

MULTIPLICACIÓN DE UN CAPITAL

Trataremos aquí fundamentalmente de cómo saber los años que han de transcurrir para que un capital, sometido a un aumento porcentual fijo anual, pueda duplicarse, triplicarse, etc. Todo ello sin necesidad de recurrir a las fórmulas financieras bien conocidas y sustituyendo éstas por una sencilla división que nos va a dar con una excelente aproximación el tiempo que pretendemos calcular.

Como introducción, empezaremos observando lo que ocurre cuando consideramos una serie encadenada de aumentos y disminuciones porcentuales. Por ejemplo, si el precio de la vivienda nueva, en un cierto país, sube un 18% en un año y el 17% en el siguiente, para volver a aumentar un 15% durante el tercer año, todos sabemos que el aumento total porcentual en esos tres años no sería $18+17+15 = 50\%$, sino que se calcula del siguiente modo: $1,18 \cdot 1,17 \cdot 1,15 = 1,58769$. Luego el aumento total habrá sido del 58,769%.

Del mismo modo, si un comerciante de zapatos los vende aumentando un 30% el precio de coste y a sus amigos les rebaja posteriormente un 30% el precio de venta al público, se podría pensar que no ganaría pero tampoco perdería nada. Evidentemente eso no es así, pues procediendo como en el caso anterior nos queda: $1,30 \cdot 0,70 = 0,91$ por lo que el comerciante sufriría una pérdida del 9%. En general, si encadenamos una subida del $r\%$ con una bajada del $r\%$ se sufre una disminución del $r^2/100\%$.

Dicho todo esto, lo que trataremos de determinar ahora es el tiempo que ha de transcurrir para que se duplique un capital que va aumentando anualmente un porcentaje fijo determinado. Por ejemplo, supongamos que el valor de la vivienda se revaloriza cada año un 10%, o bien, que el capital depositado en un fondo de pensiones está impuesto a un tipo fijo de interés compuesto anual del 3,5%.

Conocemos una fórmula que nos va a permitir resolver este tipo de problemas utilizando el cálculo logarítmico, pero nosotros vamos a obtener con una gran aproximación el mismo resultado realizