXYZ$ de 4 cm de lado, estando el vértice B sobre el lado AX del cuadrado.



El triángulo gira en sentido horario con centro en B , luego con centro en P y así sucesivamente a lo largo de los lados del cuadrado, hasta que los tres vértices A , B y P retornan a su posición de origen.

¿Cuál es, en centímetros, la longitud del camino recorrido por el vértice P ?

Hecho en CASTILLA Y LEÓN 1998, Fase Provincial de SORIA, problema 1.

Problema 2. EL TELESILLA

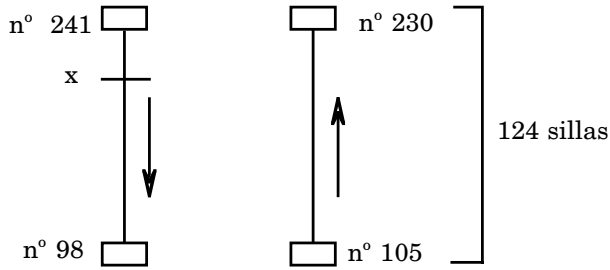
En un telesilla, en el momento en que Paco, que está sentado en la silla número 98, se cruza con la silla número 105, su amiga Carmen, que ocupa la silla número 241, se cruza con la número 230.

Por supuesto, las sillas están regularmente espaciadas sobre el cable y están numeradas en orden a partir de la número 1.

¿Cuántas sillas tiene este remonte?

Solución

El esquema sería el siguiente:



Sea x el número de la última silla. Como entre la 105 y la 230 hay 124 sillas, en la otra línea del remonte debe haber el mismo número de sillas entre la 241 y la 98; por tanto:

$$x - 241 + 97 = 124 \quad \Rightarrow \quad x = 268$$

ANDALUCÍA 1999

FASE PROVINCIAL

Problema 1

José Antonio es el profesor de Matemáticas y quiere que cada día salgan a la pizarra el mismo número de niños que de niñas. Para ello, ha pensado en construir una ruleta en la que si sale el color rojo salga a la pizarra uno de los niños y si sale verde salga una de las niñas.

Si en la clase hay 20 niñas y 10 niños, ¿cómo debería ser la ruleta para que haya la misma probabilidad de salir niño o niña?

Solución

Caso a. Si lo que se quiere es la misma probabilidad, basta con marcar media ruleta roja y media verde (más o menos bonita).

Caso b. Si queremos que todos los alumnos queden representados manteniendo igual probabilidad para ambos sexos, podemos proceder de la siguiente manera: dividimos la ruleta en 40 partes iguales y les asignamos un número del 1 al 40.

Los pares representan a cada una de las niñas (todos en verde); los impares los apareamos, por ejemplo, de la siguiente forma:

(1, 21), (3, 23), ... , (19,39). Cada par es un mismo niño (todos rojos).

Con esta distribución tenemos:

$$P(\text{niña}) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}, \quad P(\text{niño}) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{una niña determinada}) = \frac{1}{40}, \quad P(\text{un niño determinado}) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

Problema 2

En una carrera de cien metros lisos participan cinco atletas y se conceden tres medallas: una de oro, otra de plata y una tercera de bronce para primero, segundo y tercer clasificados, respectivamente. Si no se tiene en cuenta cómo llegan a la meta el resto de los participantes, ¿cuántos resultados distintos puede tener la carrera?

Solución

Numeramos los atletas del 1 al 5.

Primera forma:

Medalla de oro: cualquiera de los cinco: 1, 2, 3, 4, 5 (5 formas).

Medalla de plata:

Si ganó el 1 \Rightarrow 2 ó 3 ó 4 ó 5

Si ganó el 2 \Rightarrow 1 ó 3 ó 4 ó 5

Si ganó el 3 \Rightarrow 1 ó 2 ó 4 ó 5

Si ganó el 4 \Rightarrow 1 ó 2 ó 3 ó 5

Si ganó el 5 \Rightarrow 1 ó 2 ó 3 ó 4

Es decir, por cada posición en la medalla de oro, tenemos 4 posibilidades, esto es, 20 formas para repartir oro y plata.

Medalla de bronce: Supongamos una de las 20 anteriores, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} \text{oro} & \text{plata} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El tercer lugar puede ser para 3 ó 4 ó 5, es decir, 3 posibilidades nuevas.

Como tenemos 20 para (oro, plata) y por cada una 3, saldrá un total de 60 posibilidades de adjudicar las medallas.

Segunda forma.

Hacemos grupos de 3 atletas ganadores.

Tenemos: (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5). En total 10 grupos.

Consideramos el primer grupo (1, 2, 3). Veamos cómo podemos adjudicarles las medallas.

1 - o	1 - o	2 - o	2 - o	3 - o	3 - o
2 - p	3 - p	1 - p	3 - p	1 - p	2 - p
3 - b	2 - b	3 - b	1 - b	2 - b	1 - b

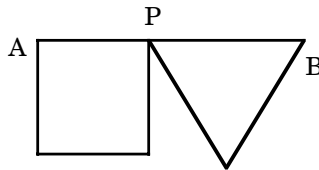
Es decir, cada tripleta se puede clasificar de 6 formas distintas; como teníamos 10, resulta un total de 60.

Tercera forma. Aplicando el cálculo combinatorio, el problema es muy sencillo; se trata de las variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Problema 3

El segmento AB mide 21 cm de longitud. El punto P se coloca de forma que el cuadrado y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. ¿Cuánto mide el segmento AP? ¿Cuál será el perímetro de ambas figuras?



Solución

Hacemos $AP = x$. Entonces $PB = 21 - x$. Como los perímetros son iguales:

$$4x = 3(21 - x) \Rightarrow 7x = 63 \Rightarrow x = 9 \text{ cm.}$$

Por tanto, el perímetro del cuadrado valdrá: $4 \times 9 = 36$ cm, y el del triángulo valdrá: $3(21 - 9) = 36$ cm.

Problema 4

Este año se celebra el cuarto centenario del nacimiento de Velázquez. El año en que murió es un número múltiplo de cinco, cuya cifra de las decenas no es un número primo. Si todas las cifras de dicho número suman 13, ¿cuántos años vivió el genial pintor?

Solución

Si el año del cuarto centenario es 1999, el año de nacimiento será 1599. Velázquez vivió más de un año y menos de 100, luego murió en 16__.

Sabemos que el año de su muerte es múltiplo de 5 y, por otra parte, la cifra de las decenas no es número primo. De ambos datos tenemos, como posibles años:

1640, 1645, 1660, 1665, 1680, 1685, 1690, 1695.

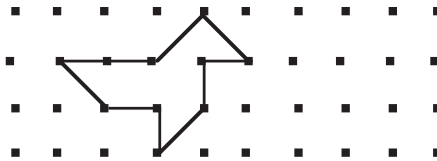
De los años indicados sólo 1660 cumple que la suma es 13; luego el genial pintor vivió $1660 - 1599 = 61$ años.

Problema 5

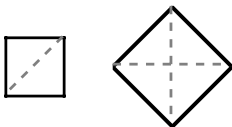
Observa los dos cuadrados siguientes y di qué relación hay entre sus áreas:



Basándote en lo anterior, dibuja una pajarita con la misma forma que la de la figura, pero cuya superficie sea el doble de la misma.



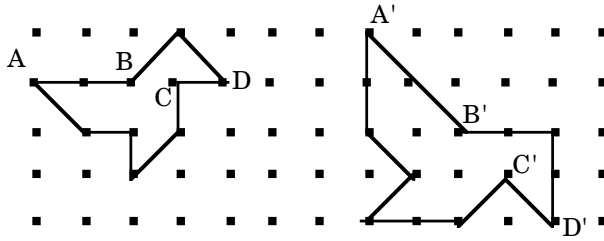
Solución



Trazando las diagonales de los cuadrados, se observa que uno está formado por dos triángulos y el otro por cuatro, iguales a los anteriores.

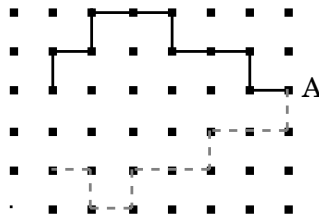
Por tanto, el área del segundo cuadrado es doble del área del primero.

Para dibujar una pajarita de superficie doble, observamos que la diagonal del primer cuadrado pasa a ser lado del segundo y que el lado del primero se convierte en la mitad de la diagonal del segundo, de manera que el segmento AB se transforma en A'B', el CD en C'D', etc.



Problema 6.

La siguiente gráfica muestra el recorrido de dos ciclistas que parten simultáneamente del punto A, con la misma velocidad constante de un paso por segundo (un paso es la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos).



Resuelve las siguientes cuestiones:

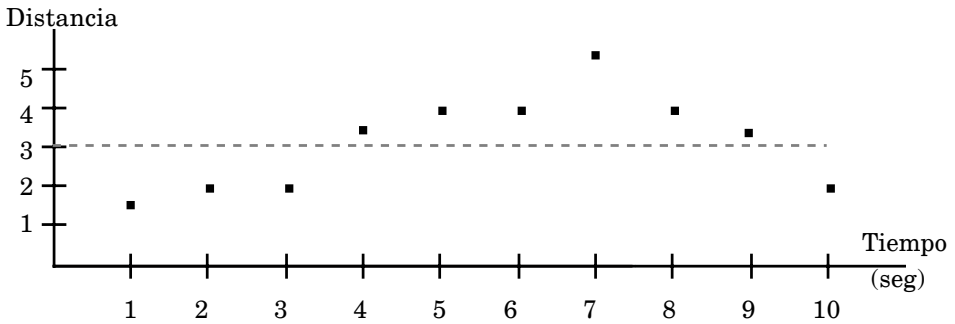
- a) Haz una gráfica que muestre la distancia que ha habido entre ambos en todo el recorrido.
- b) Si ambos llevan un teléfono móvil cuyo alcance es de tres pasos, ¿en qué momento se han podido comunicar?
- c) Imagina ahora que el ciclista cuyo camino está punteado ha recorrido todos los tramos rectos en el mismo tiempo. Haz una gráfica que muestre la velocidad que ha llevado en todo su recorrido.

Solución

Tomamos el paso como unidad de longitud.

Tiempo (seg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distancia	$\sqrt{2}$	2	2	$\sqrt{10}$	4	4	$\sqrt{26}$	4	$\sqrt{10}$	2

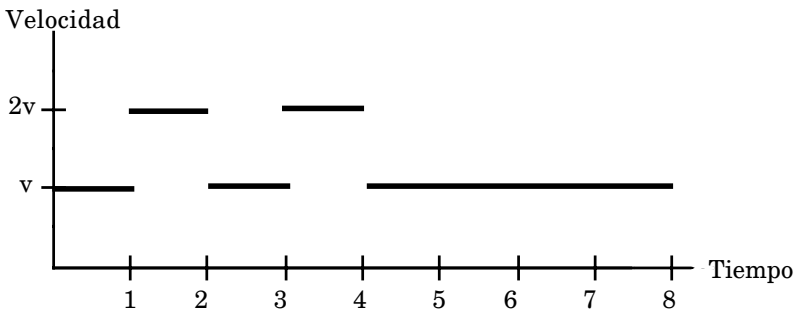
a)



b) Trazando una paralela al eje de los tiempos por el punto (0,3), la comunicación telefónica se establecerá en los puntos que se encuentren por debajo de ella.

Según la gráfica, los puntos son: 1°, 2°, 3° y 10° segundos.

c)



Se supone que las aceleraciones y desaceleraciones son instantáneas.

FASE REGIONAL

Problema 1

Los números en las pantallas de las calculadoras, relojes digitales, etc. se forman usando pequeños palotes horizontales y verticales.

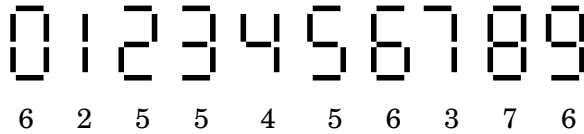
El número 90 está formado por 12 palotes.

¿Existe algún número más de dos cifras que también necesite 12 palotes?

¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con 12 palotes?

Solución

He aquí los dígitos y el número de palotes que los forman:



Números de dos cifras que sumen 12 palotes serán los que se obtengan de dos números de 6 ó uno de 7 y otro de 5.

Con dos de 6: 60, 90, 69 y 96.

Con uno de 5 y otro de 7: 28 y 82, 38 y 83, 58 y 85.

Números de tres cifras con 12 palotes:

Con 7, 3 y 2 palotes: 871, 817, 187, 178, 781, 718: en total 6.

Con 6, 4 y 2 palotes: 941, y permutando estas cifras, hay 6.

641, y permutando hay 6.

410; al permutar las cifras sólo salen 4, pues los que empiezan por cero no son de tres cifras.

Con 6, 3 y 3 palotes: 977 y permutándolos hay 3

677 y permutándolos hay 3

770 y 707, que son otros 2

Con 5, 4 y 3 palotes: 547 (6), 347 (6), 247 (6)

Con 5, 5 y 2 palotes: 221 (6), 231 (6), 251 (6), 331 (3), 351 (6), 551 (3)

Con 12 palotes se pueden escribir 75 números diferentes de tres cifras.

Problema 2

El cambio oficial e inamovible, mientras dure el período de transición de pesetas a euros, quedó fijado desde el 1 de enero de este año de la siguiente manera: 1 euro equivale a 166,386 pesetas.

A cualquier persona que llegue a un banco a cambiar 100 pesetas le entregarán 60 céntimos de euro; pero a mí, que soy aficionado a las matemáticas, me entregarán exactamente 1 euro a cambio de las 100 pesetas. ¿Cómo lo conseguiré?

(Pista: los redondeos por exceso pueden dar mucho de sí).

Solución

0,6 euros equivalen a 100 pts \Rightarrow 0,006 euros equivalen a 1 pta.

La milésima de euro no está reconocida, luego redondeamos: 0,01 euros equivalen a 1 pta. Por tanto 100 pts equivalen a 1 euro.

¡Lo difícil será convencer al banco!

Problema 3

Pepe, Pedro y Paco van de excursión. A la hora de comer deciden juntar los refrescos, que se reparten a partes iguales. Pepe aporta 4 refrescos y Pedro 3.

Yo no tengo refrescos, dice Paco, así que pondré dinero, tomad 200 pesetas.

¿Cómo deben repartirse Pepe y Pedro las 200 pesetas?

Solución

Al repartir los refrescos a partes iguales, a cada uno le corresponde $\frac{7}{3}$ de refresco, que Paco valora en 200 pts, por lo que un refresco vale $200 : \frac{7}{3} = \frac{600}{7}$ pts.

Paco debe pagar a Pepe y a Pedro la parte de bebida que estos aportan y no se beben, y que, por tanto, es lo que se bebe Paco, por lo que la cantidad que corresponde a cada uno se calcula de la siguiente forma:

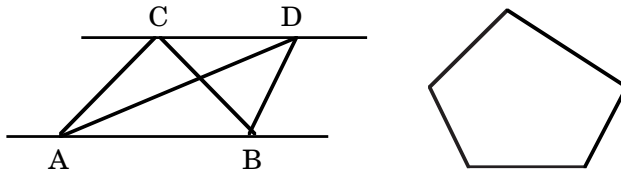
$$\text{a Pepe } \left(4 - \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{600}{7} = \frac{1000}{7} \cong 143 \text{ pts}$$

$$\text{a Pedro } \left(3 - \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{600}{7} = \frac{400}{7} \cong 57 \text{ pts}$$

Problema 4

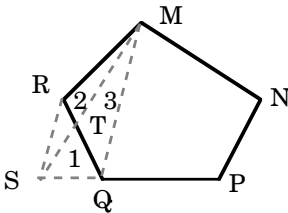
Los triángulos ABC y ABD tienen la misma superficie, ya que sus bases y sus alturas son iguales.

Usando lo anterior, dibuja un triángulo que tenga la misma superficie que este polígono.



Solución

En primer lugar vamos a transformar el pentágono MNPQR en un cuadrilátero de igual área.

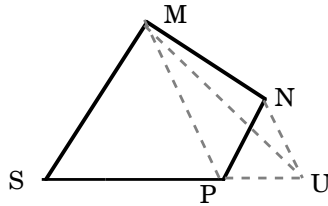


Se traza por el vértice R una paralela a la diagonal MQ, que corta a la prolongación del lado PQ en S, y unimos M con S, siendo T el punto de intersección con QR

Por la propiedad que da el enunciado, los triángulos MRQ y MSQ tienen la misma superficie. Si de ambos triángulos restamos el triángulo MTQ (3), resultan los triángulos 1 y 2, que tendrán la misma superficie.

Por tanto, el pentágono MNPQR tiene la misma superficie que el cuadrilátero MNPS.

Repitiendo esta construcción con el cuadrilátero MNPS, resulta el triángulo MUS, de igual superficie que el cuadrilátero MNPS y el pentágono MNPQR.



Problema 5

Seis cartas dirigidas a seis personas distintas se meten al azar en seis sobres con las correspondientes direcciones. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cinco cartas en sus sobres correctos y una no?

Solución

La probabilidad es cero, pues si cinco están en su sobre correcto, necesariamente la sexta también lo está.

Problema 6

Antonio, Enrique, Luisa, Pedro, Diego, María y Bernardo son amigos y forman la plantilla de un equipo de baloncesto. Para formar un equipo, el entrenador ha de elegir 5 jugadores de la plantilla.

- a) ¿Cuántos equipos distintos podrá formar sin incluye a las dos chicas?
- b) ¿Y si incluye solamente a una chica?
- c) ¿Y si no incluye a ninguna?

Teniendo en cuenta las respuestas anteriores. di cuántos equipos distintos podría formar el entrenador.

Solución

El problema se va a resolver considerando que dos equipos son diferentes sólo si cambia algún jugador, sin considerar las diferentes alineaciones.

a) Si las dos chicas forman parte del equipo, sólo tenemos que elegir 3 de entre los 5 chicos. Si los numeramos del 1 al 5, tenemos:

- (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5)

Salen 10 equipos.

b) Representamos a las chicas con A y B.

Si la elegida es A, tenemos que elegir 4 de entre los 5 chicos: (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (2,3,4,5). Resultan 5 equipos.

Si hacemos lo mismo con B, tenemos otros 5 equipos. En total 10.

c) Si sólo lo forman chicos, hay una sola posibilidad: (1,2,3,4,5).

d) En total tenemos: 10 + 10 + 1 = 21.

Otra forma.

También puede hacerse aplicando el cálculo combinatorio.

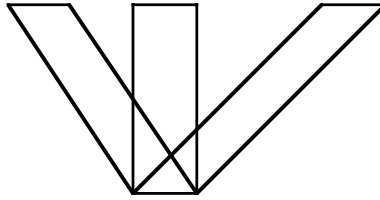
$$a) C_{5,3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10 \qquad b) 2C_{5,4} = 2 \times 5 = 10$$

$$c) C_{5,5} = 1 \qquad d) 10 + 10 + 1 = 21$$

ANDORRA 1999 FASE INICIAL

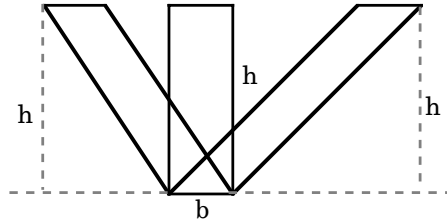
Problema 1.

¿Todos estos paralelogramos tienen la misma área? ¿Por qué?



Solución

El área de un paralelogramo es igual al área de un rectángulo de igual base e igual altura que aquel.



Las tres figuras tienen la base común, b , y las alturas, h , son iguales; por tanto, tienen iguales sus áreas, es decir, son equivalentes.

Problema 2.

Se han escapado los datos de este enunciado. Colócalos en su sitio y resuelve el problema.

Un comerciante compra a la fábrica pantalones por un importe de PTA. Los vende por PTA cada uno, pero sólo vende Los restantes los vende a mitad de precio. ¿Qué beneficio obtiene?

5.000 65 80 200.000

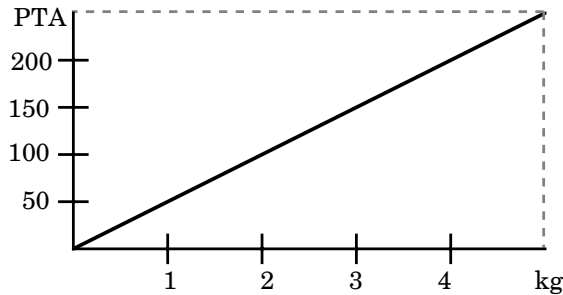
Solución

Un comerciante compra a la fábrica 80 pantalones por un importe de 200.000 PTA. Los vende por 5.000 PTA cada uno, pero sólo vende 65. Los restantes los vende a mitad de precio. ¿Qué beneficio obtiene?

El beneficio es la diferencia entre el dinero obtenido en la venta y el invertido en la compra: $65 \times 5.000 + 15 \times 2.500 - 200.000 = 162.500$ pts.

Problema 3.

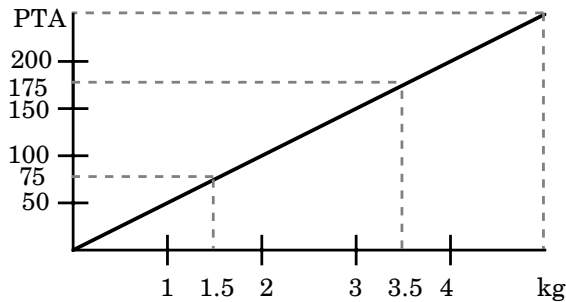
El precio de las naranjas con relación al número de kilogramos adquiridos viene representado por la gráfica:



Resuelve gráficamente:

- a) ¿Cuánto costarán 3,5 kg de naranjas?
- b) Con 75 PTA, ¿cuántos kg de naranjas podré adquirir?

Solución



- a) El coste de 3,5 kg es la ordenada correspondiente a la abscisa 3,5: 175 pts.
- b) El número de kilogramos que pueden comprarse con 75 pts es la abscisa correspondiente a la ordenada 75, que es 1,5 kg.

Problema 4.

Dos cometas se acercan al Sol, uno cada 100 años y otro cada 75 años. Si los dos se han aproximado al Sol en 1990, ¿cuándo se volverán a encontrar?

Solución

El número de años que deben transcurrir desde 1990 para que coincidan debe ser un múltiplo común de 100 y 75, el menor de los cuales es el mínimo común múltiplo de esos números, que es 300.

Por tanto, se encontrarán por primera vez 300 años después de 1990, es decir, el año 2290.

Cada 300 años se volverán a encontrar.

Problema 5.

Nos hemos olvidado del código de la caja fuerte, recordamos que tenía nueve cifras distintas y no estaba el cero. Además recordamos que a partir de la izquierda:

- * El número formado por la primera y segunda cifras es múltiplo de 2.
- * El formado por la segunda y la tercera es múltiplo de 3.
- * El formado por la tercera y cuarta es múltiplo de 4.
- Y así sucesivamente hasta
- * El número formado por la octava y la novena es múltiplo de 9.

Con estos datos encuentra dos posibilidades. ¿Cuáles son?

Hecho en Navarra 1998, problema n° 3, pág. 82.

Problema 6.

En un garaje, entre coches y motos hay 20 vehículos. Sabiendo que el número total de ruedas es 70, ¿cuántos coches y cuántas motos hay?

Solución

Sea x el número de coches; el número de motos será $20 - x$.

Como cada coche tiene 4 ruedas y cada moto 2 (no se cuentan las de re-puesto), se obtiene la ecuación:

$$4x + 2(20 - x) = 70 \quad \Rightarrow \quad x = 15$$

Por tanto, hay 15 coches y 5 motos.

Otra forma.

Si los 20 vehículos fueran coches, habría 80 ruedas; como sólo hay 70 ruedas, es evidente que hemos de sustituir coches por motos.

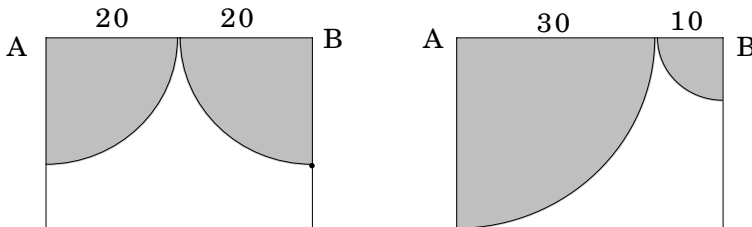
Por cada coche que sustituyamos por una moto, disminuye en 2 el número de ruedas; luego para que el número de éstas disminuya 10 ($80 - 70$), hemos de hacer 5 sustituciones, por lo que habrá 5 motos y 15 coches.

Análogamente se haría si suponemos que todos los vehículos son motos.

Problema 7.

Antonio tiene dos cabras en un prado rectangular de 40 m por 30 m. Cada cabra está atada con una cuerda, una en A y la otra en B (AB es el largo del campo). Antonio no sabe si dar 20 m de cuerda a cada cabra o bien 30 m a una y 10 m a la otra. ¿En cuál de los dos casos la superficie de la hierba comida será mayor?

Solución



En el primer caso (1ª figura) la superficie que comen consta de dos sectores circulares de 90° y radios 20 m, es decir, dos cuadrantes de círculo, que completan medio círculo: $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 200\pi \text{ m}^2$

En el segundo caso (2ª figura) la superficie es un cuadrante de radio 30 m más otro se radio 10 m: $\frac{\pi \cdot 30^2}{4} + \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 225\pi + 25\pi = 250\pi \text{ m}^2$.

Es mayor la superficie en el segundo caso.

Problema 8

Para el laboratorio del Instituto se compra un microscopio por 72.500 PTA y un frigorífico por 51.084 PTA. ¿Cuál será el precio de cada uno de ellos si nos hacen un descuento del 20 % en el microscopio y un 12 % en el frigorífico?

Solución

Entendemos que los precios de compra del microscopio y del frigorífico son con el descuento ya hecho.

De cada 100 pts descuentan 20, luego se pagan 80; por cada peseta se pagará 0,80 pts.

Entonces el precio del microscopio antes del descuento será:

$$\frac{72.500}{0,80} = 90.625 \text{ pts.}$$

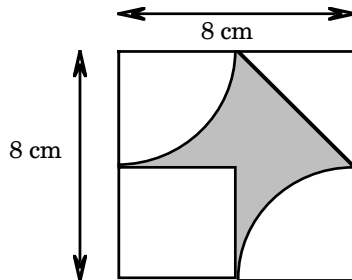
En el caso del frigorífico, de cada 100 pts se pagan 88; por tanto, por cada peseta se paga 0,88 pts.

El precio del frigorífico será $\frac{51.084}{0,88} = 58.050 \text{ pts.}$

FASE FINAL

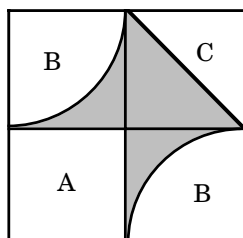
Problema 1.

Calcular el área de la parte sombreada, teniendo en cuenta que las dos curvas son cuartos de circunferencia.



Solución

El área sombreada es la diferencia entre el cuadrado y la parte en blanco, que consta de un cuadrado, un triángulo rectángulo isósceles y dos cuadrantes de círculo, que forman un semicírculo.



A: es la cuarta parte del cuadrado de lado 8 cm.

$$\text{Área de A} = \frac{64}{4} = 16 \text{ cm}^2$$

$$B + B = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 8\pi \text{ cm}^2$$

C: es la mitad de A; su área es 8 cm^2

$$\text{Área sombreada} = 64 - 16 - 8\pi - 8 = 40 - 8\pi \cong 14,87 \text{ cm}^2$$

Problema 2.

¿Cuánto hay que aumentar el numerador de la fracción $\frac{1}{8}$ para obtener

$$\frac{3}{2}?$$

Solución

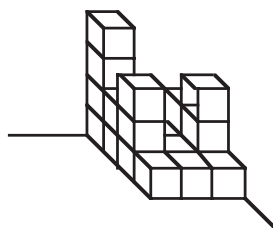
Convertimos la fracción $\frac{3}{2}$ en una equivalente de denominador 8:

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}.$$

Vemos que sumando 11 al numerador de la fracción $\frac{1}{8}$ se obtiene $\frac{3}{2}$.

Problema 3.

Alfredo, antes de desayunar, apila terrones de azúcar sobre la esquina de su mesa. Ved aquí debajo la construcción que ha obtenido.



¿Cuántos terrones de azúcar puede haber como máximo?

¿Cuántos terrones de azúcar puede haber como mínimo?

Solución

Como máximo puede haber:

Piso inferior completo: 12

Segundo piso: $3 + 3 = 6$

Tercer piso: 3

Cuarto piso: 1

En total 22 terrones.

Como mínimo:

Piso inferior: 10

Segundo piso: 5

Tercer piso: 3

Cuarto piso: 1

Total 19 terrones.

Problema 4.

En un hotel hay 2 pisos. En el primer piso hay 13 habitaciones y en el segundo 7. Tenemos una sola llave que abre 4 habitaciones del primer piso y 2 del segundo. Si sólo puedo intentar abrir una puerta, ¿en qué piso debo intentarlo para entrar en una habitación? Razona la respuesta.

Solución

Puede hacerse sin considerar la probabilidad del piso.

La probabilidad de abrir en el primer piso es $\frac{4}{13}$ y la de abrir en el segundo piso es $\frac{2}{7}$.

Como $\frac{4}{13} > \frac{2}{7}$, debo intentarlo en el primer piso.

Problema 5.

En un examen la teoría puntúa el 60% y los problemas el 40% de la nota final. Si Pedro tiene de nota final un 7 y sacó en los problemas un 5,125 ¿qué nota tuvo en la teoría?

Solución

Llamando T a la nota de teoría y P a la de problemas, la nota final será:

$$\frac{60T}{100} + \frac{40P}{100}$$

$$\text{Entonces: } \frac{60T}{100} + \frac{40 \times 5,125}{100} = 7 \Rightarrow 60T = 700 - 205 \Rightarrow T = 8,25$$

Problema 6.

La siguiente tabla nos indica la marcha que llevaban Pablo y Juan en una carrera de 16 km.

Hora	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida por Pablo (km)	0	4	8	12	16	
Distancia recorrida por Juan (km)	0	6	6	10	14	16

A) Sobre la gráfica dibujar en rojo la trayectoria de Pablo y en azul la trayectoria de Juan.

B) Responder a través de las gráficas las preguntas siguientes:

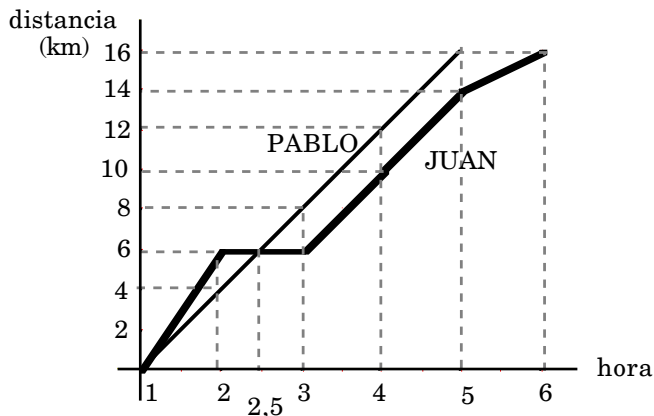
a) Al cabo de una hora ¿quién va en cabeza?

- b) ¿A qué hora se encuentran? ¿A qué distancia de la salida?
 c) ¿Quién ha efectuado una pausa? ¿Cuánto ha durado?
 d) Calcular la velocidad media de Juan entre la salida y la llegada.

Solución

Los datos que aparecen en la tabla se refieren al comienzo de cada hora, pues a la hora 1 han recorrido 0 km.

A)



B)

- a) Al cabo de una hora va en cabeza Juan, pues ha recorrido 6 km y Pablo sólo ha recorrido 4 km.
 b) A las 2 horas y media se cortan ambas gráficas. Están a 6 km de la salida.
 c) Juan se ha parado durante una hora.
 d) Juan ha recorrido los 16 km en 6 horas, su velocidad media ha sido

$$\frac{16}{6} = 2,6 \text{ km/h.}$$

Problema 7.

Aurora, Benita, Clara y Daniela discuten.

Una lleva mocasines, otra lleva zapatillas de ballet, una tercera sandalias y la última zapatillas de tenis.

La que lleva zapatillas de ballet dice: *Quiero mucho a Aurora, pero nada a Daniela.*

La que lleva las sandalias dice: *No quiero a Aurora, pero soy muy amiga de Clara.*

Daniela dice: *Quiero a Aurora y no llevo nunca mocasines.*

¿Qué tipo de zapatos lleva cada joven?

Solución

LLevados los datos a un cuadro de doble entrada de forma que se eliminan los cuadros imposibles, resulta que las sandalias las lleva necesariamente Benita y que Daniela ha de llevar las de tenis.

Por tanto, Aurora lleva mocasines y Clara las zapatillas de ballet.

	Mocas	Ballet	Sandal	Tenis
Aurora	●			
Benita			●	
Clara		●		
Daniela				●

Problema 8.

Tengo un montón de manzanas y unas cuantas cajas. Si pongo 7 manzanas en cada caja sobran 10 manzanas, pero si pongo 9 manzanas en cada caja me sobran 2 cajas. ¿Cuántas cajas tengo?

Solución

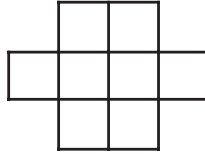
Sean M el número de manzanas y C el de cajas.

$$\left. \begin{array}{l} M = 7C + 10 \\ M = 9(C - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow C = 14, M = 108$$

ARAGÓN 1999

FASE SEMIFINAL

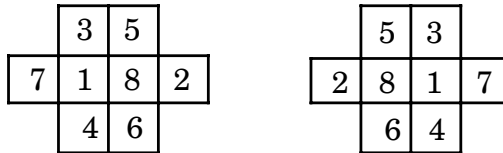
Problema 1. CADA UNO EN SU SITIO



Escribe en cada casilla un número del 1 al 8, todos distintos, de manera que ninguno tenga un consecutivo con él, ni en vertical, ni en horizontal, ni en diagonal.

Solución

Es necesario colocar en las posiciones centrales los números que sólo tienen un consecutivo, es decir, el 1 y el 8, por lo que las únicas soluciones posibles son



Si en las posiciones centrales hubiera otro número cualquiera, por ejemplo el 2, sólo quedaría una casilla donde poder colocar a sus consecutivos, 1 y 3; por ello no es posible colocar en las centrales otros números distintos del primero y el último.

Problema 2. RESTAURANTE CHINO

En un restaurante chino se da una fiesta. Cada dos invitados comparten un plato de arroz tres delicias, cada tres uno de salsa y cada cuatro uno de carne agridulce. Si en total se sirven 65 platos, ¿cuántos invitados acudieron a la fiesta?

Solución

El número de invitados debe ser múltiplo del mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4, es decir, de 12, por lo que será de la forma $12n$.

El número de platos de arroz servidos es $6n$, el de salsa $4n$ y el de carne $3n$ y debe cumplirse que

$$6n + 4n + 3n = 65 \Rightarrow n = 5$$

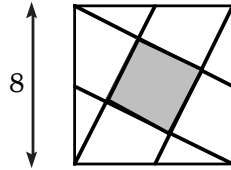
El número de invitados es $12 \times 5 = 60$.

Otra forma.

Cada 12 personas se comen 6 platos de arroz, 4 de salsa y 3 de carne, en total 13 platos.

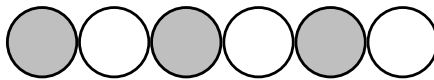
Como se comen 65 platos, es decir, 5 veces 13, el total de invitados será $12 \times 5 = 60$.

Problema 3. CUADRADO DENTRO DE CUADRADO
 Calcula el área de la parte sombreada.



Un problema similar a éste está resuelto en CASTILLA Y LEÓN 98. Fase provincial de Salamanca, nº 3.

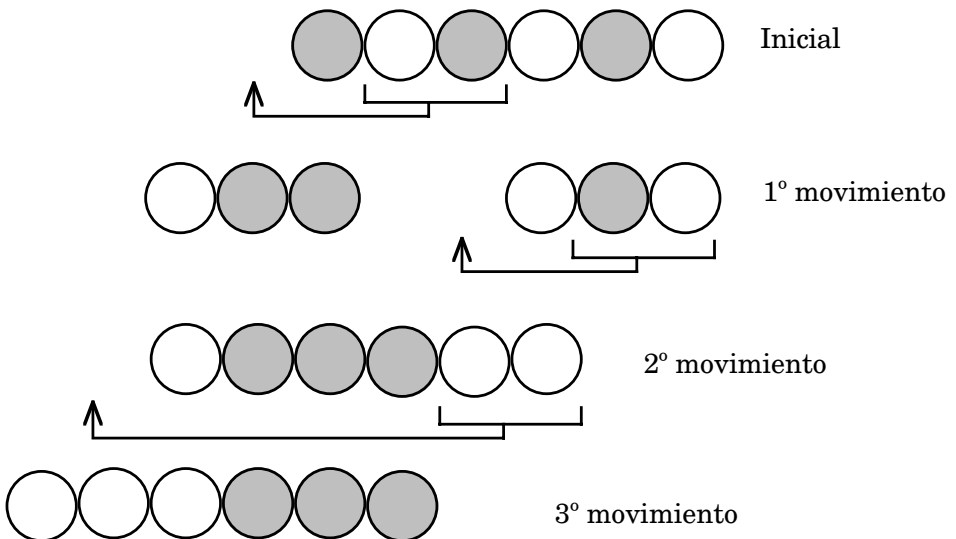
Problema 4. BAILE DE FICHAS



Mueve las fichas de manera que, después de varios movimientos, las blancas estén todas juntas a la izquierda, seguidas de las negras. En cada movimiento debes mover dos fichas, cogiendo siempre fichas adyacentes (tangentes) sin cambiarlas de orden y colocándolas en un sitio vacío.

Respuesta razonada.

Solución



Problema 5. ORDEN Y CAOS

Juan es un muchacho muy cuidadoso al que le gusta tener todo muy ordenado, especialmente la habitación que comparte con su hermano gemelo Ángel, que es muy despreocupado y deja todo desordenado, especialmente la habitación que comparte con su hermano. Juan es capaz de ordenar la habitación en dos horas y Ángel la desordenaría en tres horas.

Un día coincidieron en la habitación, que estaba totalmente desordenada, y mientras Juan la ordenaba, Ángel se dedicó a deshacer el orden.

¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que la habitación quedó totalmente ordenada?

Solución

Si se divide la habitación en 6 partes, en una hora Juan ordena $\frac{3}{6}$ partes y Ángel desordena $\frac{2}{6}$ partes; es decir, en una hora queda ordenada $\frac{1}{6}$ de la habitación.

Para que la habitación esté ordenadamente totalmente son necesarias 6 horas.

Problema 6. UN AGRICULTOR CON BUEN OJO

Un agricultor está preparando un herbicida para su campo de patatas; en el bote del herbicida concentrado se indica que se debe mezclar con agua y que para que el tratamiento tenga efecto, la concentración del herbicida puro en la mezcla debe ser como mínimo del 5 %.

El agricultor mezcla un litro de herbicida puro con nueve litros de agua.

Cuando está a punto de terminar el trabajo, se da cuenta que sólo le quedan dos litros de mezcla y que no le va a llegar, así que añade dos litros más de agua.

¿Crees que la nueva mezcla tendrá al menos el 5 % de herbicida puro deseado?

Solución

El 5% es $\frac{1}{20}$, es decir, 20 litros de mezcla requieren al menos 1 litro de herbicida y 19 de agua.

10 litros de mezcla requieren al menos 0,5 litros de herbicida.

Como la mezcla la hace poniendo 9 litros de agua y 1 de herbicida, es correcta, y tiene 9 partes de agua por 1 de herbicida.

Cuando sólo tiene 2 litros de mezcla 1,8 son de agua y 0,2 de herbicida. Le añade 2 litros de agua y ya tiene 4 litros de mezcla (3,8 de agua y 0,2 de herbicida).

Para que sea correcta, $\frac{1}{20}$ debe ser de herbicida, y $\frac{1}{20}$ de 4 litros son 0,2 litros, que es el mínimo requerido.

FASE FINAL**Problema 1. QUIEN LLEGA A 31 GANA**

Vamos a jugar tú y yo.

Tú dices un número del 1 al 5 y después yo digo otro, también del 1 al 5, y los sumamos.

Vuelves a decir otro número (del 1 al 5) y lo sumamos al resultado anterior y, a continuación, yo hago lo mismo.

Continuamos jugando así. Gana el que llegue a 31.

¿Qué números debes decir para ganar siempre?

Solución

Gana el jugador que habla el primero siempre que lleve la siguiente estrategia:

Empieza diciendo 1 y, teniendo en cuenta lo dicho por el otro, seguirá diciendo en los turnos sucesivos los números necesarios para llegar a 7, 13, 19, 25 y finalmente 31.

Un ejemplo de partida:

<u>1º jugador</u>	<u>2º jugador</u>	<u>1º jugador</u>	<u>Suma</u>
1	3	3	7
	5	1	13
	2	4	19
	1	5	25
	3	3	31

El jugador que hable el segundo sólo podrá triunfar cuando el otro “falle” y abandona en algún momento la estrategia descrita. Entonces el que habló en segundo lugar puede hacerla suya y llegar a 31.

Problema 2. TRIPLE PESADA

El Sr. Ciruelo es una persona muy ahorradora y pretende pesar a su bebé, a su perro y a él mismo, introduciendo solamente una moneda en la balanza de la tienda. Juntos pesan 77 kg. El pesa 45 kg más que el bebé y el perro juntos, y el perro pesa un 40 % menos que el bebé. ¿Cuánto pesa cada uno por separado?

Solución

Llamando a, b, c a los pesos del bebé, perro y D. Ciruelo, podemos escribir las igualdades:

$$b + p + c = 77$$

$$c = 45 + b + p$$

$$p = \frac{60}{100}b = \frac{3}{5}b$$

que se verifican para b =10 kg, p = 6 kg y c = 61 kg.

Problema 3. LA URBANIZACIÓN TUVO QUE CAMBIAR EL TUBO

Cerca de la ciudad había varias casas de campo que se abastecían del agua potable de un depósito, a través de una tubería cuya sección es 10 cm.

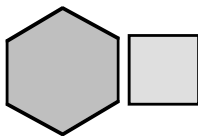
El ayuntamiento ha decidido incluir esas casas en una nueva urbanización, a la que el concejal de urbanismo ha puesto el nombre de Urbanización de los Monosabios. Se prevé que su población se multiplicará por 9. Para que esos nuevos habitantes dispongan de la misma cantidad de agua por persona, el ayuntamiento ha ordenado sustituir la tubería vieja por una sola de mayor sección.

¿Cuál debe ser la sección de la nueva tubería de agua?

Solución

El abastecimiento de agua se debe multiplicar por 9 y para ello, por ser la razón de las áreas de dos superficies semejantes igual al cuadrado de la razón de semejanza, habrá que multiplicar por 3 la sección de la tubería, es decir, debe ser de 30 cm.

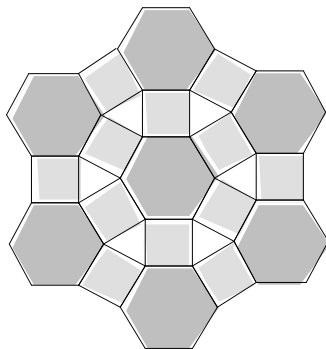
Problema 4. MOSAICO REGULAR



Se quiere embaldosar una plaza con tres tipos de baldosas con forma de polígono regular. Sabemos que una es cuadrada y otra hexagonal.

¿Qué número de lados debe tener la que falta para que ajuste perfectamente?

Solución



Para que los polígonos regulares que concurren en un mismo vértice estén en un plano, la suma de los ángulos interiores debe ser 360° .

Esa suma se consigue con dos cuadrados de ángulo interior 90° , un hexágono de ángulo 120° , y como tercera figura un triángulo equilátero de ángulo 60° , como indica la figura.

Problema 5. EL GLOBO FERROZ

El Sr. Ciruelo es muy aficionado a la aerostación y, como ya sabrás si has resuelto el problema 2, pesa 61 kg. Tiene un globo de helio que es capaz de sustentar una carga neta (sin contar lo que pesa el globo y su barquilla) de 100 kg. El globo se eleva mientras su carga neta es inferior a 100 kg; al alcanzar esos 100 kg deja de subir; si el peso es superior empieza a descender.

Lleva además una cuerda de 300 m que pesa 60 kg. Desea permanecer a una altura de 150 m por encima del suelo para realizar un reportaje fotográfico y luego ir a dar una vuelta para disfrutar del paisaje, antes de descender.

¿Cómo consigue permanecer quieto a 50 m mientras realiza el reportaje?

Solución

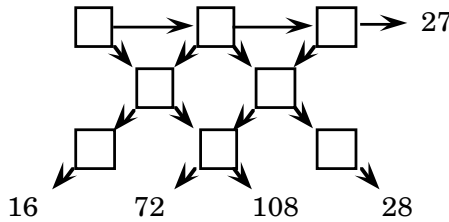
El peso del Sr. Ciruelo y el de la cuerda es $61 + 60 = 121$ kg, que le impiden ascender. Ahora bien, si apoya en el suelo x metros de cuerda, disminuye el peso del conjunto y el globo podrá subir, y cuando llegue a los previstos 150 metros de altura recupera parte de la cuerda hasta que el peso llegue a los 100 kg.

Como el metro de cuerda pesa $\frac{60}{300}$ kg, cuando haya equilibrio se verifica: $121 - x \cdot \frac{60}{300} = 100 \Rightarrow x = 105$ m.

Si sobre el suelo hay 105 m de cuerda, el Sr. Ciruelo y los 195 m restantes de cuerda pesan 100 kg y el globo se estabiliza. En esa situación hay 45 m de cuerda dentro de la barca del globo, 150 m colgando entre el globo y el suelo y 105 m en el suelo.

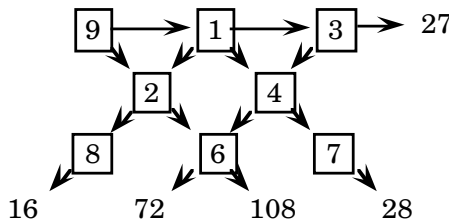
Problema 6. PRODUCTO ENTRECruzADO

Debes colocar en cada casilla un número del 1 al 9, todos distintos, para que los productos que indican las flechas sean correctos.



Solución

En los caminos que finalizan en el 16 y en el 28 no puede haber 3, 6 ó 9, y en el que acaba en el 28 necesariamente debe entrar el 7, de la misma forma que en el que acaba en el 27 deben estar el 1, 3 y 9. Así la solución puede ser:



ASTURIAS 1999
Cat A (2º ESO)
SEMIFINAL

Problema 1. UN NÚMERO INTERESANTE

Obtener un número de cinco dígitos, tal que si se le añade un 1 al final, resulta el triple del que saldría si añadimos un 1 al principio.

Solución

Sea \underline{abcde} el número.

Ha de verificarse $\underline{abcde1} = 3 \times \underline{1abcde}$.

Como el producto $3 \times e$ acaba en 1, ha de ser $e = 7$.

Análogamente se van obteniendo las otras cifras de derecha a izquierda, como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r}
 \underline{1 \ a \ b \ c \ d \ 7} \\
 \times 3 \\
 \hline
 a \ b \ c \ d \ 7 \ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 \ a \ b \ c \ 5 \ 7} \\
 \times 3 \\
 \hline
 a \ b \ c \ 5 \ 7 \ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 \ a \ b \ 8 \ 5 \ 7} \\
 \times 3 \\
 \hline
 a \ b \ 8 \ 5 \ 7 \ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 \ a \ 2 \ 8 \ 5 \ 7} \\
 \times 3 \\
 \hline
 a \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7} \\
 \times 3 \\
 \hline
 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \ 1
 \end{array}$$

El número pedido es 42857.

Problema 2. CALENDARIO

Recortamos en la hoja de un mes cualquiera del calendario (dispuesto por semanas en horizontales) un cuadrado de 3×3 días. Si sumamos los números de los nueve días que entran en este cuadrado, obtenemos un múltiplo de 13. ¿Sabrías determinar el día de la esquina superior derecha de ese recorte?

Solución

Sea a el número correspondiente al día de la esquina superior izquierda. La colocación de los números en ese cuadro sería

$$\begin{array}{ccc}
 a & a+1 & a+2 \\
 7+a & 8+a & 9+a \\
 14+a & 15+a & 16+a
 \end{array}$$

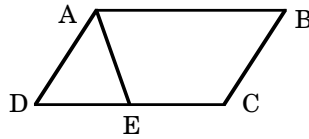
La suma debe ser múltiplo de 13: $9a + 72 = 13 \overset{\bullet}{} \Rightarrow a = \frac{13}{9} - 8$.

Resulta $a = 5$.

El día buscado es $a + 2 = 7$.

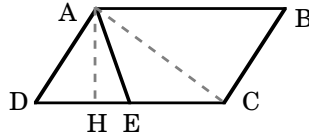
Problema 3. CUADRILÁTERO EN PORCIONES

En el paralelogramo ABCD el segmento DE es igual al segmento EC. Determina la relación entre el área del triángulo ADE y el área del paralelogramo.



Solución

Trazando la diagonal AC, el paralelogramo queda dividido en dos triángulos, ABC y ACD, que son iguales y, por tanto, de área igual a la mitad de la del paralelogramo.



Como E es el punto medio de DC, los triángulos ADE y AEC tienen bases iguales ($DE = EC$) y la misma altura AH; luego sus áreas son iguales.

Así resulta que el área del triángulo ADE es la mitad del área del ADC, y será, por tanto, la cuarta parte del área del paralelogramo ABCD.

Problema 4. SENTENCIAS

Tenemos una lista con diez sentencias:

1ª La segunda sentencia es falsa.

2ª La tercera sentencia es falsa.

3ª La cuarta sentencia es falsa.

.....

.....

9ª La décima sentencia es falsa.

10ª La primera sentencia es falsa.

¿Cuántas sentencias son falsas y cuáles?

Solución

Supongamos que la primera sentencia es cierta; entonces la segunda será falsa, la tercera será cierta, la cuarta falsa y así hasta llegar a la novena, que será cierta, implicando que la décima es falsa y, por tanto, la primera cierta, como se había supuesto.

Concretando, serán falsas las sentencias de lugar par.

Si suponemos que la primera es falsa, la segunda sería cierta y de forma análoga a la anterior se llegaría a que las sentencias falsas serían las de lugar impar.

FINAL

Problema 1. EL CÓDIGO SECRETO

Seguidamente te explicamos cómo codificar un mensaje:

a) Cuento el número de letras del mensaje y añado Z hasta que sea un múltiplo de 5.

Por ejemplo: LAS FINALES SERÁN EN GIJÓN (22 letras, añadimos 3 Z).

b) Separo el mensaje en dos filas como el ejemplo:

L	S	I	A	E	S	R	N	N	I	O	Z	Z
A	F	N	L	S	E	A	E	G	J	N	Z	

c) Escribo las letras de la primera fila seguidas de la segunda fila:

LSIAESRNNIOZZAFNLSEAE GJNZ

d) Por último agrupo las letras de 5 en 5 y ya tenemos nuestro mensaje:

LSIAE SRNNI OZZAF NLSEA EGJNZ

Según estos criterios y mediante un proceso inverso, ¿sabrías decodificar el siguiente mensaje?

LSEOE IAALA EEZOM JRSRN ABCTZ

Solución

Después de hacer las operaciones inversas a las indicadas en el enunciado se llega al mensaje:

LOS MEJORES IRAN A ALBACETE

Problema 2. TRAVESÍA EN ESQUÍ

Un esquiador calculó que si iba a 10 km/h llegaría al sitio designado una hora después del mediodía, y que si la velocidad fuera de 15 km/h, llegaría una hora antes del mediodía.

¿A qué velocidad debería moverse para llegar al citado lugar al mediodía?

Solución

Sea t el número de horas que invertiría en el caso deseado en que llegara a mediodía. Cuando va a 10 km/h invierte $t + 1$ horas y cuando va a 15 km/h invierte $t - 1$ horas. Como el camino recorrido es el mismo, se verifica:

$$10(t + 1) = 15(t - 1) \quad \Rightarrow \quad t = 5 \text{ horas.}$$

Por ello la distancia es $10(t + 1) = 60$ km. y para recorrerla en 5 horas debe llevar una velocidad de $\frac{60}{5} = 12$ km/h.

Se ha hecho calculando en primer lugar el tiempo y después la longitud del recorrido. También puede hacerse hallando primero la longitud “l” del recorrido:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow l = 60 \text{ km.}$$

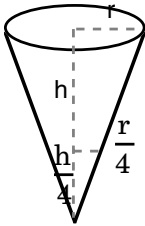
El lento tarda $\frac{60}{10} = 6$ horas. Se desea hacerlo en 1 hora menos, o sea en 5, por lo que la velocidad que debe llevar es $\frac{60}{5} = 12 \text{ km/h.}$

Problema 3. GOTEO SOBRE CONO

Un vaso de forma cónica, colocado bajo un grifo que vierte agua de manera constante, se llena hasta la cuarta parte de su altura en un minuto. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse por completo?

Solución

Supongamos el cono con el vértice hacia abajo.

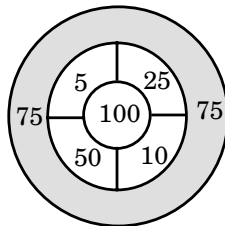


El cono que tiene por altura 1/4 de la total también tiene por radio 1/4 del radio del cono; por tanto su volumen será

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 \frac{h}{4} = \frac{1}{192} \pi r^2 h = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h\right)$$

Este volumen corresponde a 1/64 del volumen total. Por tanto, tardará 64 minutos en llenarlo completamente.

Problema 4. TIRO CON DARDOS



En la final de un campeonato de dardos cada uno de los CUATRO finalistas tira CINCO dardos a la diana de la figura. Al finalizar, un periodista tomó solamente estas notas:

Jugador 1: los lanzamientos primero y último dieron en la diana

Jugador 2: es el único jugador que lanzó un dardo fuera del tablero, en concreto en su primer intento.

Jugador 3: solamente vi su última tirada que fue de 5 puntos.

Jugador 4: clavó cuatro dardos en la misma área.

Cada jugador obtuvo exactamente 305 puntos.

¿Sabrías determinar el ganador sabiendo que en caso de empate será el que más dianas hizo?

Nota: hacer diana es clavar en el 100.

Solución

Analizando los puntos de cada jugador se llega a:

Primer jugador: Consigue 305 puntos con los 200 de las dos dianas, más 75, 25 y 5 que consigue con los tres dardos restantes.

Segundo jugador: Consigue los puntos con tres dianas y un dardo de 5.

Tercer jugador: Los 300 puntos que le faltan los logra con cuatro dardos de 75.

Cuarto jugador: Clava cuatro dardos en la zona de 75 puntos (300 puntos) y uno de 5.

Gana el segundo jugador, que logra tres dianas.

Cat B (3º y 4º ESO) SEMIFINAL

Problema 1. K - FLIP

Decimos que un número entero es un K-flip si al multiplicarlo por K resulta el mismo número con las cifras en orden inverso. Por ejemplo, 1.089 es un 9-flip. Tienes que buscar un 9-flip de cinco dígitos.

Solución

El problema se puede plantear como una multiplicación de la forma

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad d \quad e \\
 x \quad 9 \\
 \hline
 e \quad d \quad c \quad b \quad a
 \end{array}$$

a debe ser un 1, pues, en caso contrario, 9 por “más de 1” sería superior a 10 y “nos llevaríamos”; como consecuencia $e = 9$.

En fin, se llegaría a que el número es 10.989.

Problema 2. FEBRERO JUSTO

En este año 1999, como te habrás dado cuenta, el mes de febrero tuvo cuatro semanas justas, es decir, empezó en lunes y acabó en domingo. ¿Sabrías buscar el próximo año que ocurrirá lo mismo? ¿Cuántos años del siglo XXI tendrán la misma característica?

Solución

Cada año normal dura 365 días, que es múltiplo de 7 más 1; por lo tanto una misma fecha, de un año al siguiente, adelanta un día de la semana. Si el año es bisiesto, una misma fecha avanzará en dos días de la semana.

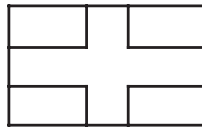
Teniendo en cuenta que los años 2000, 2004 y 2008 son bisiestos, volverá a ser lunes el día 1 de febrero de 2010.

Si todos los años tuvieran el mismo número de días, el día 1 de febrero caería en lunes cada 7 años, pero por cada bisiesto el día de la semana corre un lugar; por tanto, se puede repetir esa fecha cada 6 años, un año bisiesto en medio, cada 5, dos años bisiestos, y cada 11 con 3 bisiestos. Teniendo en cuenta todo esto y que el año 2100 es del siglo XXI, hay 14 años en los que el día 1 de febrero será lunes.

(2010, 2016, 2021, 2027, - , 2038, 2044, 2049, 2055, - , 2066, 2072, 2077, 2083, -, 2094, 2100).

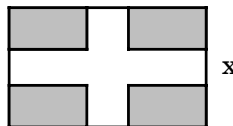
Problema 3. LA BANDERA

Una bandera tal como muestra la figura, tiene una cruz con cuatro brazos de igual anchura. Las dimensiones de la bandera son de 3 metros de ancho por 4 metros de largo. ¿Cuál será el ancho de las ramas de la cruz, si su área es la mitad del área total de la bandera?



Solución

Sea x la anchura de los brazos de la cruz.



La zona sombreada está formada por cuatro rectángulos de dimensiones $\frac{4-x}{2}$ y $\frac{3-x}{2}$.

El área de esa zona debe ser la mitad de la del rectángulo; por tanto

$$4 \cdot \frac{4-x}{2} \cdot \frac{3-x}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son 1 y 6, siendo válida solamente la solución 1.

Problema 4. RESPUESTA SIN PREGUNTA

En un test de respuestas múltiples hay una pregunta que está ilegible, no obstante la respuesta es única. ¿Sabrías determinarla?

- (a) Todas las siguientes
- (b) Ninguna de las siguientes
- (c) Todas las anteriores
- (d) Una de las anteriores
- (e) Ninguna de las anteriores
- (f) Ninguna de las anteriores

Solución

Las respuestas e y f deben ser falsas, pues caso de ser ciertas, habría dos y no sería única.

La d debe ser falsa, pues caso de ser cierta, habría dos ciertas, una ella misma y otra una de las anteriores.

La c debe ser falsa, pues aseguraría la existencia de dos ciertas.

La a es falsa por asegurar la existencia de más de una cierta.

Quedaría la b, que puede ser cierta por asegurar que ninguna de las siguientes es cierta, y así es lo que ocurre.

En resumen, la b es cierta.

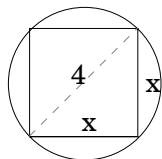
FINAL

Problema 1. TAPONES Y AGUJEROS

Queremos tapar un agujero redondo de 4 cm de diámetro con un tapón cuadrado lo más grande posible y tapar un agujero cuadrado de 4 cm de lado con un tapón redondo, también lo mayor posible.

Calcular el ajuste de ambos tapones a sus agujeros respectivos obteniendo el tanto por ciento de agujero que tapa cada uno y después valorar cuál ajusta mejor.

Solución

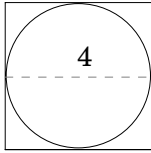


$$\text{Área del agujero: } 4\pi = 12,57 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lado del cuadrado: } 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$$

$$\text{Área del cuadrado: } 8 \text{ cm}^2$$

12,57 es el 100%, entonces 8 es el $\frac{800}{12,57} \cong 63,64\%$.



Área del agujero: 16 cm^2

Área del círculo: $4\pi = 12,57 \text{ cm}^2$

16 es el 100%, entonces 12,57 es el $\frac{1.257}{16} \cong 78,56\%$.

Luego ajusta mejor el segundo tapón.

Problema 2. SERIE CURIOSA

Determinar una serie de DOCE números naturales tal que el 4º término es el 4, el 12º término es el 12 y que la suma de 3 términos consecutivos cualesquiera es 50.

Solución

a	b	c	4	d	e	f	g	h	i	j	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 50 \\ b + c + 4 = 50 \end{array} \right\} \text{Restando: } a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} i + j + 12 = 50 \\ h + i + j = 50 \end{array} \right\} \text{Restando: } 12 - h = 0 \Rightarrow h = 12$$

La serie hasta ahora es:

4	b	c	4	d	e	f	g	12	i	j	12
---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	----

$$\left. \begin{array}{l} f + g + 12 = 50 \\ e + f + g = 50 \end{array} \right\} \text{Restando: } 12 - e = 0 \Rightarrow e = 12. \text{ Por tanto } d = 34.$$

Queda por ahora:

4	b	c	4	34	12	f	g	12	i	j	12
---	---	---	---	----	----	---	---	----	---	---	----

Se completa fácilmente, pues

$$c + 4 + 34 = 50 \Rightarrow c = 12 \qquad 4 + b + 12 = 50 \Rightarrow b = 34$$

$$34 + 12 + f = 50 \Rightarrow f = 4 \qquad 4 + g + 12 = 50 \Rightarrow g = 34$$

$$34 + 12 + i = 50 \Rightarrow i = 4 \qquad 4 + j + 12 = 50 \Rightarrow j = 34$$

La serie buscada es

4	34	12	4	34	12	4	34	12	4	34	12
---	----	----	---	----	----	---	----	----	---	----	----

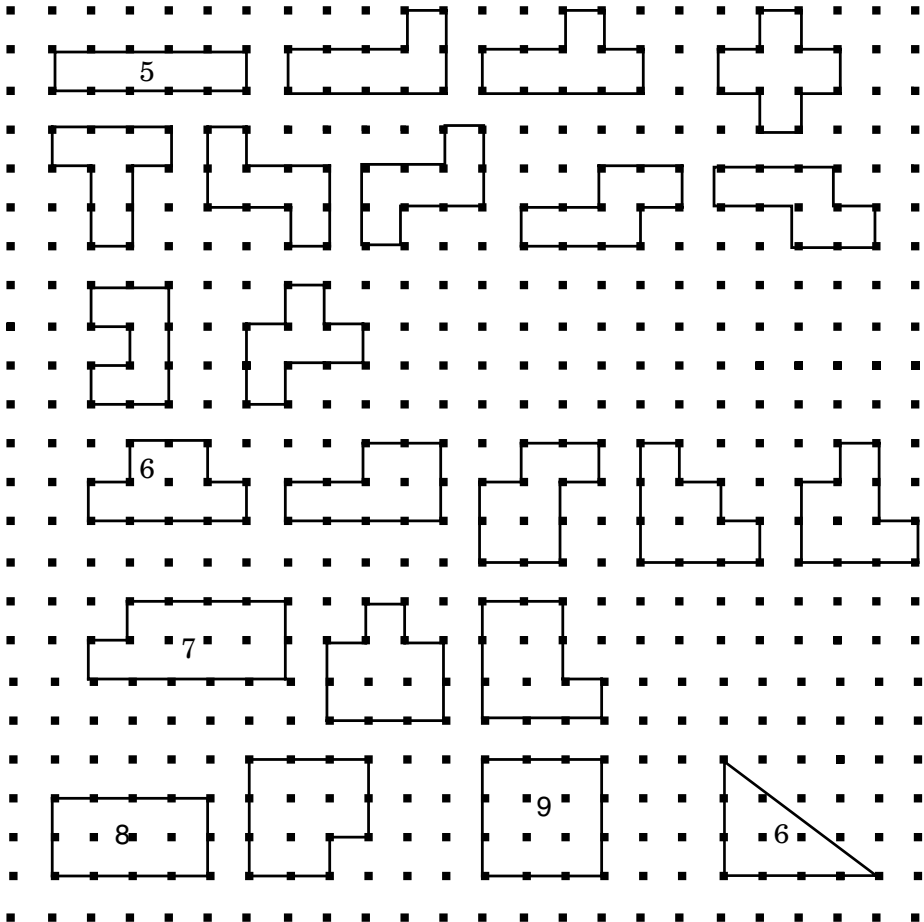
Problema 43. PERÍMETROS IGUALES

~~ÁREAS IGUALES~~

Tomando como unidad la distancia entre dos puntos y como unidad el cuadradito \square , construir el mayor número de figuras poligonales distintas que teniendo sus vértices sobre los puntos tengan 12 unidades de perímetro, escribiendo dentro el área correspondiente.

Solución

En la figura siguiente puede comprobarse cómo el hecho de que dos figuras tengan perímetros iguales no implica que las áreas sean iguales.



Problema 34. CAJAS CON BOLAS

Tenemos tres cajas idénticas. En una hay dos bolas blancas y tiene escrito en la tapa BB. En otra hay dos negras y pone en la tapa NN.

En la tercera hay una bola blanca y otra negra y la tapa pone BN.

Un incordiante mueve las tapas de modo que ninguna corresponde con su contenido. ¿Cómo podemos saber el contenido exacto de cada una de las tres cajas, sacando una bola de la que elijamos?

Solución

Al no coincidir el contenido con lo que pone el exterior, sólo existen dos posibilidades:



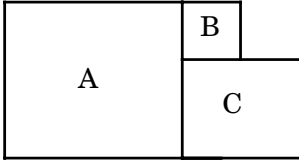
Sacamos una bola de la caja que tiene escrito BN y sabemos que en su interior hay BB o NN. Si la bola que saca es B, en la caja hay dos bolas blancas, y si es negra hay dos negras.

* Supongamos que la bola que saca de BN es N; en su interior habrá NN. En la que pone BB habrá BN o NN, pero NN ya está localizada, luego estará BN y en la que pone NN estará BB.

* Supongamos que la bola sacada de BN es B, en su interior habrá BB. En la que pone NN debe haber BB o BN; como BB ya está localizada, habrá BN y en la que pone BB estará NN.

CANARIAS 1999

Problema 1



Las figuras A, B y C son cuadrados.
 El perímetro de B es 12 y el perímetro de C es 24.
 ¿Cuál es el área del cuadrado A?

Solución

El lado del cuadrado B valdrá $12 : 4 = 3$, y el lado del cuadrado C valdrá $24 : 4 = 6$.

El lado del cuadrado A es la suma de los lados de B y C; por tanto, valdrá $6 + 3 = 9$, y el área será $9^2 = 81 \text{ u}^2$.

Problema 2

Cuatro números están escritos formando una columna. Los dos primeros suman 8, los dos centrales suman 6 y los dos últimos suman 7. ¿Cuánto suma el primero y el último?

Solución

Sean los números a, b, c, d.

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 8 \\ b + c = 6 \\ c + d = 7 \end{array} \right\} \text{Sumando: } a + 2(b + c) + d = 21 \Rightarrow a + 12 + d = 21$$

Por tanto: $a + d = 9$.

Problema 3

Un juego consiste en invertir la posición de una pareja de vasos contiguos de la hilera



Indica cómo podemos obtener la disposición de vasos alternándose de la hilera



con el menor número de movimientos posible.

Solución

A partir de la posición inicial, damos los siguientes pasos:



1º: Invertimos 3º y 4º



2º: Invertimos 2º y 3º



3º: Invertimos 4º y 5º



Problema 4

Al hacer el siguiente producto

$$15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

y tomar nota del resultado, escribí 1307□74368000, y una de las cifras, la quinta, quedó borrosa y ahora no recuerdo cuál es.

¿Podrás averiguarla sin necesidad de repetir la operación de multiplicar los números?

Explica cómo lo haces.

Solución

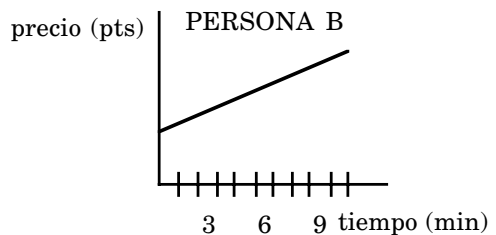
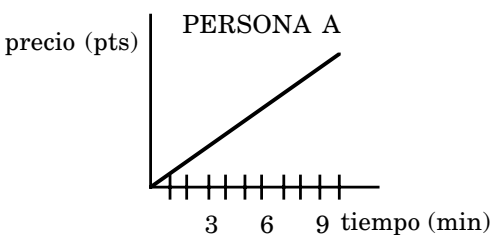
Como es múltiplo de 11, la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y las de lugar par es múltiplo de 11. Entonces

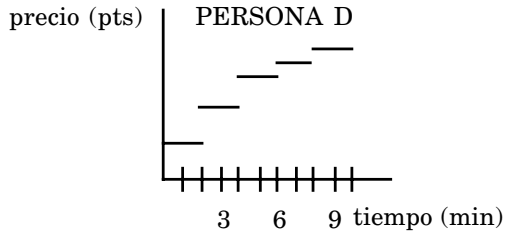
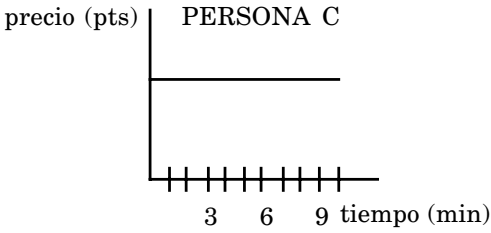
$28 - (11 + \square) = 11$, donde la mayor diferencia es 17, con $\square = 0$, y la menor es 8, con $\square = 9$. De todas ellas la única que resulta múltiplo de 11 es 11, que corresponde únicamente a $\square = 6$.

Luego la cifra que falta es 8.

Problema 5

Cuatro personas tienen contratadas tarifas diferentes para su teléfono móvil. Las gráficas representan el coste de una llamada de 10 minutos de duración. Explica razonadamente las características de cada tarifa (cuota inicial, paga por segundos, por minutos, etc.).





Solución

PERSONA A: paga por segundos (gráfica proporcional y continua).

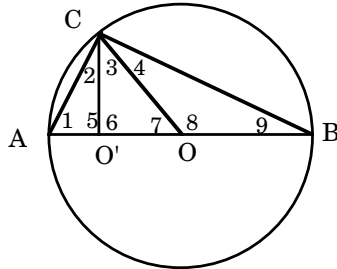
PERSONA B: paga por segundos con cuota inicial o establecimiento de llamada.

PERSONA C: tarifa plana, mientras no sobrepase los 10 minutos, paga lo mismo por 30 segundos que por 10 minutos.

PERSONA D: Paga distintas cantidades por cada 2 minutos o fracción, siempre acumulando a los anteriores.

Problema 6

El triángulo ABC de la figura tiene el lado mayor que pasa por el centro de la circunferencia de centro O. Sabiendo que el ángulo 1 mide 70° , ¿cuánto miden los restantes ángulos?



Solución

El triángulo ABC es rectángulo en C, porque este ángulo abarca media circunferencia, luego $\hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 90^\circ$.

Como $\hat{5} = 90^\circ \Rightarrow \hat{2} = 20^\circ$.

En el triángulo AO'C tenemos $\hat{2} = 20^\circ$ y además O'C perpendicular a AB y AC perpendicular a CB $\Rightarrow \hat{9} = \hat{2} = 20^\circ$.

En el triángulo COB, $CO = OB$, luego es isósceles, con $\hat{4} = \hat{9} = 20^\circ$.

En el triángulo ACB, $\hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 90^\circ \Rightarrow \hat{3} = 50^\circ$.

En el triángulo CO'O, rectángulo en O': $\hat{7} = 40^\circ$.

En el triángulo CO'B: $\hat{4} + \hat{8} + \hat{9} = 180^\circ \Rightarrow \hat{8} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Resulta entonces: $\hat{1} = 70^\circ$; $\hat{2} = \hat{4} = \hat{9} = 20^\circ$; $\hat{3} = 50^\circ$; $\hat{7} = 40^\circ$; $\hat{5} = \hat{6} = 90^\circ$; $\hat{8} = 140^\circ$.

SEGUNDA FASE

PROBLEMA 1

Se disponen 6.000 bolas pintadas de blanco en filas de 10. Se pintan de verde las que ocupan lugares múltiplos de 3. Luego se pintan de rojo las de los lugares múltiplos de 4. Por último, las bolas décima, vigésima, trigésima, etc., se pintan de azul.

- ¿Cuántas bolas blancas quedan?
- ¿Cuántas azules?
- ¿Cuántas se pintan dos veces?
- ¿Cuántas se pintan tres veces?

Solución

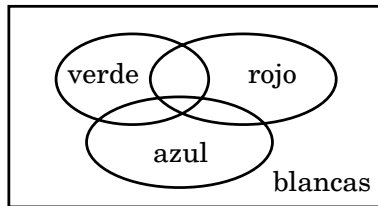
Entiendo que las bolas están numeradas de 1 a 6.000 en 600 filas de 10 unidades cada una.

Se pintan sólo de color verde las que son múltiplos de 3 sin serlo de 4 ni de 10, sólo de rojo las múltiplo de 4 y no de 3 ni de 10, y sólo de azul las múltiplo de 10 y no de 3 ni de 4.

Asimismo se pintan sólo de verde y rojo las que son múltiplo de 3 y 4 sin serlo de 10; análogo para verde y azul, y para rojo y azul.

Finalmente se pintan de los tres colores las que son múltiplo de los tres números.

Un diagrama ayuda a verlo:



Número de bolas pintadas de verde $(V) = \frac{6.000}{3} = 2.000$

rojo $(R) = \frac{6.000}{4} = 1.500$

azul $(A) = \frac{6.000}{10} = 600$

Número de bolas pintadas de verde y rojo $(VR) = \frac{6.000}{12} = 500$

verde y azul $(VA) = \frac{6.000}{30} = 200$

rojo y azul $(RA) = \frac{6.000}{20} = 300$

Número de bolas pintadas de verde, rojo y azul $(VRA) = \frac{6.000}{60} = 100$

Número de bolas pintadas = $V + R + A - VR - VA - RA + VRA =$
 $= 2.000 + 1.500 + 600 - 500 - 200 - 300 + 100 = 3.200$

Número de bolas blancas = $6.000 - 3.200 = 2.800$

Número de bolas pintadas dos veces =

$$VR + VA + RA - 2VRA = 500 + 200 + 300 - 2 \times 100 = 800$$

Número de bolas pintadas tres veces = $VRA = 100$.

Problema 2

Cada uno de los números de la columna A de la izquierda sufre una transformación, representada por la letra f y la flecha, para convertirse en el número de la columna B. Lo mismo ocurre con los de la columna C, que se transforman en los números que están en la columna D.

A	f	B
1	→→→→	1
2	→→→→	3
3	→→→→	6
4	→→→→	10
5	→→→→	15
...	→→→→	...
10	→→→→	...
...	→→→→	...
12	→→→→	...

C	g	D
1	→→→→	2
2	→→→→	6
3	→→→→	12
4	→→→→	20
5	→→→→	30
...	→→→→	...
10	→→→→	...
...	→→→→	...
12	→→→→	...

Debes encontrar en qué números se convierten los valores 10 y 12 al aplicarles las transformaciones, así como explicar en qué consiste cada transformación.

Solución

La transformación f asigna a cada número natural la suma de los naturales menores o iguales que él, es decir: $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

$$\begin{aligned} f(n) + f(n) &= (1 + 2 + \dots + (n - 1) + n) + (n + (n - 1) + \dots + 2 + 1) = \\ &= (n + 1) + (n + 1) + \dots \text{ n veces } + (n + 1) \Rightarrow f(n) = \frac{n(n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Luego $f(10) = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ y $f(12) = \frac{12 \times 13}{2} = 78$

La transformación g asigna a cada número natural el doble del que asigna la transformación f.

Luego $g(n) = 2f(n) = n(n + 1) \Rightarrow g(10) = 110$ y $g(12) = 156$.

Problema 3

¿De cuántas maneras se pueden ordenar los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 para formar un número de cinco dígitos en el que las cifras alternativamente aumenten y disminuyan?

Un ejemplo sería 13254, en el que el uno es menor que el tres ($1 < 3$), el tres mayor que el 2 ($3 > 2$), el dos menor que el cinco ($2 < 5$) y el cinco mayor que el cuatro ($5 > 4$).

Escribe todas las posibilidades.

Solución

Decenas de mil: 1.

13254, 14253, 14352, 15243, 15342; invirtiendo el orden de las cifras obtenemos: 45231, 35241, 25341, 34251, 24351.

Decenas de mil: 2

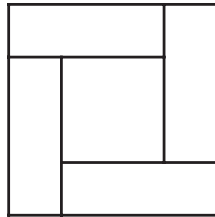
23154, 24153, 25143, 24351, 25341. (Los dos últimos ya están considerados a partir de los primeros).

Invirtiendo los veintemiles obtenemos los tres que faltan: 45132, 35142 y 34152.

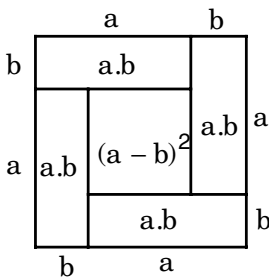
En total obtenemos: $2 \times 5 + 2 \times 3 = 16$.

Problema 4

Justifica la siguiente identidad: $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$, mediante la figura adjunta.



Solución



Designemos con a y b los segmentos que se indican en la figura.

El cuadrado de lado $a + b$, está formado por 4 rectángulos de dimensiones a y b , y un cuadrado de lado $a - b$.

Por tanto: $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$.

Problema 5

Queremos pesar 40 objetos de 1, 2, 3, 4,..., 38, 39, 40 kilogramos, usando una balanza de dos platillos. ¿Cuál es el menor número de pesas que se necesita y cuál es el peso de cada una?

Explica cómo obtener cada pesada.

Solución

Vamos a suponer que se pone en un platillo el objeto a pesar y en el otro las pesas.

Teniendo en cuenta que para escribir un número en base 2 se utilizan potencias de 2, para pesar objetos desde 1 kg hasta 40 kg se necesitan pesas de 1, 2, 4, 8, 16 y 32 kg, en total 6 pesas.

Por ejemplo, para pesar 26 kg, necesitamos $16 + 8 + 2$; para 40 kg necesitamos $32 + 8$, etc.

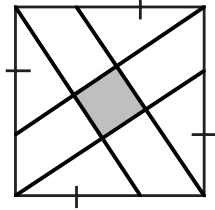
Además, con estas 6 pesas se puede pesar no sólo hasta 40 kg, sino hasta 63, pues 64 ya es potencia de 2.

Así: $63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

Si se supone que al efectuar la pesada la carga se coloca en uno de los platillos, mientras que las pesas se pueden repartir entre ambos platillos, entonces sólo se precisan cuatro pesas de 1, 3, 9 y 27 kg, tal como se explica en el problema 2 de la primera fase del ciclo 14-16 de Albacete 99.

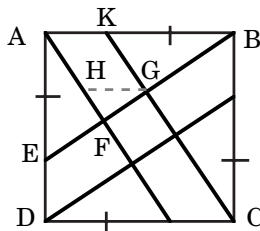
Problema 6

¿Qué fracción del total de la superficie del cuadrado grande representa la zona rayada?



Solución

Sea a el lado del cuadrado dado ABCD.



Los triángulos rectángulos ABE y FGH son semejantes porque tienen iguales los ángulos en B y G, por correspondientes entre paralelas: $\frac{AE}{AB} = \frac{FH}{FG}$ y esta razón vale $\frac{2}{3}$ por construcción.

Por otra parte, $HG = AK = \frac{a}{3}$.

De las relaciones

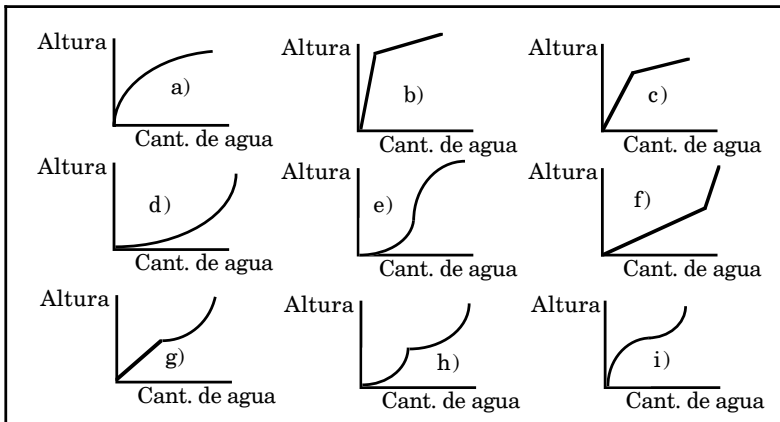
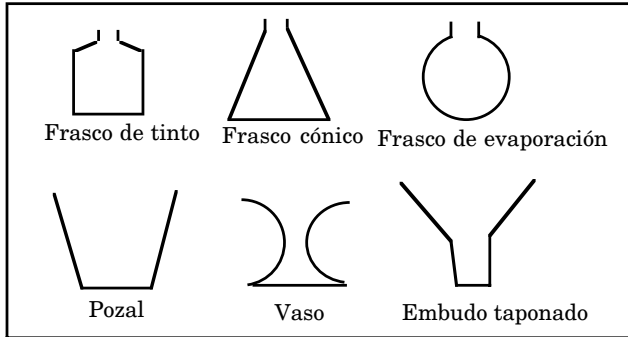
$$\left. \begin{array}{l} \frac{FH}{FG} = \frac{2}{3} \\ FH^2 + FG^2 = \frac{a^2}{9} \end{array} \right\} \text{ se deduce } FG^2 = \frac{a^2}{13}$$

Por tanto, el área de la zona rayada es $\frac{1}{13}$ del área del cuadrado dado.

CANTABRIA 1999

Problema 1. BOTELLAS Y DEPÓSITOS

Te presentamos 6 frascos y 9 gráficas. Las gráficas representan la altura que va alcanzando el agua en el frasco a medida que se va llenando.



Elige la gráfica que, en tu opinión, mejor se acomoda a cada frasco.

Solución

Frasco de tinto: Primer tramo de crecimiento constante. Segundo tramo con crecimiento cada vez mayor. Tercer tramo de nuevo con crecimiento constante. Gráfica f.

Frasco cónico: Crecimiento cada vez mayor, semejante a la rama derecha de la parábola cóncava. Gráfica d.

Frasco de evaporación: Primer tramo creciente, pero cada vez más atenuado, parecido a un arco de parábola. Segundo tramo creciente, pero ahora con aumento cada vez mayor. El último tramo con crecimiento constante. Gráfica i.

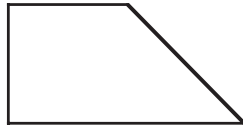
Pozal o cubo: Crecimiento cada vez más atenuado (rama izquierda parábola cóncava). Gráfica a.

Vaso: Dos tramos. Primero crecimiento cada vez mayor (rama derecha parábola cóncava). Segundo tramo cambia a un crecimiento atenuado (rama derecha parábola convexa). Gráfica e.

Embudo taponado: Dos tramos. Primero crecimiento constante. El segundo crecimiento cada vez más atenuado (rama derecha parábola convexa). Gráfica b.

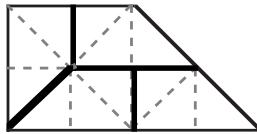
Problema 2. FINCA

¿Serías capaz de partir esta finca de forma de trapecio en cuatro partes iguales?



Solución

Suponemos que la base mayor del trapecio es doble de la base menor y ésta igual al lado perpendicular a las bases.



Dividimos el trapecio en 12 triángulos rectángulos isósceles iguales, como indica la figura. Cada una de las partes deberá contener 3 de esos triángulos.

La división en cuatro partes iguales se indica con trazo grueso.

Problema 3. LA MAYOR TOCA EL PIANO

Daniel y Arturo, dos viejos amigos, vuelven a encontrarse en la calle al cabo de algunos años. Después de saludarse, Daniel pregunta:

¿Cuántos hijos tienes?

Arturo: *Tres hijos.*

Daniel: *¿Qué edades tienen?*

Arturo: *Tú mismo lo vas a averiguar. El producto de sus edades es 36.*

Daniel, después de pensar algún tiempo, le dice a Arturo que necesita más datos.

Arturo: *En efecto, la suma de sus edades es igual al número de la casa que tenemos enfrente.*

Daniel mira el número de la casa que le indica Arturo y, quedándose pensativo durante un par de minutos, dice:

¡No es posible! Con lo que me has dicho no puedo conocer las edades de tus hijos. Me falta un dato más.

Arturo: *Perdona, Daniel, olvidé decirte que mi hija mayor toca el piano.*

Daniel: *En ese caso, ya sé sus edades.*
 ¿Qué edades tienen los hijos de Arturo?

Solución

Descomponemos el número 36 en producto de tres factores naturales de las formas siguientes, donde se ha indicado también la suma de esos factores:

<u>1ª pista</u>	<u>2ª pista</u>
36, 1, 1	$36 + 1 + 1 = 38$
18, 2, 1	$18 + 2 + 1 = 21$
12, 3, 1	$12 + 3 + 1 = 16$
9, 4, 1	$9 + 4 + 1 = 14$
9, 2, 2	$9 + 2 + 2 = 13$
6, 6, 1	$6 + 6 + 1 = 13$
6, 3, 2	$6 + 3 + 2 = 11$

Pide una nueva pista, pues dos sumas coinciden con el número de la casa; caso de que no fuera el 13 no pediría nueva pista.

Al decir “la mayor toca el piano” quedará que las edades son 9, 2, 2.

Problema 4

En la película *La jungla de cristal 2*, el malo propone a *McCane* y a su amigo un problema: Para desactivar una bomba tienen que colocar sobre una maleta una garrafa que contenga exactamente 4 litros de agua, pero sólo disponen de una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros. ¿Cómo lo resuelven?

Solución

En la siguiente tabla se indican los pasos a seguir y la cantidad de agua que va quedando en las garrafas:

	<u>garrafa grande</u>	<u>garrafa pequeña</u>
Se llena la grande	5	0
Se pasan 3 litros a la pequeña	2	3
Se vacía la pequeña	2	0
Se pasan 2 litros a la pequeña	0	2
Se llena la grande	5	2
Se pasa 1 litro a la pequeña	4	3

También podría hacerse de esta otra manera:

	<u>garrafa pequeña</u>	<u>garrafa grande</u>
Se llena la pequeña	3	0
Se pasan los 3 litros a la grande	0	3
Se llena la pequeña	3	3
Se pasan 2 litros a la grande	1	5
Se vierten los 5 litros	1	0

Se pasa el litro a la grande	0	1
Se llena la pequeña	3	1
Se pasan los 3 litros a la grande	0	4

Problema 5. CARRERA DE MOTOS

Se celebra una carrera de motos campo a través por el valle del Saja, en un recorrido de ida y vuelta de 70 km (70 de ida y 70 de vuelta). La moto número 1 mantiene una media de 80 km/h durante la ida, pero tiene problemas con el embrague y sólo consigue 60 km/h en la vuelta. La moto número 2 sólo consigue poner su moto a 70 km/h, pero mantiene esa velocidad durante toda la carrera.

¿Qué moto gana la carrera? ¿Cuánto tiempo tarda cada moto en hacer el recorrido?

Solución

Teniendo en cuenta que en el movimiento uniforme el tiempo se obtiene dividiendo el espacio por la velocidad, el tiempo que tarda la moto número 1 en la ida es $\frac{70}{80}$ horas y el tiempo que tarda en la vuelta es $\frac{70}{60}$ horas.

El tiempo invertido en la carrera será: $\frac{70}{80} + \frac{70}{60} = \frac{49}{24}$ horas.

El tiempo que tarda la moto número 2 en la carrera será: $\frac{140}{70} = 2$ horas.

Gana, por tanto, la moto número 2, pues tarda 2 horas, mientras que la número 1 tarda $\frac{49}{24} > 2$.

CASTILLA-LA MANCHA 1999

CICLO 12-14

Problema 1. LLEGAR A 100

Dos personas van eligiendo por turnos números entre el 1 y el 10, ambos inclusive, y lo van sumando al número que ha dicho el anterior. El primer jugador que consigue llegar exactamente a 100 es el ganador.

¿Tiene ventaja el que dice el primer número o el segundo? Trata de encontrar la estrategia ganadora.

Cambia la meta (en lugar de 100, que sea otro número cualquiera) y el intervalo (del 1 al 8, del 1 al 12, etc.). ¿Puedes decir cómo ganar siempre?

¿Cómo jugar si ahora el que llega a 100 es el que pierde?

¿Podrías encontrar alguna solución general para ganar siempre al decir el último número? ¿Y para ganar forzando a que el otro diga el último número?

Solución

Primero se estudia el juego que consiste en llegar exactamente a un número N , diciendo alternativamente un número elegido entre 1 y a .

Hay que distinguir dos casos: que N no sea divisible entre $a + 1$ ó que N sea divisible entre $a + 1$.

Si N no es divisible entre $a + 1$, gana siempre el que habla en primer lugar, si comienza diciendo el resto de la división $N:(a + 1)$, y en sus siguientes turnos el número que, con el dicho por el otro jugador, sume $a + 1$.

En el caso propuesto de llegar a 100, diciendo un número comprendido entre 1 y 10, debe iniciar el juego con el 1 (resto de $100:11$), y luego irá diciendo el número necesario para llegar a 12, 23, 34, ..., 89, 100.

Si N es divisible entre $a + 1$, gana siempre el que habla en segundo lugar, haciendo suya la estrategia descrita antes para el jugador primero.

Por ejemplo, si el juego fuera llegar a 80 diciendo números comprendidos entre 1 y 7, el segundo jugador debería decir el número que le llevara a sumar 8, 15, 24, ..., 72, 80.

Si el juego se plantea de forma que el perdedor sea el que llega a N , puede convertirse en el anterior si los jugadores piensan que gana el que llega a $N - 1$.

Problema 2. NÚMEROS INVERTIDOS

Estudia el conjunto de números que tienen la propiedad de que al ser multiplicados por 9 invierten el orden de sus dígitos.

Cuando hayas encontrado la ley que forma este conjunto, trata de hallar los números cuyos dígitos se invierten al multiplicar por 4.

Solución

Caso del 9:

Los números que buscamos deben empezar por 1, pues si empiezan por 2, 3, ... ,al multiplicarlos por 9, aumentará el número de cifras.

Si empiezan por 1, deben terminar en 9 para que al multiplicarlo por 9, se obtenga 1.

* De tres cifras no hay, pues

$$\underline{1} \underline{a} \underline{9} \times 9 = \underline{9} \underline{a} \underline{1} \Rightarrow (100 + 10a + 9) \times 9 = 900 + 10a + 1 \Rightarrow 10a + 8 = 0,$$

que no tiene solución, al ser a un dígito.

* De cuatro cifras:

$$\underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{9} \times 9 = \underline{9} \underline{b} \underline{a} \underline{1} \Rightarrow (1000 + 100b + 10a + 1) \times 9 = 89a - b + 8 = 0$$

$$\text{Entonces: } b = 89a + 8 \Rightarrow a = 0, b = 8 \text{ es la única solución.}$$

El número será 1.089.

* De cinco cifras, lo escribimos en la forma $\underline{1} \underline{0} \underline{a} \underline{8} \underline{9}$, y razonando de forma análoga, se obtiene $a = 9$.

Solución: 10.989.

La ley de formación es: los números empiezan por 10, terminan en 89 y en medio “nueves”: 109.989, 1.099.989, etc.

Caso del 4:

La cifra de mayor orden sólo puede ser 1 ó 2, porque si fuera otra diferente el producto tendría una cifra más que el multiplicando. Y tampoco puede ser 1 porque el resultado de multiplicar 4 por un número no puede acabar en 1. Es decir, los números buscados, cuando existan, empezarán por 2. Si empiezan por 2, deben terminar en 3 ó en 8, para que al multiplicarlo por 4 se obtenga 2.

* De dos cifras:

$$4 \times \underline{2} \underline{b} = \underline{b} \underline{2} \Rightarrow 4(20 + b) = 10b + 2 \Rightarrow b = 13. \text{ Imposible.}$$

* De tres cifras:

$$4 \times \underline{2} \underline{b} \underline{c} = \underline{c} \underline{b} \underline{2}$$

$$4(200 + 10b + c) = 100c + 10b + 2 \Rightarrow b = \frac{16c - 132}{5}, \text{ que no tiene solu-}$$

ciones naturales, por lo que no existe ninguno.

* De cuatro cifras:

$$4 \times \underline{2} \underline{b} \underline{c} \underline{3} = \underline{3} \underline{c} \underline{b} \underline{2} \quad \text{Imposible}$$

$$4 \times \underline{2} \underline{b} \underline{c} \underline{8} = \underline{8} \underline{c} \underline{b} \underline{2}$$

$$4(2.000 + 100b + 10c + 8) = 8.000 + 100c + 10b + 2 \Rightarrow b = \frac{2c - 1}{13}$$

Resulta $c = 7, b = 1$.

El único número de cuatro cifras es el 2.178.

* De cinco cifras:

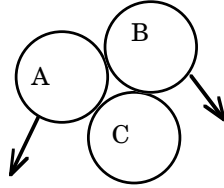
Por el mismo procedimiento se encuentra la única solución, que es el número 21.978.

Y se intuye la ley de formación para los casos de más cifras: empiezan por 21, acaban en 78 y en medio “nueves”:

$$219.978, 2.199.978, \dots, 219 \dots 978.$$

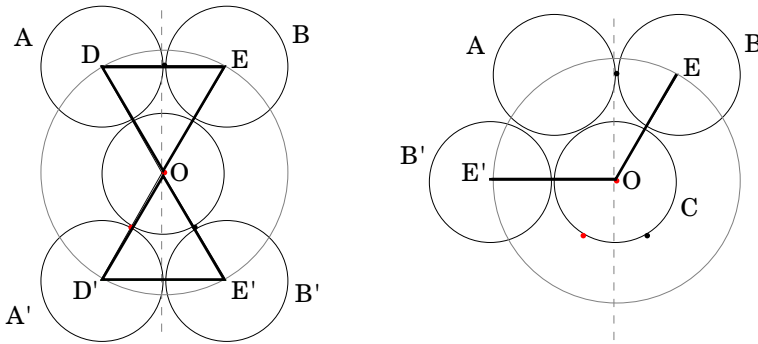
Problema 3. CIRCUNFERENCIAS RODANTES

Tenemos tres circunferencias iguales de radio 2 metros, que se están tocando como nos indica la figura.



Movemos las circunferencias A y B alrededor de C, sin despegarlas, hasta que vuelven a tocarse. ¿Sabrías decir cuántos metros ha recorrido el centro de la circunferencia A? ¿Y si únicamente se mueve B?

Solución



Los triángulos ODE y OD'E' son equiláteros; sus ángulos son, por tanto, de 60°.

El punto D (1ª figura), centro de la circunferencia A, ha recorrido un arco DD' de 120° de una circunferencia de 4 m de radio, por lo que ha recorrido:

$$\frac{2\pi r}{3} = \frac{8\pi}{3} \cong 8,38 \text{ m.}$$

Si suponemos que sólo se mueve la circunferencia B (2ª figura), entonces su centro E recorre un arco EE' de 240° de una circunferencia de 4 m de radio, es decir, recorre el doble que D en el caso anterior: $\frac{16\pi}{3} \cong 16,76 \text{ m}$, mientras que el centro de la circunferencia A permanece inmóvil.

CICLO 14-16

Problema 1. ESCALERA MECÁNICA

La escalera mecánica de unos grandes almacenes se pone en marcha al tiempo que Luis y su hijo Antonio comienzan a bajar por ella. Luis baja esca-

lones a doble velocidad que lo hace su hijo y llega abajo en primer lugar. Ha tenido que bajar por su pie 27 escalones en total, mientras que Antonio únicamente ha bajado por su propio pie un total de 18 escalones.

Cuando la escalera se pare, ¿cuántos escalones tendrá a la vista?

Solución

Luis baja por su pie 27 escalones. Mientras él baja un escalón, el artilugio mecánico le baja a escalones; en total ha bajado un número de escalones igual a $27 + 27a$.

Antonio baja por su pie 18 escalones. Como lo hace a mitad de velocidad que Luis, mientras él baja uno, el artilugio le baja $2a$; en total ha descendido $18 + 36a$.

El número de escalones totales o visibles es el mismo para ambos:

$$27 + 27a = 18 + 36a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Por tanto, el número total de escalones visibles es $27 + 27 = 54$.

Problema 2. EL HOTEL DE LOS LÍOS

Un hotel tiene infinitas puertas numeradas así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Todas ellas están abiertas. Pero llega alguien y comenzando desde el principio las cierra ordenadamente de 2 en 2, la 2, la 4, la 6, etc. Contento de su hazaña se va a dormir. Pero otro viene después que decide cambiar la posición de las puertas de 3 en 3; empieza también por el principio y, yendo de 3 en 3, la que está abierta la cierra y la que está cerrada la abre. Divertido también por lo que ha hecho, se va a dormir.

Sin embargo, otro viene después y, comenzando también desde el principio, va cambiando las puertas de 4 en 4, de manera que la que está abierta la cierra y la que está cerrada la abre. Cuando termina, viene otro que altera la posición de las puertas de 5 en 5; abre las cerradas y cierra las abiertas. Y luego otro que hace lo propio, pero de 6 en 6. Y luego otro de 7 en 7. Y así hasta el infinito, porque en el hotel había infinitos bromistas.

Tú, que eres el conserje del hotel, estás durmiendo tan tranquilo y no te has enterado de todos estos líos. ¿Qué puertas crees que estarán abiertas y qué puertas estarán cerradas cuando te despiertes por la mañana?

Solución

Cada puerta cambia una vez de posición por cada uno de los divisores de su número distintos de la unidad. Así a la puerta número 8 le cambian de posición el bromista que va de 2 en 2, el que va de 4 en 4 y el que va de 8 en 8.

La posición final dependerá de que el número de divisores distintos de 1 sea par o impar.

Las puertas correspondientes a cuadrados perfectos (1, 4, 9, 16, ...), estarán abiertas porque el número de sus divisores distintos de la unidad es par, mientras que las restantes puertas estarán cerradas, porque el número de sus divisores distintos de 1 es impar.

Problema 3. LA ALFOMBRA

Tres hermanas heredan una alfombra cuadrada de gran valor material y sentimental, por ser un recuerdo de familia. Como ninguna de ellas quiere quedarse sin alfombra, se proponen cortarla y obtener tres alfombritas. ¿Cómo han de cortar la alfombra para conseguir sus propósitos?

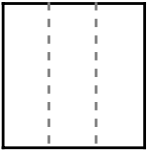
Piensa en distintos niveles de solución:

1. Que las tres alfombras sean iguales.
2. Que sean cuadradas.
3. Que sean iguales y cuadradas.
4. ¿Y si fuesen 5 hermanas? ¿Y si fuesen 7 u otro número de hermanas?

nas?

Solución

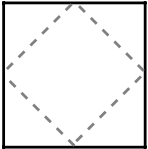
1.



Para dividir la alfombra en tres partes iguales se corta por las líneas de puntos, obtenidas trazando paralelas a un lado por los puntos que dividen al lado contiguo en tres segmentos iguales.

Hay otras muchas formas de dividirlo en tres partes iguales.

2.

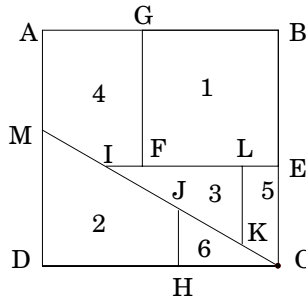


Para dividirla en tres cuadrados se hacen los cortes por los puntos medios de los lados (líneas de puntos), obteniéndose un cuadrado y 4 triángulos rectángulos isósceles.

Cada dos de estos triángulos forman un cuadrado.

3. La división en tres cuadrados iguales es más complicada.

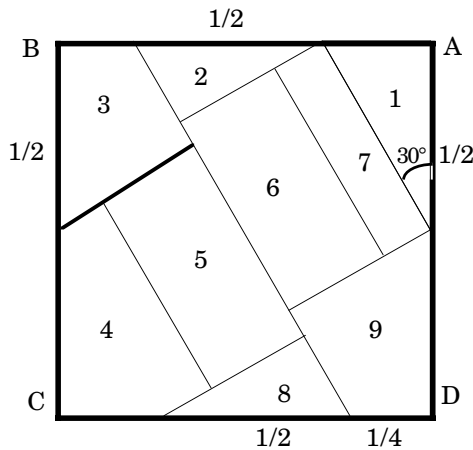
Este tipo de problemas ha despertado durante mucho tiempo gran interés entre numerosos geómetras, que han rivalizado en resolverlos con el mínimo número de piezas. Damos la solución debida a Henry Ernest Dudeney:



Supongamos el cuadrado ABCD de lado unidad y, por tanto, de área unidad. Cada uno de los cuadrados pedidos tendrá de área $\frac{1}{3}$, y de lado $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

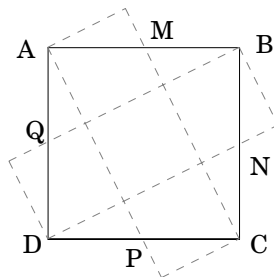
- * Se traza CM formando un ángulo de 30° con CD, resultando $MD = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- * Se toma $BE = DM$ y se construye el cuadrado BEFG (1), que será uno de los pedidos.
- * Se toma $DH = DM$ y se levanta la perpendicular HJ a DC por H, resultando las figuras 2 y 6.
- * Se prolonga EF hasta cortar en I a MC y se toma $IK = MJ$; se traza KL, perpendicular a EF, resultando las figuras 3 y 5.
- * Con 2 y 3 formamos el segundo cuadrado.
- * Con 4, 5 y 6 formamos el tercer cuadrado.

Damos una segunda forma que nos ha sido comunicada por D. Manuel Sanz Ledesma, Catedrático de Griego del I.E.S. “Hernández Pacheco” de Cáceres.



3-4-8 forman un cuadrado; 5-6 otro y 1-2-7-9 el tercero.

4.



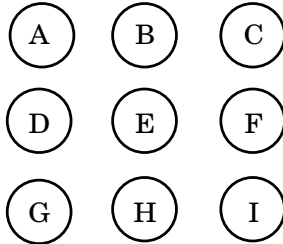
Siendo M, N, P, Q los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD, es fácil ver cómo han de ser los cortes y la reunión de las figuras resultantes para obtener los cinco cuadrados.

Nota. Hay que tener en cuenta que no existe un procedimiento general para resolver este tipo de problemas, por lo que suelen conseguirse las divisiones adecuadas a base de mucha intuición y mucha creatividad, y sin necesidad de conocimientos profundos de geometría.

CASTILLA Y LEÓN 1999 FASE PROVINCIAL DE BURGOS

Problema 1

Las letras situadas dentro de cada círculo representan a los números del 1 al 9.



Se sabe que:

- a) $C^2 = I$
- b) $D \times F = E$
- c) A, E, I son números consecutivos.
- d) La suma de la columna de la izquierda (A, D, G) es mayor que la de otra columna o fila.

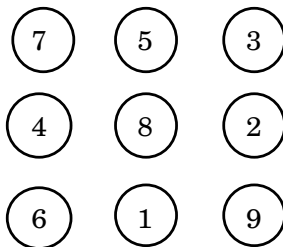
¿Qué número representa cada letra?

Solución

Después de analizar las igualdades $C^2 = I$ y $D \times F = E$, y que los cuadrados perfectos menores o iguales que 9 son 4 y 9, se llega a que $C = 3$ e $I = 9$, y o bien $D = 2, F = 4, E = 8$, o bien $D = 4, F = 2, E = 8$.

En el primer caso A debe valer 7, por ser anterior a E, y G vale como máximo 6, y la suma $A + D + G = 15$ es menor que la suma $C + F + I = 16$, en contra del enunciado. Por lo tanto, esa solución no es válida.

En el segundo caso G debe valer 6 y para que la suma $A + D + G$ sea mayor que la suma de cualquier fila o columna debe ser $H = 1$ y $B = 5$. La solución sería:



Problema 2

Juan compró una estantería con nueve casillas para colocar sus videojuegos y los colocó como en la figura.

6	9	6
9		9
6	9	6

Pasados unos días se dio cuenta de un detalle curioso: todos los bordes verticales u horizontales sumaban 21 videojuegos.

Pensó entonces: *puedo saber si están todos los videos en la estantería sin que me falte alguno, si al sumar los bordes obtengo siempre 21 videojuegos.*

Un día advirtió que alguien había revuelto algo sus videos y que no estaban como siempre, pero se quedó tranquilo porque al sumar los bordes también obtuvo los 21 videos de otras veces.

¿Podía seguir tranquilo o alguien le quitó algún video sin que se diera cuenta? ¿Por qué?

Solución

Como se verá a continuación, hay múltiples colocaciones en las que se mantiene la suma de 21 en los bordes y siendo el número total inferior a 60.

Hacemos la descomposición de 21 en suma de tres sumandos, dos iguales, y tal que cuatro veces la suma de uno de los sumandos iguales y el desigual sea menor que 60, que es el total de videos que tiene.

Así las posibles soluciones son:

7	7	7	8	5	8	9	3	9	10	1	10
7		7	5		5	3		3	1		1
7	7	7	8	5	8	9	3	9	10	1	10

que suman 56, 52, 48 y 44, respectivamente.

De no estar colocados como en el enunciado, es decir, con los vértices ocupados por un mismo número, se podrían dar muchos casos.

De todas las formas posibles el menor número de videojuegos que se pueden colocar es 42, de la siguiente forma:

x	0	y
0		0
y	0	x

Con la condición de que

$$x + y = 21$$

Problema 3

Para calcular las sumas indicadas que aparecen a continuación muchas personas lo hacen mediante una multiplicación de dos factores (uno de ellos puede ser decimal):

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 = \\
 * & 1 + 2 + 3 = \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 = \\
 * & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =
 \end{aligned}$$

a) Averigua cuáles son esos números en los casos propuestos, empezando por las líneas del asterisco.

b) Con la estrategia descubierta suma:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + \dots + 50 \\
 & 1 + 2 + 3 + \dots + 200 \\
 & 1 + 2 + 3 + \dots + n
 \end{aligned}$$

Solución

a) Las sumas señaladas con los asteriscos valen:

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2 \qquad \text{y} \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 5 \times 3$$

que hemos descompuesto en un producto de dos factores, siendo el primero igual a la cantidad de sumandos y el segundo igual a la semisuma de los sumandos extremos.

En los restantes:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &= 2 \times \frac{3}{2} = 3 \\
 1 + 2 + 3 + 4 &= 4 \times \frac{5}{2} = 10 \\
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &= 6 \times \frac{7}{2} = 21
 \end{aligned}$$

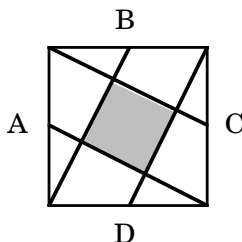
b) Aplicando la estrategia anterior, las sumas pedidas valen:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + 50 &= 50 \times \frac{51}{2} = 1275 \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 200 &= 200 \times \frac{201}{2} = 20100
 \end{aligned}$$

En general: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

Problema 4

Tenemos un cuadrado de lado 10 cm.



Calcula el área sombreada de la figura, donde A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrado. Explica lo que haces, porque la respuesta sola no nos sirve.

Resuelto en CASTILLA Y LEÓN 1998, Fase provincial de Salamanca, problema 3.

FASE PROVINCIAL DE LEÓN

Problema 1. EL N.I.F.

Desde hace años es habitual que en algunos documentos, en vez de pedirnos el D.N.I., nos pidan el N.I.F., el cual se obtiene añadiendo una letra al D.N.I.

Hacienda, que es quien suele utilizar el N.I.F., asigna la letra de la siguiente forma: Divide el D.N.I. entre 23 (que es un número primo). Los posibles restos van de 0 a 22. Asigna a cada resto una letra de la siguiente forma:

0: T	5: M	10: X	15: S	20: C
1: R	6: V	11: B	16: Q	21: K
2: W	7: F	12: N	17: V	22: E
3: A	8: P	13: J	18: H	
4: G	9: D	14: Z	19: L	

Al Señor Pérez se le cayó la tarjeta al agua y se borraron algunos números, por lo que su N.I.F. quedó: 97865__ P.

El Señor Pérez, muy aficionado a las matemáticas, recuerda que su N.I.F. no tiene ningún número repetido. ¿Puedes ayudarlo a conseguir los números borrados?

Solución

Si en el N.I.F. del Sr. Pérez prescindimos de las dos últimas cifras, es decir, de las desconocidas, el número resultante 97.865 es múltiplo de 23, pues $97.865 = 23 \times 4.255$, por lo que el número formado por las dos últimas cifras será múltiplo de 23 más 8, puesto que a la letra P le corresponde el 8.

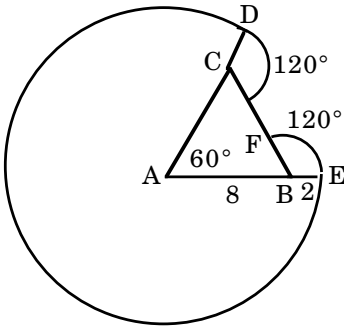
De todos los números de dos cifras distintas entre sí y distintas a las ya utilizadas que sean múltiplos de 23 más 8, el único posible es el 31.
 Por tanto el N.I.F. es 9786531 P.

Problema 2

Una cabra está atada a un poste situado en el vértice de un triángulo equilátero de lado 8 m. La longitud de la cuerda es 10 m. ¿Cuál es la superficie máxima que puede pastar?

Nota: el triángulo es una casa, el prado es lo exterior.

Solución



Sea A el vértice donde está el poste.
 La superficie del prado en la que puede pastar está formada por un sector circular de radio 10 m y amplitud 300°, más dos sectores circulares de radio 2 m y amplitud 120°.

Sector circular de radio 10 m y amplitud 300°:

$$A_1 = \frac{300 \cdot \pi \cdot 100}{360} \cong 261,80 \text{ m}^2$$

Sector de radio 2 cm y amplitud 120°: $A_3 = \frac{120 \cdot \pi \cdot 4}{360} \cong 4,19 \text{ m}^2$

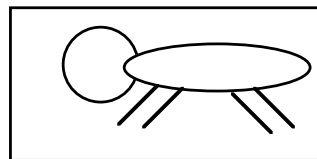
El área máxima es: $A = 261,80 + 8,38 = 270,18 \text{ m}^2$

Problema 3. FOTOCOPIAS

a) A continuación hay dos leones. El segundo es una fotocopia ampliada al 200 % del primero. Si el área del primer león es 6 cm², ¿cuál es el área del segundo?



ORIGINAL



FOTOCOPIA

b) Deseamos hacer una fotocopia de un rectángulo, de forma que el área del rectángulo fotocopiado sea el doble. ¿A qué porcentaje hay que poner la fotocopiadora? Razona el resultado. ¿Y si queremos que sea la mitad?

Solución

a) La razón de semejanza es 2; por tanto la razón de las áreas es 4.

El área del segundo león será $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$.

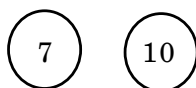
b) Para que el área sea el doble, la razón de semejanza debe ser $\sqrt{2}$, aproximadamente el 141,4 %.

Por la misma razón, para que el área sea la mitad, la razón debe ser $\sqrt{\frac{1}{2}}$, aproximadamente 71 %.

FASE PROVINCIAL DE SALAMANCA

Problema 1. LOS DISCOS

Tienes dos discos circulares:



En la cara superior de cada uno ellos están escritos los números 7 y 10, respectivamente.

Si lanzamos los dos discos al aire y sumamos los números que salen, podemos obtener estos cuatro resultados: 11, 12, 16 y 17.

Investiga qué números están escritos en la cara oculta de cada disco.

Solución

De las cuatro sumas, la que vale 17 se obtiene sumando las dos caras del enunciado.

Las restantes salen si el disco que tiene en una cara el 7, en la otra tiene un 6, y la del 10 un 5, siendo entonces:

$$7 + 5 = 12, \quad 10 + 6 = 16, \quad 5 + 6 = 11$$

Problema 2. LOS NÚMEROS ESCONDIDOS

Sustituye cada letra por la cifra que le corresponda:

$$\begin{array}{r} A \times HA = UHA \\ + \quad - \quad + \\ UF \times UH = UHF \\ || \quad || \quad || \\ UA \times UE = HIA - AF \end{array}$$

Solución

De la primera igualdad, $A \times HA = UHA$, A debe valer 1, 5 ó 6.

Si $A = 1$, al ser $1 \times H1 = UH1$, U sería cero, y lo desechamos por no considerar números de tres cifras aquellos que empiezan por cero.

Si $A = 6$, no hay producto posible de la forma $6 \times H6 = UH6$.

Por tanto $A = 5$.

En este caso H puede ser 2 ó 7.

Si $H = 7$, como $5 \times 75 = 375$, resulta $U = 3$.

De ser $A + UF = UA \Rightarrow 5 + 3F = 35 \Rightarrow F = 0$

y se debe cumplir que $UF \times UH = UHF \Rightarrow 30 \times 37 = 1.110$, y no vale por ser un número de cuatro cifras.

Por lo tanto $H = 2$.

En este caso, de ser $A \times HA = UHA \Rightarrow 5 \times 25 = 125$, será $U = 1$.

Y de ser $A + UF = UA \Rightarrow 5 + 1F = 15$, resulta $F = 0$

Debe ser $HA - UH = UE \Rightarrow 25 - 12 = 1E$, resulta $E = 3$.

Se verifica que $UF \times UH = UHF \Rightarrow 10 \times 12 = 120$.

En la última fila $UA \times UE = HIA - AF \Rightarrow 15 \times 13 = 195 = 2I5 - 50$, por lo que $I = 4$.

Por último, se debería verificar también la última columna y se ve que no es así:

$$UHA + UHF = HIA - AF \Rightarrow 125 + 120 = 245 \neq 245 - 50$$

Por tanto el problema no tiene solución.

Problema 3. LAS PRINCESITAS Y LA CUERDA

Cuenta una vieja leyenda que suena a distinto, aunque no respondemos de su veracidad, que cuatro princesitas pretendían al hijo de un fabricante de cuerdas. Para elegir la más competente, el padre le dio a cada una de ellas una cuerda de 24 metros de longitud y les dijo que construyeran con esa cuerda un polígono regular de mayor área posible. Los polígonos que construyeron fueron de 3, 4, 6 y 8 lados.

¿Sabrías decirnos quién fue la afortunada princesita?

Solución

Las áreas son las siguientes:

Del triángulo equilátero: $24:3 = 8$ m de lado.

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{64 \sqrt{3}}{4} = 16 \sqrt{3} \cong 27,71 \text{ m}^2$$

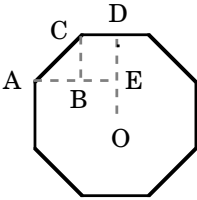
Del cuadrado: $24:4 = 6$ m de lado.

$$A = 1^2 = 36 \text{ m}^2$$

Del hexágono: $24:6 = 4 \text{ m}$ de lado y apotema: $a = \frac{1\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$$A = 12 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ m}^2 \cong 41,57 \text{ m}^2$$

Del octógono: $24:8 = 3 \text{ m}$ de lado.



La apotema $OD = OE + ED = OE + BC$.
 OE es la mitad del lado.
 BC se calcula en el triángulo rectángulo isósceles ABC , cuya hipotenusa $AC = 3$.

Resulta $BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Entonces: $OD = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{2}$

El área valdrá: $12 \frac{3(1+\sqrt{2})}{2} = 18(1+\sqrt{2}) \cong 43,46 \text{ m}^2$

La más afortunada fue la que construyó el octógono.

NOTA: Pappus de Alejandría, insigne geómetra del siglo IV, demostró que de los polígonos regulares con el mismo perímetro, tiene mayor área el que tenga mayor número de lados, y que el círculo tiene un área mayor, para un perímetro dado, que cualquier polígono regular.

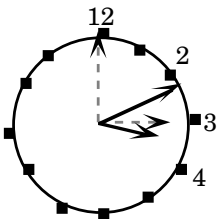
Problema 4. LA HORA DE PENSAR

Seguro que has mirado montones de veces la esfera de tu reloj; por eso hoy no te va a resultar difícil responder a estas cuestiones:

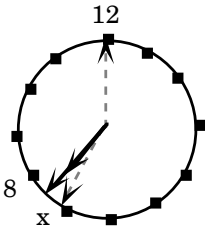
¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj a las 3 horas 12 minutos?

En cada hora, la manecilla del minuterero coincide con la del horario en algún punto de la esfera del reloj. Sabiendo que las manecillas coinciden y que la hora es entre las 7 y las 8, ¿qué hora es?

Solución



Partiendo de las 3 horas y teniendo en cuenta que en 60 minutos la aguja horaria recorre un ángulo de 30° y la minuterera 360° , en 12 minutos habrán recorrido 6° y 72° , respectivamente; por tanto el ángulo que forman ambas agujas es de $90^\circ - 72^\circ + 6^\circ = 24^\circ$.



Partiendo de las 7 horas, la aguja horario recorre un ángulo x y la minuterero de $210^\circ + x$.

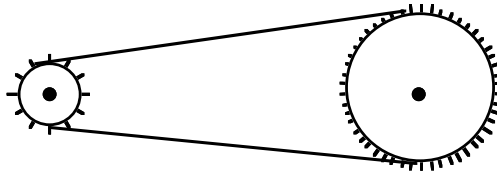
Estableciendo la proporcionalidad:

$$\frac{30}{360} = \frac{x}{210 + x} \Rightarrow x = \frac{210}{11} \text{ grados}$$

que corresponde a un tiempo aproximado de 38 min 10,91 seg.
Coinciden a las 7 h 38 min 10,91 seg.

FASE PROVINCIAL DE SORIA

Problema 1. BICICLETA



Como casi todo el mundo sabe, una bicicleta es una máquina que transmite el movimiento mediante dos ruedas dentadas unidas por una cadena. La mayor de estas ruedas recibe el nombre de *plato* o *catalina* y es la que está unida directamente a los pedales. La rueda menor recibe el nombre de *piñón* y se sitúa en el eje de la rueda trasera.

Supongamos que tenemos una bicicleta que tiene un *plato* de 54 dientes y un *piñón* de 12 dientes. Además, para mejorar la aerodinámica, tiene la rueda delantera ligeramente más pequeña que la trasera, concretamente con un radio de 45 cm, mientras que la trasera tiene un radio de 55 cm.

En estas condiciones, cuando un ciclista da una pedalada completa, ¿qué distancia avanza el punto más trasero de la rueda trasera? ¿Y el más delantero de la rueda delantera?

Solución

Por cada vuelta que da el *plato*, el *piñón*, y por tanto la rueda trasera, da $54 : 12 = 4,5$ vueltas.

Por tanto, la bicicleta avanza $4,5 \times 2\pi \times 55 = 495\pi$ cm.

Ahora bien, el punto más trasero de la rueda trasera avanza esta distancia más el diámetro, o sea $495\pi + 2 \times 55 \cong 1.665$ cm.

La rueda delantera avanza lo mismo que la bicicleta, 495π cm, y para ello tiene que dar un número de vueltas igual a $\frac{495\pi}{2\pi \times 45} = 5,5$. El punto más delantero de esta rueda avanza una distancia igual a lo que avanzó la bicicleta menos su diámetro, es decir: $495\pi - 2 \times 45 \cong 1.465$ cm.

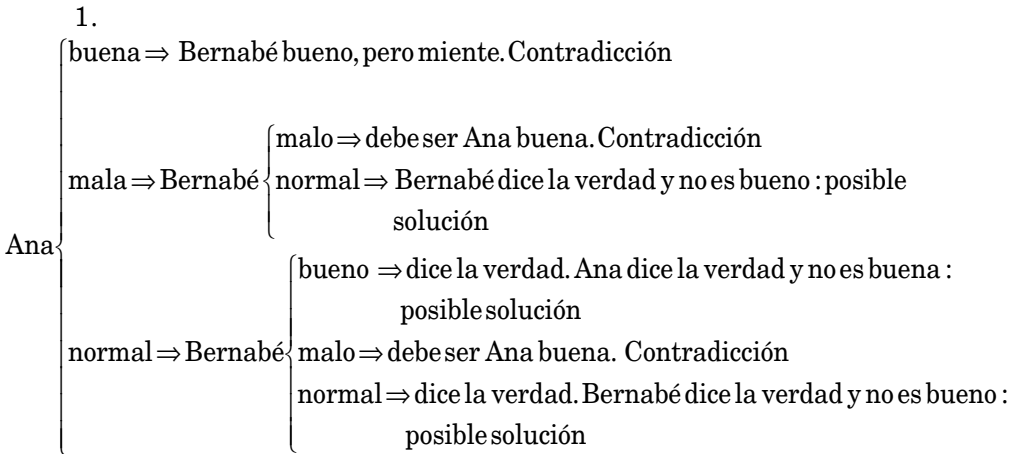
Problema 2. ACERTIJO LÓGICO

Raymond Smullyan, matemático de la City University of New York, es el responsable de estos acertijos lógicos con *Buenos* y *Malos*, y tal vez algunas personas más. En todos, el Bueno siempre dice la verdad y el Malo siempre miente. Y los Normales son los que no son ni buenos ni malos.

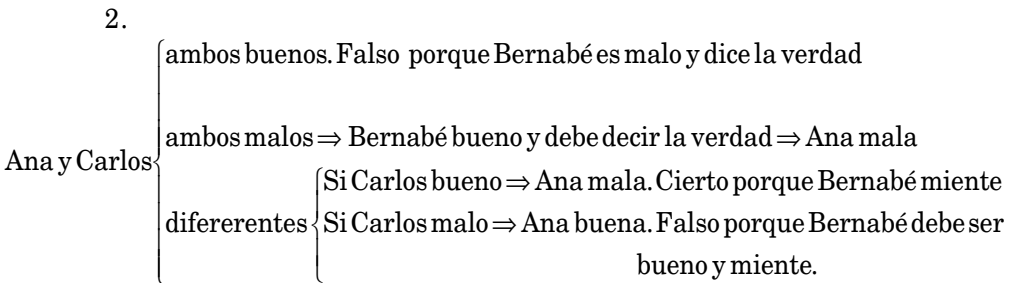
1. Ana dice: *Bernabé es bueno*, y Bernabé dice: *Ana no es buena*. Probar que uno dice la verdad pero no es bueno.

2. Carlos dice: *Bernabé es malo* y Bernabé dice: *Ana y Carlos son el mismo tipo* (ambos buenos o ambos malos). ¿Qué es Ana?

Solución



Efectivamente en todas las posibles soluciones, uno dice la verdad, pero no es bueno.



Ana es mala.

Problema 3. TRI ÁNGULO

Si la base de un triángulo aumenta un 10 % y la altura correspondiente disminuye un 10 %, ¿qué le ocurre al área?

Solución

Sean x e y la base y la altura del triángulo. Su área es $\frac{x \cdot y}{2}$

Si se aumenta en un 10 % la base, se convierte en: $x + \frac{10x}{100} = \frac{11x}{10}$

La altura disminuye un 10 % y se convierte en: $y - \frac{10y}{100} = \frac{9y}{10}$

El área del nuevo triángulo vale: $\frac{1}{2} \frac{11x}{10} \cdot \frac{9y}{10} = \frac{1}{2} \frac{99xy}{100}$

Ha disminuido el 1 %.

Problema 4. UNA DE EXÁMENES

Tres estudiantes, Antonio, Berta y Carlos, participan en una serie de exámenes. En cada prueba, el que queda primero recibe x puntos, el segundo recibe y puntos, el tercero z puntos, donde x, y, z son números enteros mayores que cero, tales que $x > y > z$. No hay empates.

En total Antonio acumuló 20 puntos, Berta 10 puntos y Carlos 9 puntos.

Antonio quedó el segundo en el examen de Álgebra. ¿Quién quedó segundo en el examen de Geometría?

Solución

Si entendemos que la primera nota de Álgebra (x) es la misma que la primera de Geometría (x), la segunda nota en ambas es y , y la tercera en ambas es z , el problema no tiene solución, pues en total hay 2 primeros, 2 segundos y 2 terceros: $2x + 2y + 2z$, que debe ser 39, y esto es imposible al ser x, y, z enteros y 39 impar.

En el examen de Geometría sólo puede quedar en segundo lugar Berta o Carlos.

Ver ejemplos:

Ejemplo 1

Antonio Berta Carlos

Álgebra	6	7	4
Geometría	14	3	5

Ejemplo 2

Antonio Berta Carlos

Álgebra	7	4	8
Geometría	13	6	1

Antonio no puede quedar segundo en Geometría, puesto que en Álgebra la máxima nota que puede sacar es 8, al sumar Berta entre los dos 10 puntos y Carlos sólo 9.

De lo anterior tenemos que la nota mínima que Antonio sacará en Geometría será 12, que por sí misma es mayor que la puntuación total obtenida por Berta y la obtenida por Carlos.

FASE PROVINCIAL DE VALLADOLID

Problema 1. MÁS ABURRIDO QUE UNA OSTRA

Santiago se aburre en el Instituto, tanto que le obsesiona el pensamiento de las horas de entrada y salida en el mismo: 8.15 y 14.45.

El otro día le preguntaron la hora hacia la mitad de la mañana y respondió: *Añadir al triple del tiempo que he pasado en el Insti el tercio del tiempo que todavía me falta por pasar.*

¿Cuánto tiempo le quedaba por pasar?

Solución

La duración de la jornada escolar es el tiempo que media entre la hora de entrada y la de salida: $14\text{ h }45\text{ min} - 8\text{ h }15\text{ min} = 6\text{ h }30\text{ min} = 6,5\text{ h}$.

Sea x el tiempo transcurrido en el Instituto.

Planteamos la ecuación: $3x + \frac{1}{3}(6,5 - x) = 8,25 + x$

donde se ha tenido en cuenta que en el enunciado dice que le preguntan “la hora”.

Resulta $x = 3,65\text{ h} = 3\text{ h }39\text{ min}$.

Por tanto, la solución es: $8\text{ h }15\text{ min} + 3\text{ h }39\text{ min} = 11\text{ h }54\text{ min}$.

Problema 2. AYUDA A LA DETECTIVE

Después de varios meses de trabajo, las investigaciones de la detective Silvia se centran en seis vecinos que viven en una urbanización, tres a un lado de la calle y los otros tres enfrente. Las pistas con las que cuenta son las siguientes:

1. La puerta azul está al lado del panadero y éste vive enfrente del Sr. Ramírez.

2. El Sr. Fernández vive en una esquina, enfrente de la puerta verde y está al lado de la del conductor de autobuses.

3. El Sr. García vive enfrente del policía y al lado del Sr. García.

4. El Sr. García vive al lado del profesor y al lado del Sr. Cuesta.

5. El médico vive en la misma acera que el policía.

6. El Sr. Vázquez vive al lado de la puerta negra.

7. El Sr. Serrano vive enfrente de la puerta amarilla.

8. El cartero tiene una puerta amarilla.

9. El policía vive al lado del conductor de autobús y su puerta es marrón.

10. El Sr. Ramírez vive enfrente de la puerta roja y al lado del médico.

Lo que Silvia necesita saber es:

a) ¿De qué color es la puerta del Sr. Vázquez?

b) ¿En qué trabaja la persona que vive en la casa de la puerta negra?

Solución

Analizando todas las pistas que nos da el problema, se llega a que, haciendo en la pista número 3, la corrección

El Sr. Cuesta vive enfrente del policía y al lado del Sr. García
 la colocación es:

1ª acera

Nombre	Sr. Fernández	Sr. García	Sr. Cuesta
Profesión	Cartero	Panadero	Profesor
Color	Amarilla	Roja	Azul

2ª acera

Nombre	Sr. Serrano	Sr. Ramírez	Sr. Vázquez
Profesión	Médico	Conductor	Policía
Color	Verde	Negra	Marrón

Las respuestas a las preguntas son:

- a) El color de la puerta del Sr. Vázquez es marrón.
- b) La persona que vive en la casa de la puerta negra trabaja de conductor de autobuses.

Problema 3. ¿MAGIA CON NÚMEROS?

Toma un número de tres cifras, repite a continuación el mismo número para formar un número de seis cifras. Ahora divídelo entre 7, el resultado del cociente lo dividimos ahora por 11 y el nuevo cociente lo volvemos a dividir por 13. En todos los casos las divisiones son exactas. ¿Magia?

Investiga este hecho y usa tu calculadora para realizar más rápidamente las operaciones.

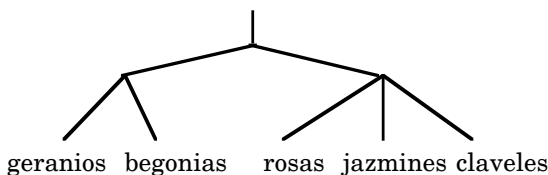
Solución

Sea el número ABC. Al repetir las tres cifras resulta el número ABCABC.
 $\underline{ABCABC} = \underline{ABC} \times 1.000 + \underline{ABC} = \underline{ABC} (1.000 + 1) = \underline{ABC} \times 1.001.$

Como $1.001 = 7 \times 11 \times 13$, lo que se ha hecho realmente es multiplicar y dividir por el mismo número.

Problema 4. EL JARDÍN

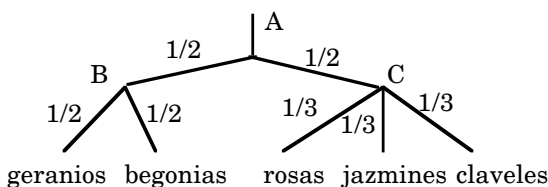
Un jardín está dividido en cinco zonas: la zona de las rosas, la de los claveles, la de los jazmines, la de los geranios y la de las begonias. A cada una de las zonas le llega agua por medio de un sistema de tuberías con una forma igual a la de la figura.



a) Si introducimos 100 litros de agua por el sistema de tuberías, ¿cuántos litros le llegarán a las rosas? ¿Y a los geranios?

b) A la jardinera que cuida este jardín se le ha caído un anillo dentro del sistema de tuberías. ¿En qué zona es más posible que esté el anillo?

Solución



a) El agua que llega a las rosas es $\frac{1}{3}$ de la que llega a C, que es $\frac{1}{2}$ de la que sale de A; por tanto $\frac{1}{6}$ de 100 litros; aproximadamente 16,6 litros.

A los geranios llegará $\frac{1}{2}$ de la que llega a B, que es $\frac{1}{2}$ de la que sale de A; por tanto $\frac{1}{4}$ de 100 litros, que son 25 litros.

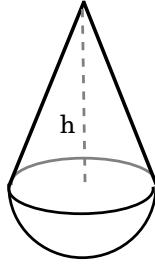
b) El anillo es más posible que llegue a los geranios o a las begonias, porque a cada uno de estos llegan 25 litros de agua, mientras que a cada uno de los otros sólo llegan 16 litros.

FASE PROVINCIAL DE ZAMORA

Problema 1

Disponemos de una pieza maciza constituida por un cono y una semiesfera unidos por sus respectivas bases, que son iguales. El radio de ambas es de 4 cm. Se sumerge la pieza en un recipiente graduado que contiene 510 cm^3 de agua, apreciándose una subida de la misma hasta los 711 cm^3 . Calcula la altura del cono que constituye la mencionada pieza.

Solución



El volumen de la pieza es igual a $711 - 510 = 201\text{cm}^3$, y debe ser igual a la suma de los volúmenes del cono y de la semiesfera, por lo que se verifica:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 4^3 + \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 h = 201 \Rightarrow h = \frac{603 - 128\pi}{16\pi} \cong 4 \text{ cm.}$$

Problema 2

En una urna tenemos 14 bolas, de las cuales 8 son negras y las restantes blancas. Sacamos una bola y posteriormente otra, sin reponer la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

Solución

Cada una de las 14 bolas disponibles en la primera extracción pueden combinarse con cada una de las 13 que quedan para la segunda, pues no se repone la bola extraída; entonces hay $14 \times 13 = 182$ casos posibles.

Cada una de las 6 bolas blancas que hay cuando se hace la primera extracción puede combinarse con cada una de las 5 bolas que quedan para la segunda; hay, por tanto, $6 \times 5 = 30$ casos favorables.

La probabilidad de que las dos bolas sean blancas es: $30/182 = 15/91$.

Problema 3

Disponemos de 105 monedas, euros, entre las cuales sabemos que hay tres falsas. Los euros auténticos pesan lo mismo y su peso es mayor que el de los falsos, que también pesan lo mismo. Hay que seleccionar 26 euros auténticos, pero sólo se nos permite realizar dos pesadas en una balanza de dos platos. ¿Podemos conseguirlo? Explica de qué manera.

Resuelto en CASTILLA Y LEÓN. Fase provincial. León. Pr. nº 1. 1998.

Problema 4

Un hombre cuya mujer está a punto de dar a luz, dispone en su testamento lo siguiente: “Si la criatura que va a nacer es niña, ésta se llevará $2/3$ de la herencia y $1/3$ la madre. Si es niño, éste se llevará $1/3$ de la herencia y $2/3$ la madre”.

El padre disponía para la herencia de 14 hermosas vacas. ¿Cómo tendrán que repartírselas entre los tres, si nacieron mellizos, niño y niña?

Solución

Siendo y la parte que corresponde a la madre, la niña recibirá $2y$, y el niño $\frac{y}{2}$.

Por tanto: $2y + y + \frac{y}{2} = 14 \Rightarrow y = 4$, que recibe la madre; el niño recibiría 2 y la niña 8.

FASE AUTONÓMICA

Problema 1. CERILLAS

Tenemos 48 cerillas colocadas en tres montones diferentes. No digo cuántas hay en cada uno, pero observar lo siguiente:

Si del primer montón paso al segundo tantas como hay en éste, luego del segundo paso al tercero tantas como hay en este tercero y, por último, del tercero paso al primero tantas cerillas como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillas en cada montón.

¿Cuántas cerillas había al principio en cada montón?

Solución

Sean x, y, z las cantidades de cerillas que hay en cada uno de los montones.

Los cambios que se hacen son los siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
 x & y & z \\
 x - y & 2y & \\
 & 2y - z & 2z \\
 2(x - y) & & 2z - (x - y)
 \end{array}$$

Y resultan iguales las cantidades en negrita. Se obtienen las igualdades:

$$\left. \begin{array}{l}
 x + y + z = 48 \\
 2y - z = 2(x - y) = 2z - (x - y)
 \end{array} \right\} \text{ Resulta: } x = 22, y = 14, z = 12.$$

Otra forma.

Podemos partir de la situación final, según el siguiente cuadro:

	<u>1º montón</u>	<u>2º montón</u>	<u>3º montón</u>
Final	16	16	16
Del 3ª al 1º se pasan 8	8	16	24
Del 2º al 3º se pasan 12	8	28	12
Del 1º al 2º se pasan 14	22	14	12

Problema 2. INVERSIONES

Sobre un tablero 3×3 se disponen 9 fichas por uno de sus lados y negras por el opuesto.

Está permitido realizar las siguientes manipulaciones sobre las fichas:

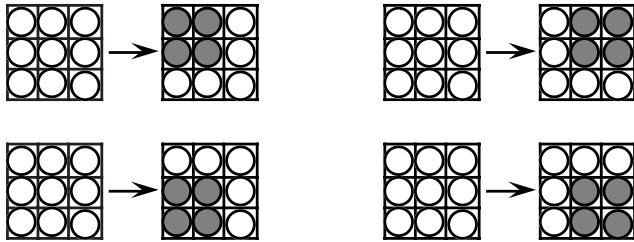
* Invertir simultáneamente las tres fichas de una de las filas exteriores:



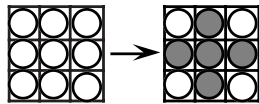
* Invertir simultáneamente las tres fichas de una de las columnas exteriores:



* Invertir simultáneamente las cuatro fichas que forman uno de los cuadrados:



* Invertir simultáneamente las cinco fichas en forma de cruz:



Realizando únicamente las operaciones permitidas y partiendo de las siguientes figuras, transformarlas con el mínimo número de pasos en:

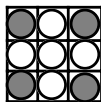


Figura 1

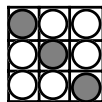


Figura 2

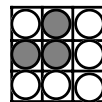


Figura 3

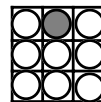


Figura 4

- a) Tableros con todas las fichas negras.
- b) Tableros con todas las fichas blancas.
- c) La figura 1 en las restantes figuras.

Se dice que el tablero A es equivalente a otro B cuando es posible transformar el tablero A en el B. Si un tablero A es equivalente a otro B ¿será B equivalente a A?

Se llama distancia entre dos tableros equivalentes al mínimo número de operaciones necesario para pasar del primero al segundo. ¿Existirán tableros equivalentes separados indefinidamente o habrá una distancia máxima? Si tenemos dos tableros con las fichas colocadas de cualquier manera, ¿qué condiciones deben cumplir para que sean equivalentes?

Solución

Los nueve movimientos posibles los denotaremos:

- Fs: invertir las fichas de la fila superior.
- Fi: invertir las fichas de la fila inferior.
- Ci: invertir las de la columna de la izquierda.
- Cd: invertir las de la columna derecha.
- Csi: invertir las del cuadrado 2×2 superior izquierdo.
- Csd: invertir las del cuadrado superior derecho.
- Cii: invertir las del cuadrado inferior izquierdo.
- Cid: invertir las del inferior derecho.
- C: invertir las de la cruz central.

a) Partimos de las figuras indicadas:

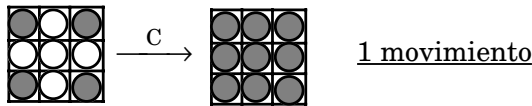


Figura 1

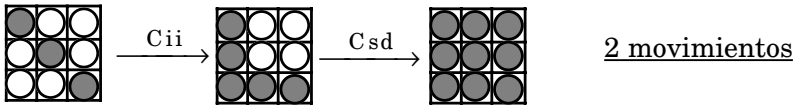


Figura 2

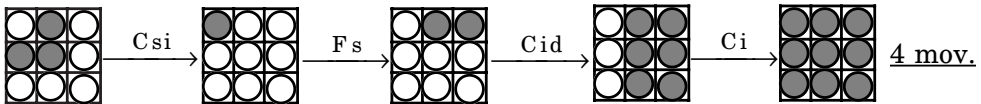


Figura 3

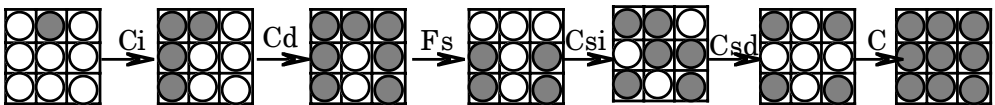


Figura 4

6 movimientos

b)

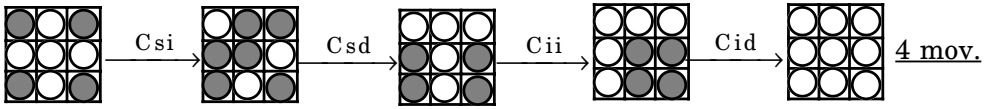


Figura 1

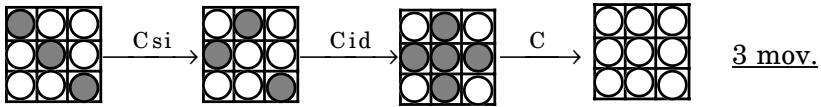


Figura 2

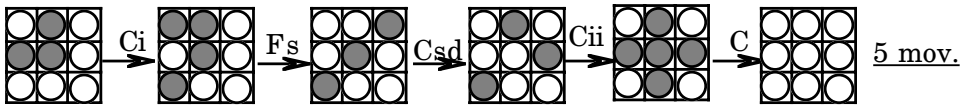


Figura 3

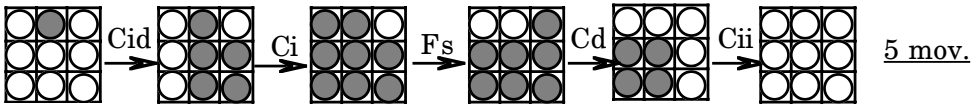
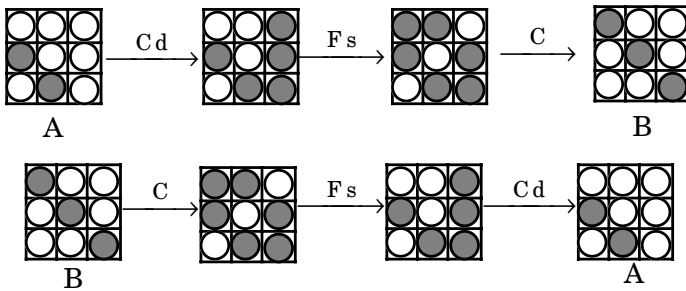


Figura 4

c) Si desde un tablero A se puede llegar a otro B mediante algunos movimientos, de B a A se llegará aplicando los movimientos en orden inverso.
 Por ejemplo:



Si A es equivalente a B, B lo es a A.

Como desde cada una de las cuatro figuras dadas se puede llegar a una con todas negras o todas blancas, desde éstas se podrá llegar a las otras.

Desde la figura 1 hasta las otras:

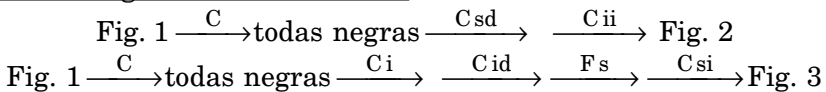
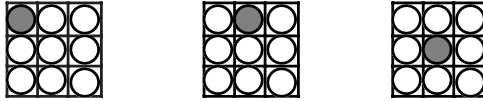


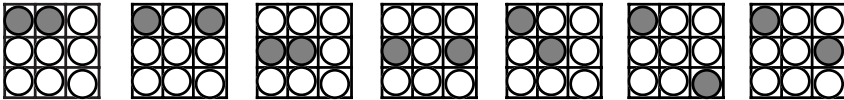
Fig. 1 \xrightarrow{Csd} \xrightarrow{Csi} \xrightarrow{Fs} \xrightarrow{Cd} \xrightarrow{Ci} Fig. 4

El número de tableros diferentes, teniendo en cuenta simetrías, giros, etc, no es muy grande.

Con una sola ficha negra:



Con 2 fichas negras:



Y así sucesivamente, los que tienen 3 negras, 4, etc.

Los que tienen 5 negras, por simetría coinciden en número con los que tienen 4 blancas.

Si desde cada uno de estos tableros es posible pasar a uno que tenga todas las fichas negras o todas blancas, desde estos se podrá llegar de forma inversa al primero; por tanto, dos tableros son siempre equivalentes.

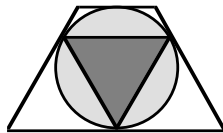
Problema 3. EL TALISMÁN DE AZARQUIEL

-- Oro, diamantes, zafiros,... Mi querido aprendiz de brujo. ¿Quién duda que las piedras y metales preciosos son portadores de propiedades mágicas que benefician al portador de sus secretos?

Aleccionaba Azarquiel a sus discípulos.

-- Pero escucha, Cefirel, para poner de manifiesto todo su poder es necesario conjuntarlos en preciosa armonía.

Observa esta filigrana de oro que el orfebre labró siguiendo mis instrucciones:



-- Maestro, tiene forma de trapecio isósceles.

-- Dices bien, pero te quedas corto en tus apreciaciones: no sólo sus lados laterales son iguales, sino que su base mayor es el triple de la menor; mas con todo, no son esas lo mejor de sus propiedades: sus medidas son tales que permiten engastar en su interior un círculo perfecto tangente a la vez a sus cuatro lados.

No todos los trapecios gozan de esta propiedad y en ésta reside el secreto del magnífico talismán que me propongo construir y que confiere prodigiosos poderes a aquel que lo porte sobre su pecho.

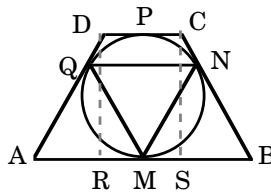
Atiende, Cefirel, un zafiro en forma de triángulo invertido debe ir engastado de manera que sus vértices coincidan con los puntos en los que el círculo es tangente a la base mayor y a los laterales del trapecio.

Las partes del círculo que quedan libres deben ir cubiertas de diamantes. Pero, ¡ay!, los diamantes son escasos y difíciles de conseguir. Para saber la cantidad justa que necesitare debo conocer la superficie exacta que han de cubrir.

Y aquí, Cefirel, es donde has de demostrar que eres digno de seguir aprendiendo mis secretos.

Responde, Cefirel, si el lado mayor del trapecio mide seis pulgadas. ¿cuál será la superficie que irá recubierta de diamantes?

Solución

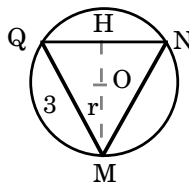


Por ser el trapecio circunscrito a la circunferencia, son iguales los pares de segmentos DP y DQ, CP y CN, BM y BN, AQ y AM, por ser segmentos de tangente trazadas desde un mismo punto, por lo que $DC + AB = AD + CB$; y como $AB = 6$ pulgadas, $DC = 2$, $AD = CB$, deducimos que $AD = CB = 4$. Por otra parte, $AR = 2$.

El triángulo ARD es rectángulo en R y la hipotenusa es doble de un cateto, por lo que el ángulo en A es de 60° y en consecuencia los triángulos AMQ, MQN y MNB son equiláteros, de lado 3 pulgadas.

Con todo esto la superficie recubierta de diamantes será el área del círculo menos la del triángulo.

$$\text{El área del triángulo es: } A_t = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cong 3,90 \text{ pulg}^2$$



Para calcular el área del círculo, primero averiguamos el radio que es, según la figura:

los $\frac{2}{3}$ de la altura, ya que ésta coincide con la mediana. En el triángulo MHQ:

$$MH = \sqrt{3^2 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}}, \text{ siendo el radio } \frac{2}{3} \sqrt{\frac{27}{4}} = \sqrt{3} \text{ pulg y el área del círculo:}$$

$$A_c = \pi r^2 = 3\pi \cong 9,42 \text{ pulg}^2$$

Por fin, la superficie recubierta de diamantes es aproximadamente:

$$9,42 - 3,90 = 55,52 \text{ pulg}^2$$

Problema 34. BALANZAS DE PRECISIÓN

Llevaba en la mano izquierda una copia de los planos de la próxima estación espacial.

El problema tiene que ver con el peso de las grapas de sujeción. Hemos de asegurarnos de que sean lo más livianas posible, porque habrá que transportarlas todas al espacio. Dieciocho fabricantes nos han presentado muestras de sus grapas, a razón de diez grapas idénticas por lote. Hemos de determinar cuál de las muestras presentadas está integrada por las grapas más ligeras.

Para determinar cuál es el tipo de grapa más ligera se dispone de ocho balanzas de dos platillos. Cada pesada de cada balanza permite comparar entre sí dos grapas.

El problema estriba en que el personal sólo puede utilizar las ocho balanzas durante treinta minutos. La preparación y limpieza del equipo exige quince minutos. Hacen falta después cuatro minutos para comparar debidamente en una balanza dos grapas diferentes. Así pues, solamente tenemos tiempo para efectuar tres tandas de comparaciones, con un minuto en medio para decidir qué grapas comparar en el siguiente ciclo.

¿Se podrá llevar a cabo la tarea y, en tal caso, cómo?

¿Cuál es el número máximo de diferentes fabricantes que se pueden tratar en la media hora disponible?

Solución

Sea a cada grapa del primer fabricante, b del segundo fabricante, y así sucesivamente, c, d, e, ...

En la primera tanda de comparación intervienen grapas de dos lotes diferentes en cada balanza, en total 16 lotes. Se eliminan los más pesados de cada balanza y quedan otros 8 más los 2 lotes que no han intervenido. En total quedan 10 lotes: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, para la segunda tanda de pesadas.

En ésta se comparan entre sí las muestras a, b, c de todas las formas posibles para determinar cuál es la más ligera, lo que exige el uso de tres balanzas. Lo mismo se hace con otras tres muestras, por ejemplo las d, e, f. Y las cuatro restantes se comparan entre sí de dos en dos, con el uso de dos balanzas.

Es decir, en la segunda tanda se emplean todas las balanzas para hacer las pesadas siguientes:

a con b	b con c	a con c	elimina 2 lotes
d con e	e con f	d con f	elimina 2 lotes
		g con h	elimina 1 lotes
		i con j	elimina 1 lote

Para la tercera tanda de pesadas quedan 4 lotes. Se pueden comparar todos entre sí usando sólo 6 balanzas. Y saldrá cuál es el lote más ligero.

COMUNIDAD VALENCIANA 1999
NIVEL A (2º de ESO)

Problema 1

Sobre una mesa hay cinco cartas:



Cada carta tiene en una cara un número natural, y en la otra una letra. Juan afirma: *Cualquier carta que tenga en una cara una vocal, tiene un número par en la otra cara.*

Pedro va a demostrar que Juan mentía dando la vuelta a una carta. ¿De cuál de las cinco se trata? Justifica razonadamente tu respuesta.

Solución

Pedro dará la vuelta a la carta que tiene el 3, ya que si por el otro lado tuviera una vocal, sería un contraejemplo que demostraría la falsedad del enunciado “vocal \Rightarrow par” formulado por Juan.

Si Pedro diera la vuelta a la carta P o a la Q, no demostraría nada, puesto que el “teorema” de Juan no se refiere a las cartas que tienen una consonante.

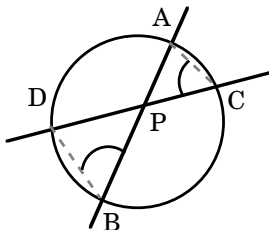
Y si diera la vuelta a la carta 4 ó a la 6, tampoco demostraría la falsedad, ya que si tuviera vocal, sí se cumpliría, y si tuviera consonante, estaríamos en la misma situación anterior de P o Q.

Este problema presenta una buena oportunidad para insistir en lo siguiente: que mientras el contraejemplo referido en el párrafo primero es suficiente para demostrar la falsedad, los posibles ejemplos favorables del párrafo tercero, vocal \Rightarrow 4 ó vocal \Rightarrow 6, no son suficientes para demostrar la verdad del “teorema”.

Problema 2

Se dibujan dos rectas secantes a una circunferencia, cortándose ambas rectas en un punto P interior a la circunferencia. La primera corta a la circunferencia en A y B, siendo AP = 4 cm y BP = 6 cm. La segunda recta corta a la circunferencia en los puntos C y D, siendo CP = 3 cm. ¿Cuánto medirá DP?

Solución



Trazando los segmentos AC y BD se forman los triángulos PAC y PBD, que tienen iguales los ángulos en P, por ser opuestos por el vértice, y los ángulos en C y B, por ser inscritos y abarcar el mismo arco AD.

Si tienen dos ángulos respectivamente iguales, los terceros ángulos también lo serán, y los dos triángulos serán semejantes; entonces sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow \frac{4}{PD} = \frac{3}{6} \Rightarrow PD = 8 \text{ cm.}$$

Este resultado puede generalizarse: si desde un punto P se traza una secante a una circunferencia, y son A y A' los puntos de intersección, el producto $PA \cdot PA'$ es constante, cualquiera que sea la secante trazada.

Problema 3

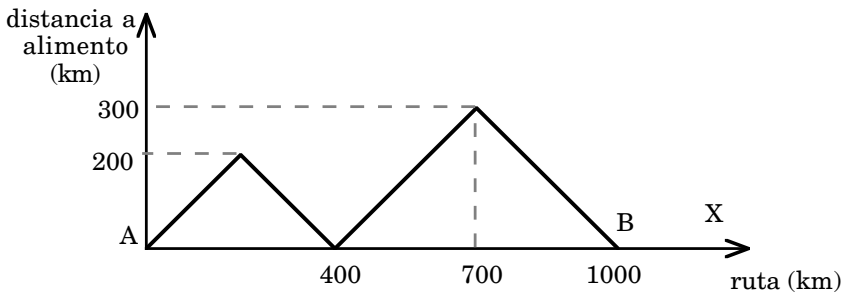
Las palomas de la especie Pupilicci emigran de la zona A a la zona B. La distancia entre ambas zonas es de 1.000 km. Suponemos que la zona A de partida corresponde al km cero de la ruta y la zona B de destino al km 1.000 de la ruta. Al principio y al final de la ruta encuentran distintas fuentes de alimentación, pero a lo largo de la ruta las palomas sólo encuentran alimento en el km 400.

a) Obtén y representa gráficamente la función que describe la distancia del km X de la ruta a la fuente de alimentación más próxima.

b) ¿En qué punto del recorrido se llega a la máxima distancia a una fuente de alimentación?

Solución

a) La gráfica es la siguiente:



Al iniciar la emigración se van alejando del alimento de A mientras se aproximan al que hay en la ruta. Cuando llevan recorridos 200 km están a igual distancia de ambos y, a partir de ese punto, la distancia al segundo es menor que al primero.

Después de comer en éste, continúan el viaje alejándose de él y aproximándose a B. Cuando están a 300 km del final, se encuentran a esa distancia de ambos puntos y, a partir de ahí, estarán más cerca de B, hasta llegar a él.

b) Tal como se pone de manifiesto en la gráfica, la distancia al alimento tiene su máximo cuando el valor de X es 700, y ese máximo es de 300 km.

Problema 4

Alex piensa tres números. Si los agrupa de dos en dos y los suma, obtiene 38, 44 y 52. ¿Cuáles son esos números?

Solución

Si llamamos a, b, c a los tres números, se verifica:

$$\left. \begin{array}{r} a + b = 38 \\ b + c = 44 \\ a + c = 52 \end{array} \right\} \text{ de donde resulta: } a = 23, b = 15, c = 29.$$

Otra forma: Si sumamos $38 + 44 + 52 = 134$, obtenemos el doble de la suma de los tres números que pensó Alex; por tanto la suma de los tres números valdrá la mitad de 134, esto es, 67.

Si de esta suma restamos las sumas de dos en dos, 38, 44 y 52, obtenemos respectivamente los números pensados:

$$67 - 38 = 29 \qquad 67 - 44 = 23 \qquad 67 - 52 = 15$$

Problema 5

Cuando un profesor lleva corregidos los seis primeros exámenes de una clase, la nota media es de 8,4 puntos. Corregido el séptimo, la nota media pasa a 8,5 puntos. ¿Qué calificación obtiene el séptimo examen?

Solución

Sea x_1 la nota del primer alumno, x_2 la del segundo y así sucesivamente.

Si la nota media de los seis primeros exámenes es 8,4 se verifica que la suma de esas seis calificaciones es

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 8,4 \times 6 = 50,4.$$

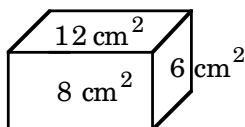
Al calcular la media de los siete exámenes

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6 + x_7}{7} = 8,5 \Rightarrow \frac{50,4 + x_7}{7} = 8,5 \Rightarrow x_7 = 9,1$$

que es la calificación del séptimo ejercicio.

Problema 6

Las áreas de tres caras adyacentes de un ortoedro son las que aparecen en la figura. ¿Sabrías calcular su volumen?



Solución

Sean a, b, c las longitudes de las aristas que concurren en un vértice.
Se verifica:

$$\left. \begin{array}{l} a b = 6 \\ b c = 8 \\ a c = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{multiplicando : } a^2 b^2 c^2 = 6 \times 8 \times 12 = 2^6 \cdot 3^2$$

El volumen valdrá: $a b c = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = 2^3 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^3$.

NIVEL A (2º de ESO)

Problema 1

¿Cuántos números de tres cifras hay que cumplan la propiedad de que la suma de la cifra de las centenas y la de las decenas dé la cifra de las unidades?

Solución

Sea el número $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$; ha de cumplirse $a + b = c$

- * Si $c = 0$, no hay ningún número.
- * Si $c = 1$, sólo hay el 101, es decir, 1 número.
- * Si $c = 2$, 112 y 202: 2 números.
- * Si $c = 3$, 123, 213, y 303: 3 números.
- * Si $c = 4$, 134, 224, 314, 404: 4 números.

Y así sucesivamente.

De esta forma obtendremos que el número total de ellos es el que corresponde a la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$.

Problema 2

En la etapa contrarreloj de una carrera ciclista, un corredor quiere llegar a una velocidad media de 40 km por hora entre dos ciudades A y C que distan 10 km. A medio camino entre A y C hay otra ciudad B que se encuentra en el punto más alto del recorrido. Al llegar a B el ciclista calcula que su velocidad media ha sido sólo de 20 km por hora. ¿A qué velocidad ha de pedalear a la bajada de B a A, si quiere conseguir el objetivo de llegar a una velocidad media de 40 km por hora entre A y C?

Solución

Según el enunciado, el primer tramo, es decir, hasta la cima recorre 5 km a una velocidad de 20 km/h, luego tarda $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ h.

Por otra parte, el trayecto total quiere recorrerlo a una velocidad de 40 km/h, es decir que para conseguirlo tendría que tardar un tiempo total de $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ h, lo que significaría que los últimos 5 km los haría en 0 segundos.

Por consiguiente, el problema es imposible.

Problema 3

Escribe números enteros positivos en las casillas vacías de manera que la suma de tres casillas consecutivas sea siempre la misma, y la suma total sea igual a 217.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			17				20					

Solución

Una solución sería de la forma

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a

que nos asegura que la suma de tres casillas consecutivas cualesquiera es $a + b + c$.

Entonces $a = 17$, $b = 20$, debiendo cumplirse que

$$4(17 + 20 + c) + 17 = 217, \text{ de donde } c = 13.$$

La solución será

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	20	13	17	20	13	17	20	13	17	20	13	17

Otra forma..

Nombrando c_1, c_2, \dots, c_{13} y teniendo en cuenta que cada tres consecutivas la suma siempre es la misma, si escribimos las 11 sumas posibles y comparamos, tenemos:

$$S_1 = c_1 + c_2 + c_3, \quad S_2 = c_2 + c_3 + c_4, \quad \dots, \quad S_{11} = c_{11} + c_{12} + c_{13}$$

$$\text{Comparando } S_1 \text{ con } S_2 \text{ y } S_3: c_1 = c_4 = 17, \quad c_2 = c_5$$

$$\text{Comparando } S_2 \text{ con } S_4 \text{ y } S_5: c_3 = c_6$$

$$c_7 = c_4 = c_1 = 17$$

$$\text{Comparando } S_3 \text{ con } S_6 \text{ y } S_7: c_5 = c_2 = c_8 = 20,$$

$$c_3 = c_6 = c_9$$

$$\text{Comparando } S_4 \text{ con } S_8 \text{ y } S_9: c_{10} = c_7 = c_4 = c_1 = 17,$$

$$c_{11} = c_8 = c_5 = c_2$$

$$\text{Comparando } S_5 \text{ con } S_{10} \text{ y } S_{11}: c_{12} = c_9 = c_6 = c_3,$$

$$c_{13} = c_{10} = c_7 = c_4 = c_1 = 17$$

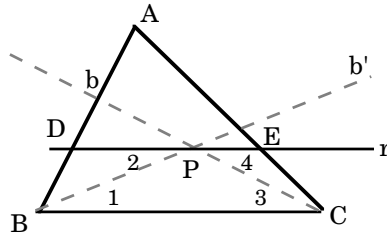
La suma de todas las casillas es 217, de donde obtenemos:

$$217 = 5c_4 + 4c_8 + 4c_3 = 5 \times 17 + 4 \times 20 + 4c_3 \Rightarrow c_3 = 13$$

Problema 4

En el triángulo ABC se dibujan las bisectrices de los ángulos B y C, que se cortan en el punto P. Por P se dibuja una paralela a BC, que corta al lado AB en D y al lado AC en E. Se sabe que $BD = 5,3$ y $CE = 7,8$. Calcula la medida del segmento DE.

Solución



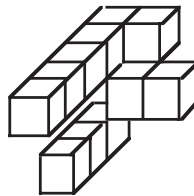
Sean b y b' las bisectrices de los ángulos B y C, y sea r la paralela a BC.

Los ángulos 1 y 2 son iguales por alternos internos, así como los ángulos 3 y 4 por la misma razón, de donde se deduce que los triángulos BDP y PEC son isósceles, con $DP = DB$ y $PE = EC$.

Por consiguiente: $DE = DP + PE = DB + EC = 5,3 + 7,8 = 13,1$.

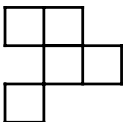
Problema 5

Dibuja las vistas del frente, de la derecha, de la izquierda y de detrás de la figura del dibujo (hay once cubos).

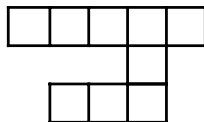


Solución

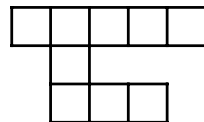
Frontal



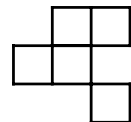
Lateral izquierdo



Lateral derecho



Trasera



Problema 6

La cebra, el elefante y el conejo del zoológico están a dieta de zanahorias. El conejo come en un año (365 días) la misma cantidad de zanahorias que el

elefante come en dos días y la que come el elefante en un día coincide con la que come la cebra en cinco días.

En un día el elefante, la cebra y el conejo comen 55 kg de zanahorias. ¿Cuánto come cada uno en un día?

Solución

Sea x el número de kg que come el elefante en un día.

Según el enunciado, el conejo come en un año $2x$, luego en un día come $\frac{2x}{365}$ kg, y la cebra come al día $\frac{x}{5}$ kg.

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\frac{2x}{365} + x + \frac{x}{5} = 55 \Rightarrow 2x + 365x + 73x = 20.075 \Rightarrow x = 45,625$$

Luego el elefante, la cabra y el conejo comen en un día 45,625 kg, 9,125 kg y 0,25 kg, respectivamente.

NIVEL B (4º de ESO)

Problema 1

Encontrar un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones:

* La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.

* La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.

* Si del número buscado restamos el que se obtiene al invertir sus cifras, se obtiene un múltiplo de 99 comprendido entre 1.000 y 1.200.

Solución

Si el número buscado es $N = \underline{x} \underline{y} \underline{z} \underline{t}$, debe ocurrir:

a) $y^2 + t^2 = 53$

Descomponiendo 53 en suma de dos cuadrados, sólo es posible: $49 + 4$ ó $4 + 49$. Luego $y = 7, t = 2$ ó $y = 2, t = 7$.

b) $x^2 + z^2 = 45$

Descomponiendo 45 en suma de dos cuadrados, sólo es posible: $36 + 9$ ó $9 + 36$. Luego $x = 6, z = 3$ ó $x = 3, z = 6$.

Posibles soluciones: 6.732, 6.237, 3.762, 3.267.

La diferencia entre el número y el obtenido invirtiendo el orden de sus cifras es:

$6.732 - 2.376 = 4.356$, que no está entre 1.000 y 1.200.

$6.237 - 7.326 = -999$, tampoco está entre 1.000 y 1.200.

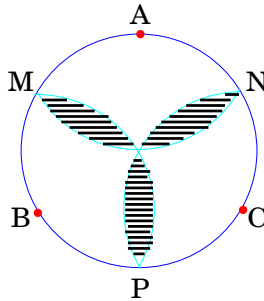
$3.762 - 2.673 = 1.089$

$3.267 - 7.623 = -4.356$, no está entre 1.000 y 1.200.

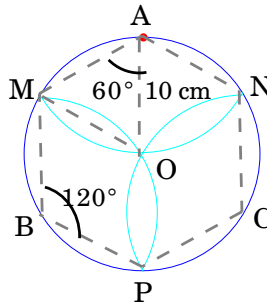
El número buscado es el 3.762.

Problema 2

Encontrar el área y el perímetro de la parte sombreada de la siguiente figura, sabiendo que el diámetro mide 20 cm y siendo A, B y C los centros de los arcos de circunferencia MN, MP y PN, respectivamente.



Solución



A, M, B, P, C y N son los vértices de un hexágono regular de lado 10 cm. La mitad de uno de los tres “pétalos”, por ejemplo OM, es el sector circular AMO menos el triángulo equilátero AMO.

Al ser la amplitud del sector 60°, será la sexta parte del círculo de radio 10 cm, es decir: $\frac{\pi \cdot 10^2}{6} = \frac{50\pi}{3}$.

Como el lado del triángulo es 10 cm, su área es $\frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.

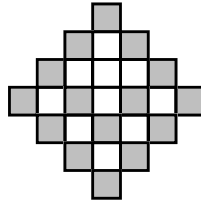
Luego el área de medio “pétalo” es: $\frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} \approx 9,06 \text{ cm}^2$.

El área de los tres pétalos será: $6 \times 9,06 = 54,36 \text{ cm}^2$.

El perímetro lo forman tres arcos de circunferencia de radio 10 cm y de amplitud 120°, que equivalen a la longitud de la circunferencia del mismo radio: $2\pi \cdot 10 = 20\pi \approx 62,83 \text{ cm}$.

Problema 3

La siguiente figura está formada por cuadrados blancos y negros. Tiene 7 cuadrados de anchura. Si queremos hacer una figura con 99 cuadrados de anchura, ¿cuántos cuadrados tendrá en total?



Solución

La figura es simétrica respecto de la fila central, que tiene 7 cuadrados. Las filas van disminuyendo de 2 en 2 hasta llegar a un solo cuadrado.

En este caso el total de cuadrados es:

$$7 + 2 \times 5 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = 7 + 2(1 + 3 + 5) = 25$$

Si la fila central tiene 99 cuadrados, el número total será:

$$\begin{aligned} 99 + 2 \times 97 + 2 \times 95 + \dots + 2 \times 5 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = \\ = 99 + 2(1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97) \end{aligned}$$

La suma de los primeros números impares es:

los dos primeros: $1 + 3 = 4 = 2^2$

los tres primeros: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

los cuatro primeros: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

En general, los n primeros números impares:

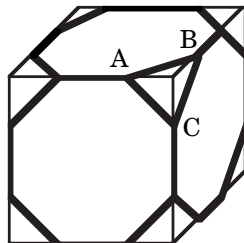
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Al ser $97 = 2 \times 49 - 1$, la suma $1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97$ es la suma de los 49 primeros números impares, y valdrá 49^2 .

Por tanto, el número total de cuadrados será: $99 + 2 \times 49^2 = 4.901$.

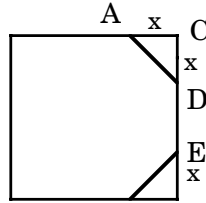
Problema 4

En un cubo de 1 metro de arista cortamos las tres aristas que concurren en un vértice, de manera que la sección sea un triángulo equilátero.



Repetimos la operación con todos los vértices, de tal manera que el sólido resultante tenga todas sus aristas iguales. ¿A qué distancia del vértice debemos cortar las aristas del cubo para obtener aquel sólido? ¿Cuál es el perímetro del sólido obtenido?

Solución



Sea $x = AC = CD$ la distancia a la que hay que hacer el corte.

En el triángulo rectángulo ACD : $AD = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$.

Como $AD = DE$, y el lado del cuadrado vale 1, será:

$$2x + x\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

La arista DE del sólido vale: $1 - 2x = 1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \cong 0,41$ m.

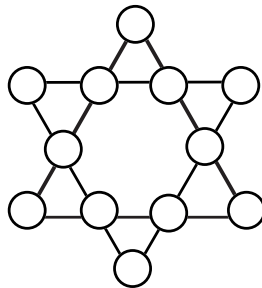
El sólido obtenido tiene 4 aristas en cada cara del cubo.

Entendiendo como perímetro del sólido la suma de sus 36 aristas:

$$36(\sqrt{2} - 1) \cong 14,91 \text{ m.}$$

Problema 5

Coloca en cada círculo un número comprendido entre 1 y 12, de forma que los seis lados de la estrella sumen siempre la misma cantidad.



Solución

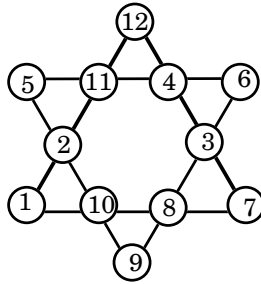
Los números del 1 al 12 suman 78. Cada uno de ellos aparece en dos lados, luego la suma de los seis lados vale $78 \times 2 = 156$.

Cada lado suma: $\frac{156}{6} = 26$.

El número 12 lo tenemos que asociar con tres más que sumen 14; esto sólo es posible así:

$$\begin{array}{lll}
 11 + 2 + 1 & 10 + 3 + 1 & 9 + 4 + 1 \\
 9 + 3 + 2 & 8 + 5 + 1 & 8 + 4 + 2 \\
 7 + 6 + 1 & 7 + 5 + 2 & 7 + 4 + 3 \\
 6 + 5 + 3 & &
 \end{array}$$

Si uno de los lados del 12 es 11, 2, 1 el otro sólo puede ser 7, 4, 3 ó 6, 5, 3. Una posible solución es:



Problema 6

Ana ha vendido manzanas en varias casas. En cada una dejó la mitad de las que llevaba más media manzana, y no partió ninguna manzana. No recuerda en cuántas casas estuvo, pero sabe que ha hecho no menos de 4 ventas y que comenzó la jornada con menos de 100 manzanas, y al finalizar la jornada las había vendido todas.

- * ¿En cuántas casas vendió manzanas?
- * ¿Cuántas manzanas tenía inicialmente?
- * ¿Cuántas vendió en cada casa?

Solución

Si a la última casa llega con x manzanas, vende $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ y se queda con

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

A la penúltima llega con 3, vende $1,5 + 0,5 = 2$ y sale con 1, que es con la que llega a la última.

Razonando de atrás hacia adelante, a cada casa llega con:

$$63 \longrightarrow 31 \longrightarrow 15 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$$

Si vendió en 4 casas, inicialmente tenía 15 y vendió 8, 4, 2, 1.

Si vendió en 5 casas, partió con 31 y vendió 16, 8, 4, 2, 1.

Si vendió en 6 casas, partió con 63 y vendió 32, 16, 8, 4, 2, 1.
 Al comenzar con menos de 100 manzanas, no hay más soluciones.

NIVEL B (4º de ESO)

Problema 1

Mireia tiene 20 billetes. Unos son de 10 euros, otros de 20 euros y algunos de 50 euros, en total 500 euros. Si tiene más billetes de 50 euros que de 10 euros, ¿cuántos billetes tiene de cada tipo?

Solución

Llamando x, y, z a las cantidades de billetes de 10, 20 y 50 euros, respectivamente, planteamos:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ 10x + 20y + 50z &= 500 \\ z &> x \end{aligned} \right\}$$

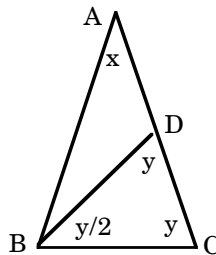
De la 1ª y 2ª ecuaciones obtenemos que $z = \frac{10 + x}{3}$, y para que z sea natural y además mayor que x , esta última debe valer 2.

La solución será: 2 billetes de 10 euros, 14 de 20 y 4 de 50.

Problema 2

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Se traza la bisectriz del ángulo B , que corta al lado AC en D . Sabiendo que $BC = BD$, calcula cuánto mide el ángulo A .

Solución



Sea x la amplitud del ángulo A e y la de los ángulos B y C .

Al ser $BC = BD$, el triángulo BCD es isósceles, con los ángulos en C y en D iguales, midiendo cada uno y ; por tanto:

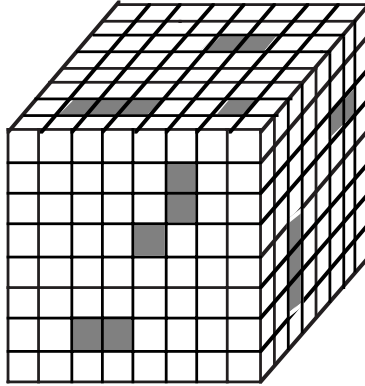
$$\frac{y}{2} + y + y = 180^\circ \Rightarrow y = 72^\circ$$

En el triángulo ABC se debe cumplir que

$$x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Problema 3

En el siguiente cubo todos los cubitos son blancos o negros. Las filas (horizontales o verticales) que tienen sus extremos negros, están constituidas por cubitos que son todos negros. Todos los demás cubitos son blancos.



-- ¿Cuántos cubitos blancos hay?

-- Se quita una capa de cubitos de cada una de las caras del cubo grande.

Hacer el dibujo del nuevo cubo.

Solución

Se puede resolver contando el número de cubitos negros que hay en cada una de las capas verticales; si se va de izquierda a derecha de la figura, sería:

capa	nº de cubitos negros
1 ^a	5
2 ^a	13
3 ^a	19
4 ^a	19
5 ^a	19
6 ^a	25
7 ^a	13
8 ^a	5

118

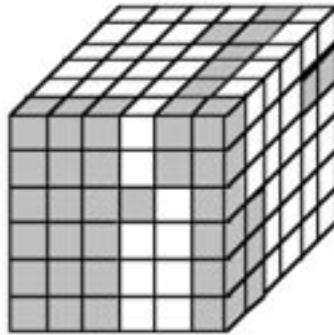
Como el número total de cubitos es $8^3 = 512$, el número de cubitos blancos será $512 - 118 = 394$.

Para comprobar, puede repetirse el recuento yendo por capas horizontales; si se va de arriba a abajo:

capa	nº de cubitos negros
1ª	6
2ª	13
3ª	26
4ª	13
5ª	14
6ª	14
7ª	26
8ª	6
	118

Se obtiene el mismo resultado.

b) El dibujo será:

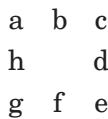


Problema 4

Numera de 1 a 8 los vértices y los lados de un cuadrado, de manera que los cuatro números que se obtienen al sumar el número correspondiente a cada lado más los dos de sus extremos sea siempre igual.

Solución

Disponemos los números de la siguiente forma:



Sea S la suma de una cualquiera de las cuatro líneas. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
 (a + b + c) + (c + d + e) + (e + f + g) + (g + h + a) &= 4S \Rightarrow \\
 \Rightarrow (a + b + c + d + e + f + g + h) + (a + c + e + g) &= 4S
 \end{aligned}$$

Como la suma de los números del 1 al 8 es 36, se deduce:

$$36 + (a + c + e + g) = 4S \Rightarrow S = 9 + \frac{a + c + e + g}{4}$$

La suma de los cuatro que coloquemos en las esquinas debe ser múltiplo de 4. La menor suma es $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y la mayor $5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

Luego $10 \leq a + c + e + g \leq 26$ y, además, múltiplo de 4.

Puede ocurrir:

$$\begin{aligned} a + c + e + g = 12 &\Rightarrow S = 9 + \frac{12}{4} = 12 \\ a + c + e + g = 16 &\Rightarrow S = 9 + \frac{16}{4} = 13 \\ a + c + e + g = 20 &\Rightarrow S = 9 + \frac{20}{4} = 14 \\ a + c + e + g = 24 &\Rightarrow S = 9 + \frac{24}{4} = 15 \end{aligned}$$

** Si la suma de cualquier línea es $S = 12$, sólo se puede obtener con 1, 2, 5, 4 ó con 1, 2, 6, 3.

1 y 2 no pueden ponerse en la misma línea, pues el que falta sería 9:

$$\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ & 5 \text{ imposible, o} \\ 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ & \text{imposible} \\ 5 & 5 \ 2 \end{array}$$

Colocando en las esquinas 1, 2, 6, 3, con el 1 y 2 en distinta línea:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 6 \\ 8 & & 4 \text{ que es una solución} \\ 3 & 7 & 2 \end{array}$$

Si le aplicamos los movimientos que dejan invariante a un cuadrado: simetrías horizontal y vertical, giros con centro el del cuadrado y ángulos de 90° , 180° , 270° , y las simetrías respecto de las dos diagonales:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 2 & 7 & 3 & 3 & 8 & 1 \\ 8 & & 4 & 4 & & 8 & 5 & & 7 & 4 & & 8 & 7 & & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 1 & 8 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ & & & 1 & 5 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 6 & & & \\ & & & 8 & & 4 & 5 & & 7 & 7 & & 5 & & & \\ & & & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 1 & & & \end{array}$$

En total resultan 8 soluciones.

** Si la suma de cualquier línea es $S = 13$, $a + c + e + g = 16$, que puede obtenerse con 1, 8, 5, 2.

Una solución es:

1 7 5
 4 6 y con estos en las esquinas hay 8 soluciones.
 8 3 2

Y también con 6, 4, 5, 1

6 3 4
 2 8 y habría 8 más.
 5 7 1

** Si la suma es $S = 14$, $a + c + e + g = 20$, que puede conseguirse con 1, 8, 7, 4

8 5 1
 2 6 y habrá 8 soluciones.
 4 3 7

Y con 8, 5, 4, 3

8 1 5
 2 6 habría 8 soluciones
 4 7 3

** Si la suma es $S = 15$, $a + c + e + g = 24$, que puede obtener con 8, 7, 6, 3

6 1 8
 2 4 y habría 8 soluciones.
 7 5 3

En total se obtienen 48 soluciones diferentes.

Problema 5

Sea N el número que resulta de escribir los números enteros de 1 a 1000 en forma consecutiva (123456789101112...). Encontrar la suma de las cifras de N .

Solución

Contamos las veces que aparece el 1:

* En los números del 1 al 99 aparece en 20 ocasiones.

* Desde el 100 al 199, las 20 anteriores más las 100 en las que ocupa el primer lugar: 120 veces.

* Del 200 al 299, otras 20 veces. Las mismas que del 300 al 399, del 400 al 499, ..., y del 900 al 999.

* Una vez más por figurar en el 1.000.

En total son: $20 \times 10 + 100 + 1 = 301$.

Las demás cifras se repetirán una vez menos que el 1, es decir, 300 veces.

La solución será:

$$1 \times 301 + 2 \times 300 + 3 \times 300 + \dots + 9 \times 300 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 300 + 1 = 13.501$$

Problema 6

Ana ha de escribir un trabajo de n páginas. El lunes escribe la mitad del trabajo. El martes la tercera parte de lo que le falta; el miércoles la cuarta parte de lo que resta y el jueves la quinta parte de lo que le queda por hacer. El viernes decide acabar el trabajo y observa que le quedan menos de 15 páginas para acabarlo.

Si todos los días ha escrito un número entero de páginas, ¿cuántas páginas tenía el trabajo y cuántas va a hacer el viernes?

Solución

Hacemos la tabla siguiente:

	<u>Trabajo realizado</u>	<u>Trabajo restante</u>
Lunes	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
Martes	$\frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{6}$	$\frac{n}{2} - \frac{n}{6} = \frac{n}{3}$
Miércoles	$\frac{1}{4} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n}{12}$	$\frac{n}{3} - \frac{n}{12} = \frac{n}{4}$
Jueves	$\frac{1}{5} \cdot \frac{n}{4} = \frac{n}{20}$	$\frac{n}{4} - \frac{n}{20} = \frac{n}{5}$
Viernes	$\frac{n}{5}$	

Por ser el número de hojas a escribir el viernes menor que 15, $\frac{n}{5} < 15$, o sea, $n < 75$ y por ser la cantidad de hojas números enteros, n ha de ser múltiplo de 2, 6, 12 y 20, siendo la solución 60, que es el mínimo común múltiplo de 2, 6, 12 y 20, y, además, menor que 75.

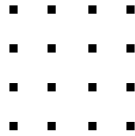
Y el viernes hace 12 páginas.

EXTREMADURA 1999

FASE COMARCAL

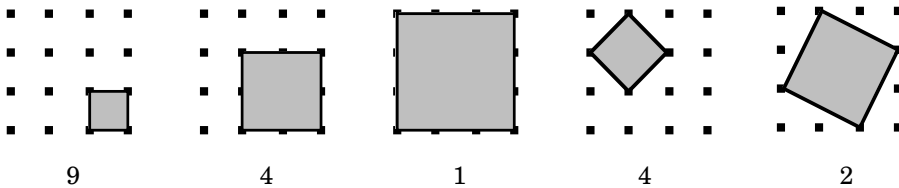
Problema 1. CONSTRUYENDO CUADRADOS.

Determina el máximo número de cuadrados que puedes construir utilizando la trama del dibujo, cumpliéndose que los vértices de cada uno de ellos sean puntos de la misma.



Solución

Sólo hay cinco tipos de cuadrados, cuyo número se indica:



En total hay 20 cuadrados con los vértices en puntos de la trama.

Problema 2. TRABAJANDO CON EUROS.

Como sabes, la cotización de la peseta en euros quedó fijada desde el 1 de enero en 1 euro = 166,386 pts. Un matemático olímpico sueña con un ordenador. Tiene ahorradas 250.000 pts, y en un reciente viaje a París descubre el objeto de sus sueños con un precio de 1.525,52 euros, pero ... le hacen un descuento del 8 %. ¿Podrá, por fin, cumplir su sueño?

Solución

El precio real del ordenador en euros es:

$$1.525,52 - 0,08 \times 1.525,52 = 1.403,4784 \text{ euros} = 233.519,2 \text{ pts.}$$

Al tener ahorradas 250.000 pesetas, puede comprar el ordenador.

Problema 3. PRODUCIENDO ACEITE DE OLIVA.

Una almazara produce cuatro tipos de aceite de oliva virgen, que según su grado de acidez, se denominan extra, fino, corriente y lampante. Sabemos que el precio del litro del fino es el 97,5 % del extra, el del corriente el 92,5 %, y el del lampante el 90 %.

La almazara ha vendido 100.000 litros de extra, 200.000 de fino, 300.000 de corriente y 250.000 de lampante, que ha supuesto unos ingresos totales de 319.000.000 pts.

Calcular el precio por litro de cada tipo de aceite de oliva virgen.

Solución

Si el precio del litro de aceite extra es x , los precios de los otros son:

fino: $0,975 x$

corriente: $0,925 x$

lampante: $0,9 x$

Al ser el total de ingresos 319.000.000 pts, se tiene:

$$100.000x + 200.000 \times 0.975x + 300.000 \times 0.925x + 250.000 \times 0,9x = 319.000.000$$

Resulta $x = 400$ pts.

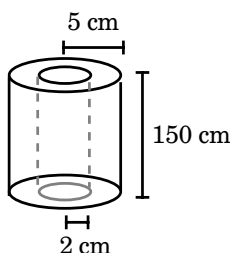
Por tanto, los precios de los cuatro tipos de aceite son: 400, 390, 370 y 360 pts/litro.

Problema 4. REVISTAS OLÍMPICAS.

Para imprimir las revistas de la Olimpiada se han utilizado bobinas de papel que tienen un diámetro de 10 cm, conteniendo en su interior un tubo de 4 cm de diámetro. Sabiendo que la altura de cada una de ellas es de 1,5 metros y que el grosor del papel es de 0,1 mm, calcular aproximadamente los metros cuadrados de papel que contiene cada bobina.

Solución

La forma de la bobina es ésta:



El volumen total de papel, sin el hueco central, es:

$$\pi \times 5^2 \times 150 - \pi \times 2^2 \times 150 \cong 11.781 - 1.885 = 9.896 \text{ cm}^3.$$

Si se supone que el papel se extiende sobre una superficie plana, puede considerarse como un prisma rectangular de altura el espesor del papel 0,01 cm. El volumen de este prisma coincide con el del papel, por lo que

$$9.896 = \text{Área base} \times 0,01 \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = 989.600 \text{ cm}^2 = 98,96 \text{ m}^2$$

FASE AUTONÓMICA

Problema 1. NÚMEROS PRIMOS CURIOSOS.

Escribe los números primos de 2 cifras, siendo éstas iguales.

Haz lo mismo para el caso de 3 cifras, de 4 y de 5.

¿Podrías escribir un número primo de seis cifras iguales?

Razona las respuestas.

Solución

El único número primo de dos cifras iguales es el 11, pues cualquier otro (aa) es igual a $11 \times a$ y, por tanto, múltiplo de 11, por lo que no es primo.

No hay ningún número primo con tres cifras iguales, pues $111 = 3 \times 37$, y cualquiera de la forma aaa es $111 \times a$, que es $3 \times 37 \times a$.

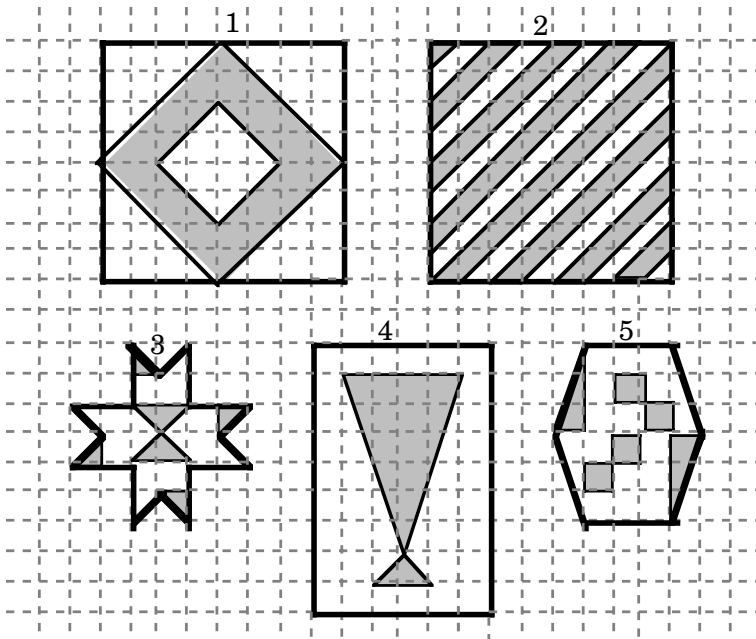
No hay ningún número primo con cuatro cifras iguales pues $1111 = 11 \times 101$ y $a.aaa = 1111 \times a$ también lo es.

Con cinco cifras iguales tampoco hay números primos porque $11111 = 41 \times 271$, y cualquier otro de la forma aa.aaa equivale a $11111 \times a$, y también sería múltiplo de 41 y de 271, además de serlo de a y de 11111.

Con seis cifras iguales tampoco hay ningún número primo, pues $111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ y también lo será cualquiera de la forma aaa.aaa.

Problema 2. FRACCIONES GEOMÉTRICAS.

En las siguientes figuras aparecen unas zonas sombreadas.



Determina en cada caso qué fracción del total es la sombreada.

Solución

1ª figura: El total es un cuadrado de $8 \times 8 = 64$ cuadraditos.

La parte no sombreada es un cuadrado formado por 8 cuadraditos más 4 triángulos rectángulos isósceles, cada uno de 8 cuadraditos; en total 40. Luego la sombreada contiene 24 cuadraditos. Fracción: $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$.

2ª figura: Por cada franja sombreada hay una en blanco de la misma superficie, luego la parte sombreada es $\frac{1}{2}$.

3ª figura: El área total son 16 cuadraditos (cada dos triángulos rectángulos completan un cuadradito). La parte sombreada son 8 triángulos que forman 4 cuadraditos. Fracción: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

4ª figura: El área total es un rectángulo de $6 \times 9 = 54$ cuadraditos. La parte sombreada son 2 triángulos isósceles, uno de base 4 y altura 6, en total 12 cuadraditos, y otro que completa un cuadradito. En total 13 cuadraditos. Fracción: $\frac{13}{54}$.

5ª figura: El total es un hexágono que ocupa un rectángulo de 30 cuadraditos menos 4 triángulos rectángulos de base 1 y altura 3; en total el hexágono ocupa $30 - 6 = 24$ cuadraditos.

Sombreados hay 2 triángulos rectángulos de base 1 y altura 3, y 4 cuadraditos; en total 7 cuadraditos. Fracción: $\frac{7}{24}$.

Problema 3. LOTERÍA CON RECARGO.

Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un colegio deciden vender lotería con un pequeño recargo. Se proponen dos modelos de participaciones:

MODELO A

El portador juega la cantidad de
 80 pts
en el n° XXX.
 Donativo: 20 pts
 TOTAL: 100 pts

MODELO B

El portador juega la cantidad de
 250 pts
en el n° XXX.
 Donativo: 50 pts
 TOTAL: 300 pts

Responde a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Qué tanto por ciento de recargo lleva cada modelo?

b) Un alumno propone comprar 500.000 pts en lotería y venderla en participaciones. ¿Cuántos recibos de cada uno de los modelos habrá que hacer? ¿Cuánto dinero se recauda en cada caso?

c) Un alumno propone recaudar 200.000 pts limpias. ¿Qué cantidad de lotería deben comprar en cada caso?

Solución

a) En el primer caso, por cada 80 pts jugadas te recargan 20, es decir, la cuarta parte o el 25%.

En el segundo caso, por cada 250 pts jugadas te recargan 50, que es la quinta parte o el 20%.

b) Habrá que repartir las 500.000 pts entre 80 en el primer caso y entre 250 en el segundo:

$$\frac{500.000}{80} = 6.250 \text{ participaciones}; \quad \frac{500.000}{250} = 2.000 \text{ participaciones}$$

Por cada recibo se ganan 20 pesetas en el primer caso y 50 en el segundo; la ganancia será:

$$6.250 \times 20 = 125.000 \text{ pts} \quad 2.000 \times 50 = 100.000 \text{ pts}$$

c) En el primer caso, por cada recibo se ganan 20 pts; por tanto, para ganar 200.000 pts se necesitan $\frac{200.000}{20} = 10.000$ recibos. Cada recibo lleva 80 pts de lotería, luego hay que comprar 800.000 pts de lotería.

En el segundo caso, por cada recibo se ganan 50 pts; por tanto, para ganar 200.000 pts se necesitan $\frac{200.000}{50} = 4.000$ recibos. Cada recibo lleva 250 pts de lotería, luego hay que comprar $4.000 \times 250 = 1.000.000$ pts de lotería.

Problema 4. CALENDARIO.

En la primera década del próximo siglo, es decir, en el período de tiempo comprendido entre el 1 de enero del 2001 y el 31 de diciembre del 2010, nos fijamos en el día 20 de un mes cualquiera.



a) Explica si podrá caer en el mismo día de la semana que el día 20 del mes siguiente.

b) Si ese día 20 en que nos hemos fijado fuera de abril, ¿podrá haber en la década otro 20 de abril que caiga en el mismo día de la semana?

En caso afirmativo, ¿cuántas veces y cuándo se daría esta coincidencia?

Razona las respuestas.

Solución

a) Un mes sólo puede tener 30 ($7 + 2$), 31 ($7 + 3$) y 28 ó 29 (febrero, según que sea o no bisiesto). Sólo 28 es 7 ; por tanto, el 20 de febrero de un año no bisiesto coincidirá en día de la semana con el 20 de marzo.

En los meses de 30 días, si un día concreto es lunes, por ejemplo, pasa a ser miércoles el mes siguiente; en los de 31 días pasaría a ser jueves, y en los de 29 días pasaría a ser martes.

Por tanto, el 20 de febrero coincide en día de la semana con el 20 de marzo en los años no bisiestos: 2001, 2002, 2003, 2005, 2006, 2007, 2009, 2010.

b) Supongamos que el 20 de abril de 2001 es un determinado día de la semana, por ejemplo viernes. Por ser 2001 un año no bisiesto, trae $365 = 7 + 1$; luego el 20 de abril de 2002 será sábado, el de 2003 será domingo, el del 2004 martes (por ser bisiesto y $366 = 7 + 2$), el de 2005 miércoles, el de 2006 jueves, el de 2007 viernes (primera coincidencia).

El 20 de abril de 2008 será domingo, por ser bisiesto (segunda coincidencia). El de 2009 será lunes y el de 2010 martes (tercera coincidencia).

Es decir, coinciden en día de la semana:

20 de abril de 2001 con el de 2007

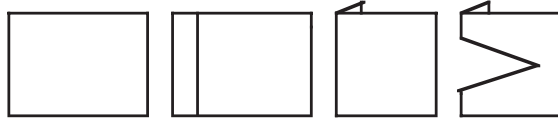
20 de abril de 2003 con el de 2008

20 de abril de 2004 con el de 2010

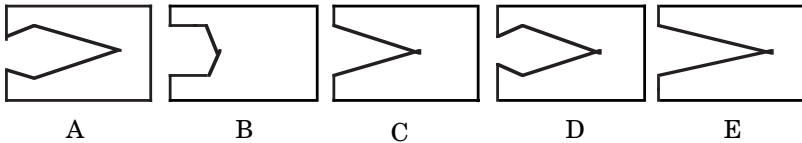
MADRID 1999 FASE SEMIFINAL

Problema 1. PLIEGUES

Se pliega una hoja de papel rectangular y se corta tal como aparece en la figura:



Si se despliega la hoja, ¿cuál de las figuras A, B, C, D, E se obtendrá? Justifica tu respuesta.



Solución

Una vez hecho el pliegue, se le da el corte a la hoja de papel en direcciones no paralelas a los lados y resultarán cortes inclinados, distintos antes y después del sitio por donde se dobló la hoja. Por tanto, la figura que se puede obtener es la A o la D.

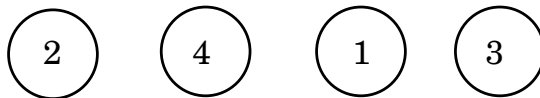
Descartamos la D pues el vértice del corte no está tan próximo al lado del rectángulo.

En definitiva, la figura que se obtiene es la A.

Problema 2. EL EDIFICIO INTELIGENTE

Se sabe que la Torre Picasso es el edificio más alto de nuestra ciudad y además es “inteligente”. El guardia de seguridad, para poder acceder a cada una de las plantas - para su control nocturno - necesita saber una clave.

Os vamos a proponer que os convirtáis en guardias de seguridad, y para poder tener acceso a todas las estancias de la Torre, deberéis averiguar la clave, siguiendo las instrucciones:



1. Los números de los botones en ningún caso coinciden con el orden en el que deben ser pulsados.

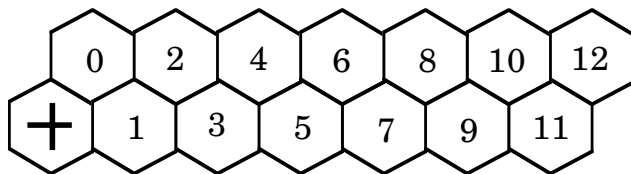
2. El primero y el último en pulsar deben estar separados.

3. El último no está en ningún extremo.

Hecho en Asturias 98, primer ciclo (2º eso), fase semifinal nº 3.

Problema 3. LA ABEJA

La abeja de la figura no puede volar y va andando de una celda a otra contigua, siempre que el número de la última sea mayor que el de la anterior.



¿Cuántas rutas distintas puede seguir para ir a la celdilla número 8?
 ¿Cuántas rutas para llegar a la celda 12?

Si el viaje a una celdilla determinada lo puede hacer a través de 2.584 rutas ¿a qué celda llega en cada una de estas rutas?

Solución

Si nos fijamos en los distintos caminos que puede recorrer la abeja para llegar a cada celdilla, obtenemos:

Para llegar al 0: $0 \rightarrow 1$

Para llegar al 1: $(0,1)$ y $1 \rightarrow 2$

Para llegar al 2: $(0,1,2)$, $(0,2)$ y $(1,2) \rightarrow 3$

Para llegar al 3: $(0,1,2,3)$, $(0,1,3)$, $(0,2,3)$, $(1,2,3)$ y $(1,3) \rightarrow 5$

Para llegar al 4: $(0,1,2,3,4)$, $(0,1,2,4)$, $(0,1,3,4)$, $(0,2,3,4)$, $(0,2,4)$, $(1,2,3,4)$, $(1,2,4)$ y $(1,3,4) \rightarrow 8$

1) Se observa que para llegar a una celdilla nueva basta añadir a las dos rutas anteriores la nueva celdilla. La cantidad de rutas la podemos obtener sumando las dos cantidades anteriores y obtenemos la sucesión:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

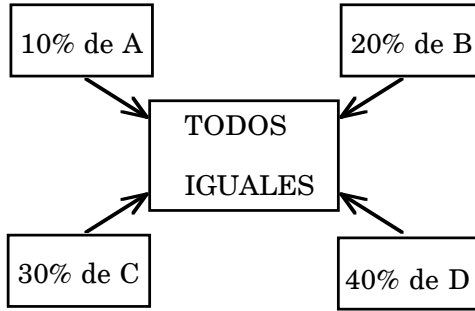
2) Para llegar a la número 8: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
 y para llegar a la número 12: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.

Si continuamos escribiendo términos: 610, 987, 1 597, 2 584, que corresponde a la cantidad de rutas distintas para llegar a la celdilla 17.

A esta sucesión se la conoce como *sucesión de Fibonacci*, matemático italiano del siglo XIII.

Problema 4. NÚMEROS Y PORCENTAJES

Busca los cuatro números naturales más pequeños (A, B, C y D) que cumplan esta condición:



Solución

Debe ocurrir que $\frac{1}{10}A = \frac{1}{5}B = \frac{3}{10}C = \frac{2}{5}D = k$

Por tanto, $A = 10k$, $B = 5k$, $C = \frac{10}{3}k$, $D = \frac{5}{2}k$

Y para que sean naturales, k será múltiplo de 2 y 3, y el menor es m.c.m. (2, 3) = 6, de donde: $A = 60$, $B = 30$, $C = 20$, $D = 15$.

FASE FINAL

Problema 1. NÚMEROS PATAS ARRIBA

Estudia el conjunto de números que tienen la propiedad de que al ser multiplicados por 9 invierten el orden de sus dígitos. Cuando hayas encontrado la ley que forma este conjunto, trata de hallar los números cuyos dígitos se invierten al multiplicarlos por 4.

Hecho en CASTILLA - LA MANCHA 99. Ciclo 12-14, n° 2.

Problema 2. QUIOSCO

En el quiosco del Instituto puedo comprar por 100 pesetas un refresco, un chocolate o un paquete de galletas, y por 200 pesetas una porción de torta, un helado o un sandwich. Si quiero gastar exactamente 300 pesetas, ¿de cuántas maneras puedo hacerlo?

Solución

100 pts cuestan: 1 R, 1 CH, 1 G.

200 pts cuestan: 1 T, 1 H, 1 S.

Puedo gastar 300 pts exactamente comprando:

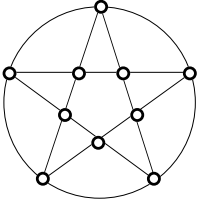
- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| 3 R | 3 CH | 3 G | 2 R y 1 CH |
| 2 R y 1 G | 2 CH y 1 R | 2 CH y 1 G | 2 G y 1 R |
| 2 G y 1 CH | 1 T y 1 R | 1 T y 1 CH | 1 T y 1 G |
| 1 H y 1 R | 1 H y 1 CH | 1 H y 1 G | 1 S y 1 R |
| 1 S y 1 CH | 1 S y 1 G | | |

Puedo hacerlo de 18 maneras diferentes.

Problema 3. LAS FILAS

Coloca a diez niños en cinco filas de modo que cada fila tenga cuatro niños.

Solución



La solución se encuentra en un pentágono estrellado. Se obtiene este polígono dividiendo la circunferencia en 5 partes y uniéndolas de 2 en 2.

Problema 4. CUASICUADRADO PERFECTO

Un cuadrado perfecto es un número natural que es el cuadrado de otro entero. Por ejemplo, 25 y 49 son cuadrados perfectos porque $25 = 5^2$ y $49 = 7^2$.

A un cuasicuadrado perfecto le falta una unidad para ser cuadrado perfecto. Por ejemplo, 24 y 48 son cuasicuadrados perfectos. Pero, además de ser cuasicuadrado, el 24 tiene la propiedad de que su doble (48) es también cuasicuadrado perfecto.

¿Cuál es el siguiente número natural cuasicuadrado perfecto cuyo doble es también cuasicuadrado perfecto?

Solución

Un cuasicuadrado perfecto será de la forma $a^2 - 1$. Si lo multiplicamos por 2, se debe obtener otro, $b^2 - 1$.

Entonces: $2(a^2 - 1) = b^2 - 1 \Rightarrow b^2 = 2a^2 - 1 \Rightarrow b^2$ impar $\Rightarrow b$ impar.

$$a^2 = \frac{b^2 - 1}{2} + 1 = \frac{b^2 + 1}{2}$$

Construimos la tabla:

b	b ²	$\frac{b^2 + 1}{2} = a^2$	
1	1	1	
3	9	5	
5	25	13	
7	49	25	$7^2 = 49; 49 - 1 = 48$ cuasicuadrado perfecto
9	81	41	$5^2 = 25; 25 - 1 = 24$ cuasicuadrado perfecto
11	121	61	
13	169	85	
15	225	113	

17	289	145
19	361	181
21	441	221
23	529	265
25	625	313
27	729	365
29	841	4 21
31	961	481
33	1089	545
35	1225	613
37	1369	685
39	1521	761
41	1681	841

La solución es: $29^2 - 1 = 840$.

Su doble es 1.680, que es $41^2 - 1$.

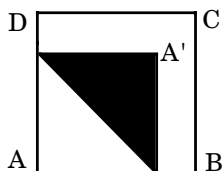
MURCIA 1999

SEGUNDO NIVEL (2º DE ESO)

Problema 1

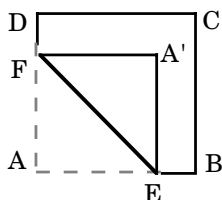
Un trozo de papel cuadrado ABCD es blanco por la cara de delante y negro por la de atrás. Tiene un área de 3 centímetros cuadrados.

La esquina A se dobla hasta el punto A', situado sobre la diagonal AC, de modo que la superficie que queda visible es la mitad blanca y la mitad negra. ¿A qué distancia de A se encuentra el punto A'?



Solución

La superficie visible está formada por las figuras EA'F y EBCDFA'. Entonces el cuadrado inicial se ha dividido en los tres polígonos AEF, EA'F y EBCDFA', que serán equivalentes, y el área de cada uno valdrá 1 cm^2 .



Por tanto, el área del cuadrado AEA'F vale 2 cm^2 .

La distancia pedida, AA', es la diagonal de este cuadrado, que se calcula por el teorema de Pitágoras: $AA'^2 = AE^2 + EA'^2 = 4 \Rightarrow AA' = 2 \text{ cm}$.

Problema 2

Ana y Luisa rodean una plaza circular. Ana va corriendo la mitad de la distancia y va andando la otra mitad. Luisa corre durante la mitad del tiempo y anda durante la otra mitad. Si ambas andan y corren con las mismas velocidades ¿quién acaba de dar la vuelta antes?

Solución

Luisa corre la mitad de su tiempo, por lo que corre en más de la mitad de la distancia, mientras que Ana sólo va corriendo la mitad de la distancia. Como Luisa corre a lo largo de un trayecto mayor, tardará menos tiempo en dar la vuelta y acabará antes que Ana.

Problema 3

Debemos escoger cinco números diferentes de los que aparecen en la cuadrícula de forma que, al sumarlos, consigamos el resultado más alto posible.

Para ello podemos empezar por la columna A y avanzar hacia la columna E, escogiendo un número de cada columna y fila. Los números escogidos no pueden estar en la misma línea diagonal.

A	B	C	D	E
1	7	13	20	6
25	9	2	23	11
14	22	17	11	16
4	12	10	3	19
24	18	5	15	21

Solución

Este ejercicio se puede comenzar tomando el valor más alto de la tabla, el 25, que está en la primera columna. No se pueden tomar el 24 ni el 23 ni el 22, por estar en la misma columna, fila o diagonal, respectivamente. El 21 no se puede tomar porque anularía al 19, 18 y 17; para conseguir la suma más alta se toman 20, 19, 18 y 17, obteniéndose

$$25 + 18 + 17 + 20 + 19 = 99.$$

Problema 4

En un juego entre tres personas cuando una pierde debe dar a cada una de las otras tanto dinero como tenga esa persona.

Se juegan tres partidas y pierden una partida cada una de ellas. Al terminar el juego cada persona tiene 24 pesetas. ¿Con cuánto dinero empezó a jugar cada una de las tres personas?

Solución

Es posible construir una tabla comenzando por la situación del final de la partida, y terminar en la del comienzo. Llamemos A, B y C a cada uno de los jugadores.

		A	B	C
Final:	Ha perdido C	24	24	24
	Ha perdido B	12	12	48
	Ha perdido A	6	42	24
Comienzo		39	21	12

Por tanto, el jugador que pierde la primera partida comenzó con 39 pts, el que pierde la segunda con 21 pts y el otro con 12 pts.

Otra forma: También se puede comenzar la tabla por el principio de la partida, llamando x e y a las cantidades con las que comienzan dos de los jugadores.

	A	B	C
Comienzo	x	y	$72 - x - y$
Pierde A	$2x - 72$	$2y$	$144 - 2x - 2y$
Pierde B	$4x - 144$	$4x - 72$	$288 - 4x - 4y$
Pierde C	$8x - 288$	$8y - 144$	$504 - 8x - 8y$

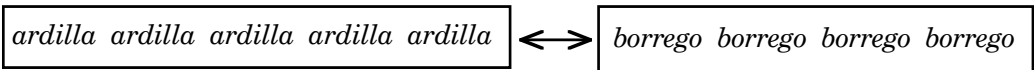
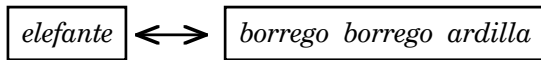
$$8x - 288 = 24 \Rightarrow x = 39 \text{ pts}$$

$$8y - 144 = 24 \Rightarrow y = 21 \text{ pts}$$

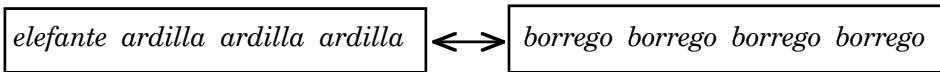
$$72 - 39 - 21 = 12 \text{ pts con que comienza C.}$$

Problema 5

En un concurso de fuerza los animales de las dos cuerdas siguientes consiguieron mantener las fuerzas equilibradas:



Adivina quién ganará este nuevo concurso.



Solución

El equilibrio de las dos primeras cuerdas nos permite expresar al elefante (e) y al borrego (b) en función de la ardilla (a) y sustituir en la tercera cuerda:

$$\left. \begin{array}{l} e = 2b + a \\ 5a = 4b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{7}{2}a \\ b = \frac{5}{4}a \end{cases}$$

$$e + 3a = 4b \Rightarrow \frac{7}{2}a + 3a = 4 \cdot \frac{5}{4}a \Rightarrow 13a > 10a$$

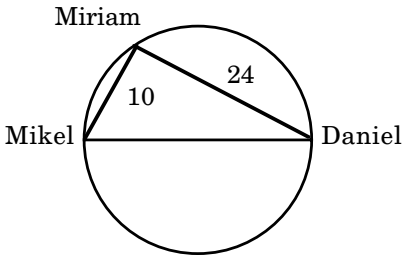
El elefante y las tres ardillas ganarán a los 4 borregos.

NAVARRA 1999

Problema 1

Daniel y Mikel están sentados en puntos diametralmente opuestos de una piscina circular, en la que la profundidad del agua es de 1,80 m. Cuando Miriam se sienta al borde la piscina, los dos se lanzan a nadar en línea recta hacia ella. Una vez que ambos han nadado 10 m, Mikel ha llegado junto a Miriam, mientras que a Daniel le faltan 14 m para alcanzarlos. ¿Cuántos litros de agua hay en esa piscina?

Solución



El triángulo formado por las posiciones de Miriam, Mikel y Daniel es rectángulo, por estar inscrito en una semicircunferencia. Los catetos de ese triángulo valen 10 y 24 m.

La hipotenusa, que es el diámetro de la circunferencia, valdrá

$$\sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26 \text{ m}$$

El radio vale 13 m.

El volumen del agua que hay en la piscina será:

$$\pi \times 13^2 \times 1,8 \cong 955,6 \text{ m}^3 = 955.600 \text{ litros .}$$

Problema 2

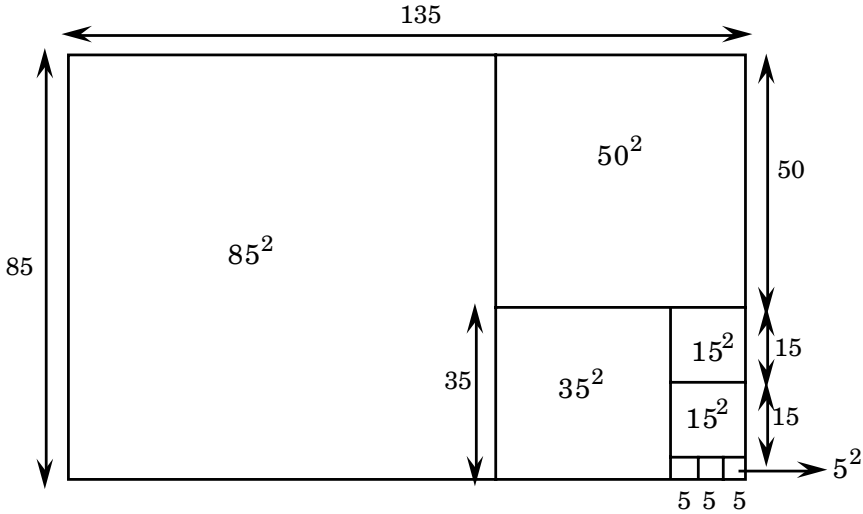
Carlos es un muchacho peculiar: no sabe multiplicar, pero conoce los cuadrados de los números hasta 100. Tiene que calcular el producto 135×85 .

Carlos dibuja un rectángulo de 135 mm y 85 mm. Traza el mayor cuadrado posible en esta rectángulo sobre uno de los lados, hace lo mismo con el rectángulo siguiente y así sucesivamente... De esta forma consigue ocho cuadrados.

Dibuja la figura realizada por Carlos y expresa el número 135×85 como suma de ocho cuadrados perfectos.

Solución

Se construyen, como dice el enunciado, cuadrados de 85, 50, 35, 2 de 15 y 3 de 5 mm.



Entonces: $135 \times 85 = 85^2 + 50^2 + 35^2 + 15^2 + 15^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$

Problema 3

El símbolo $50!$ representa el producto de todos los números naturales desde el 1 hasta el 50, es decir: $50! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 48 \times 49 \times 50$

Si calculas $50!$ ¿en cuántos ceros acabará el producto?

Solución

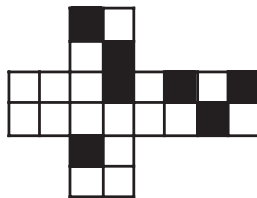
Habrán tantos ceros como múltiplos de 5, más 1 cero por cada número que sea divisible por 5 dos veces (divisible por 25).

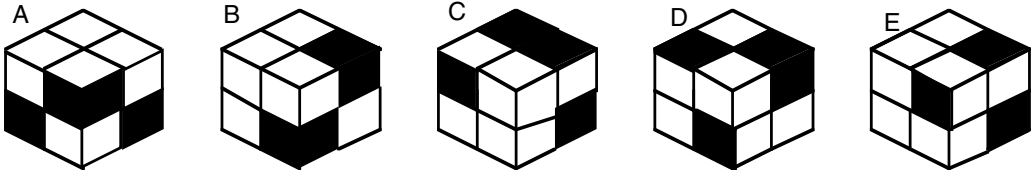
Hay 10 múltiplos de 5, y 2 divisibles por 5 dos veces (25 y 50).

Luego el número $50!$ termina en 12 ceros.

Problema 4

¿Cuál de los cubos A, B, C, D, E tiene el siguiente desarrollo?





Solución

En el desarrollo plano la cara situada a la izquierda no tiene ningún cuadradito negro.

El cubo A tiene el desarrollo dado.

Nota: Para resolver este problema se recomienda recortar un desarrollo plano igual al dado y doblar convenientemente para formar un cubo.

Problema 5

En una clase el 40 % de los alumnos tienen mala vista. El 70 % de los que tienen mala vista llevan gafas y el 30 % restante utiliza lentes de contacto. Son 21 los alumnos de la clase que llevan gafas. ¿Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

- a) 45 alumnos tienen mala vista.
- b) 30 alumnos tienen buena vista.
- c) La clase tiene 100 alumnos.
- d) 10 alumnos utilizan lentes de contacto.
- e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

Solución

Sea N el número total de alumnos.

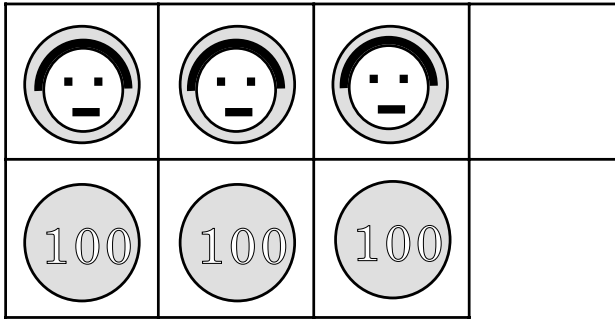
Los que llevan gafas son: $0,7 \times 0,4N = 21 \Rightarrow N = 75$.

- a) Falso porque el número de alumnos con mala vista es $0,4 \times 75 = 30$.
- b) Falso. Los alumnos con buena vista son $75 - 30 = 45$.
- c) Falso. Ya se ha dicho que la clase tiene 75 alumnos.
- d) Falso. Con lentes de contacto hay $0,3 \times 0,4 \times 75 = 9$ alumnos.
- e) Verdadero.

NACIONAL 1999 ALBACETE

Problema 1. SEIS MONEDAS.

Coloca seis monedas en un modelo de casillas como el que indica la figura, de manera que en las monedas de la fila superior se vea la cara y en las monedas de la fila inferior se vea la cruz.



El objetivo es intercambiar las caras con las cruces en el menor número de movimientos.

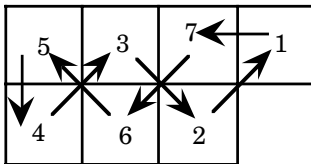
Caras y cruces se mueven por turno hacia cualquier casilla contigua que esté desocupada y cada movimiento puede hacerse hacia arriba, hacia abajo, de lado o en diagonal.

¿Cuál es el número mínimo de movimientos para intercambiarlas?

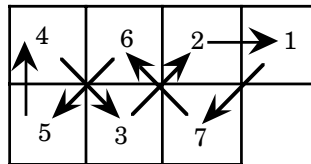
Cuando encuentres la solución trata de resolver un problema parecido, con una fila de cinco casillas con cuatro caras encima de otra fila con cuatro casillas de cruces. Prueba entonces a diseñar una estrategia para resolver este problema en un caso general.

Solución

En el esquema siguiente se muestra la secuencia para intercambiar las caras con las cruces en siete movimientos, que es el número mínimo posible.

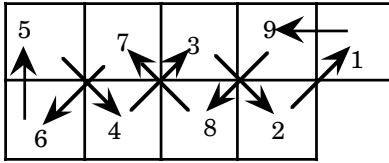


Empieza el jugador
"cruz"

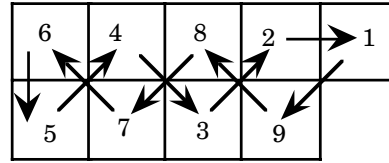


Empieza el jugador
"cara"

En el caso de que el juego se plantease con cuatro caras y cuatro cruces, el esquema es parecido, resultando nueve movimientos.



Empieza el jugador "cruz"

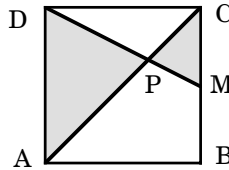


Empieza el jugador "cara"

En el caso general de n caras y n cruces, el número mínimo de movimientos es $2n + 1$, porque cada ficha realiza un único movimiento, excepto la que abre la partida que realiza dos.

Problema 2. CUADRADO.

En un cuadrado ABCD de lado unidad se traza la diagonal AC. Se une el vértice D con el punto medio, M, del lado BC.

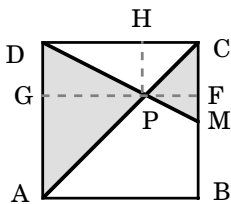


Calcular la razón entre las superficies del cuadrilátero ABMP y el triángulo CDP.

¿Cuál sería la razón si M, en lugar de estar en el punto medio del lado CB, estuviese a $1/3$ del vértice B?

¿Podrías aportar algún tipo de solución para M situado a $1/n$ del vértice B?

Solución



Los triángulos sombreados ADP y CMP son semejantes porque sus lados o son paralelos o están en prolongación, y como el lado CM es la mitad de su homólogo AD, la razón de semejanza es $1/2$.

Entre sus alturas respectivas existe la misma relación, por lo que $FP = \frac{GP}{2}$.

Y, como el lado del cuadrado mide la unidad, será $FP = \frac{1}{3}$ y $GP = \frac{2}{3}$.

Por otra parte, el punto P, por pertenecer a la diagonal del cuadrado, equidista de los lados BC y CD; por tanto, la altura HP del triángulo CDP mide también $\frac{1}{3}$.

Se puede calcular el área de los tres triángulos de la figura, y, por diferencia con la del cuadrado, hallar la del cuadrilátero ABMP.

$$\text{área del triángulo CMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{área del triángulo ADP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\text{área del triángulo CDP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{área del cuadrilátero ABMP} = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{12}$$

La razón entre las áreas del cuadrilátero ABMP y el triángulo CDP valdrá

$$\frac{5/12}{1/6} = \frac{5}{2}$$

En el caso en que M estuviese a $\frac{1}{3}$ del vértice B, los triángulos sombreados seguirán siendo semejantes y la razón de semejanza valdrá ahora $\frac{2}{3}$. Como sus alturas FP y PG suman 1 y la razón entre ambas es la misma, resulta $FP = \frac{2}{5}$ y $GP = \frac{3}{5}$.

Y procediendo como antes:

$$\text{área del triángulo CMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\text{área del triángulo ADP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\text{área del triángulo CDP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\text{área del cuadrilátero ABMP} = 1 - \left(\frac{2}{15} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \right) = \frac{11}{30}$$

La razón entre las superficies del cuadrilátero ABMP y el triángulo CDP valdrá

$$\frac{11/30}{2/10} = \frac{11}{6}$$

En el tercer supuesto, que corresponde al caso en que M estuviese situado a $\frac{1}{n}$ de B, se procede de la misma forma.

$$BM = \frac{1}{n}, \text{ por tanto, } MC = \frac{n-1}{n}$$

La razón de semejanza entre los triángulos sombreados es $\frac{n-1}{n}$, que coincide con la razón entre sus alturas, por lo que:

$$GP + \frac{n-1}{n}GP = 1 \Rightarrow GP = \frac{n}{2n-1} \Rightarrow FP = \frac{n-1}{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{área de CMP} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \\ \text{área de ADP} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{n}{2n-1} \\ \text{área de CDP} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{2n-1} \end{aligned}$$

$$\text{área de ABMP} = 1 - \left[\frac{(n-1)^2}{2n(2n-1)} + \frac{n}{2(2n-1)} + \frac{n-1}{2(2n-1)} \right] = \frac{n^2 + n - 1}{2n(2n-1)}$$

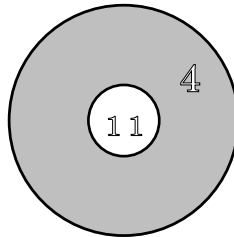
Razón entre las superficies de ABMP y CDP:

$$\frac{n^2 + n - 1}{2n(2n-1)} : \frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{n^2 + n - 1}{n(n-1)}$$

Si en esta expresión final se sustituye n por 2, se obtiene $\frac{5}{2}$, que es la solución del apartado primero. Si se hace $n=3$, se obtiene $\frac{11}{6}$, solución del apartado segundo.

Problema 3. JUGANDO A LOS DARDOS.

Juan y María están jugando a los dardos tirando sobre una diana como la que muestra el dibujo.



La diana está dividida sólo en dos regiones: la interior vale 11 puntos y la exterior vale 4.

Los jugadores tiran los dardos por turnos, sumando los totales, hasta que alguno alcanza una puntuación previamente acordada. Éste será el ganador.

Cuando María y Juan estaban jugando a conseguir 21 puntos, se dieron cuenta de que no eran capaces de conseguir esa puntuación. Así es que cogieron papel y lápiz y se sentaron para averiguar todos los totales posibles. Menos mal que vieron que, a partir de cierto número, cualquier puntuación era posible. Entonces acordaron que en el futuro siempre fijarían un total suficientemente grande.

Encuentra todos los totales imposibles de obtener en este juego.

Investiga acerca de los números imposibles de obtener cuando se definen otras puntuaciones para cada región de la diana.

Tal vez puedas descubrir una fórmula general para saber la máxima puntuación imposible cuando la región interior vale m puntos y la exterior n puntos.

Solución

Los números que pueden obtenerse son de la forma $N = 11a + 4b$, siendo a y b números naturales, que representan el número de veces que se da en el 11 y en el 4, respectivamente.

Veamos qué puntuaciones pueden obtenerse. Para ello escribimos los números naturales hasta 50. Tachamos en primer lugar los múltiplos de 11 y los múltiplos de 4; después, a partir de 11, de 22, de 33, de 44, tachamos de 4 en 4, y, a partir de 4, de 8, de 12, ..., tachamos de 11 en 11. Resulta la siguiente tabla:

1	2	3	x	5	6	7	x	9	10
x	x	13	14	x	x	17	18	x	x
21	x	x	x	25	x	x	x	29	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Los que quedan sin tachar son los totales imposibles, entre ellos el 21. Observamos que el mayor número imposible es $29 = 11(4 - 1) - 4$.

Consideremos otras puntuaciones, por ejemplo, 7 y 5. ahora los números que pueden obtenerse son de la forma $N = 7a + 5b$.

Procediendo de forma análoga al primer caso:

1	2	3	4	x	6	x	8	9	x
11	x	13	x	x	16	x	18	x	x
x	x	23	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

El mayor número imposible es $23 = 7(5 - 1) - 5$.

Podemos generalizar para el caso de que sean m y n las puntuaciones. El mayor número imposible será $N = m(n - 1) - n$, con la condición de que m y n sean primos entre sí, porque si no lo son, sólo se obtendrán números múltiplos del máximo común divisor de m y n .

Por ejemplo: sean 9 y 6 las puntuaciones. Los números que pueden obtenerse son de la forma $N = 9a + 6b = 3(3a + 2b)$, que es múltiplo de 3, máximo común divisor de 9 y 6. Por tanto, son imposibles los que no son múltiplos de 3.

Otra forma

Pueden obtenerse sólo números de la forma $N = 11a + 4b$, con a y b números naturales.

* $a = 0 \Rightarrow N = \overset{\bullet}{4}$ Se obtienen los múltiplos de 4.

* $a = 1 \Rightarrow N = 11 + \overset{\bullet}{4} = (8 + 3) + \overset{\bullet}{4} = \overset{\bullet}{4} + 3$, a partir de 11.

* $a = 2 \Rightarrow N = 22 + \overset{\bullet}{4} = (20 + 2) + \overset{\bullet}{4} = \overset{\bullet}{4} + 2$, a partir de 22.

* $a = 3 \Rightarrow N = 33 + \overset{\bullet}{4} = (32 + 1) + \overset{\bullet}{4} = \overset{\bullet}{4} + 1$, a partir de 33.

De aquí en adelante se obtienen todos los números naturales.

Entonces la máxima puntuación imposible es: $11 \times 3 - 4 = 33 - 4 = 29$.

Si las puntuaciones fueran 5 y 7, procediendo de análoga forma, llegamos al resultado: $7 \times 4 - 5 = 28 - 5 = 23$.

ÍNDICE POR MATERIAS

(Se indica página y número del problema)

Ecuaciones

14-2	16-2	19-3	26-1	31-2
40-2	44-3	48-3	51-2	55-1
58-3	69-3	79-3	88-2	95-4
96-5	97-1	113-2	125-6	128-5
130-8	134-2	135-5	139-2	144-2
161-1	177-1	180-4	181-1	191-5
193-3	194-6	199-6	200-1	206-3
218-4				

Geometría

14-3	18-2	20-2	23-3	25-5
29-6	31-1	33-1	35-4	39-4
41-3	41-4	43-2	46-5	47-2
49-5	51-1	51-3	54-5	56-2
60-3	63-3	65-4	66-1	70-1
70-2	73-4	74-1	78-1	81-1
83-3	86-1	88-3	89-1	90-2
91-3	94-2	97-2	99-4	105-5
107-3	108-1	110-4	112-2	116-3
117-5	121-4	123-1	125-7	126-1
134-3	135-4	137-3	140-3	142-3
143-1	145-3	147-1	149-6	152-4
153-6	156-2	161-3	163-3	170-2
170-3	172-3	173-4	174-1	176-3
179-1	185-3	189-2	191-6	194-4
196-2	197-4	200-2	206-1	207-4
208-2	215-3	217-1	220-1	221-4
224-2				

Gráficas

15-1	40-1	45-4	49-6	84-4
99-3	118-6	124-3	128-6	148-5
157-1	190-3			

Números enteros y racionales

13-1	17-3	22-1	22-2	25-6
27-2	28-4	28-5	33-4	35-3
38-3	43-1	47-1	58-4	60-2
63-2	69-4	71-3	72-2	72-3
75-2	76-3	79-2	81-4	82-2
86-2	87-3	91-4	94-3	103-1
104-2	104-3	106-1	106-2	108-2
110-6	111-1	115-2	117-4	119-1
120-2	120-3	122-6	123-2	124-4
126-8	127-2	131-1	131-2	133-1
133-5	133-6	136-6	137-1	137-2
140-4	141-1	141-2	147-2	148-4
150-1	151-2	152-3	156-3	159-2
162-2	166-1	166-2	168-3	169-1
171-1	171-2	176-4	178-3	178-4
191-4	192-1	195-1	198-5	202-4
204-5	205-6	208-1	213-4	214-2
215-4	218-3	220-2	221-3	222-5
226-3				

Probabilidad

20-3	27-3	48-4	71-1	110-5
115-1	122-5	128-4	180-2	

Varios

17-1	19-1	24-4	32-3	34-2
37-1	37-2	53-4	59-1	63-1
68-2	76-4	87-1	92-5	93-1
105-4	109-3	127-3	129-7	132-4
138-4	139-1	143-4	146-4	147-3
153-5	157-4	158-5	159-1	175-2
177-2	182-2	187-4	189-1	192-2
194-5	196-3	201-3	206-2	209-3
210-4	212-1	213-3	217-2	219-5
223-1				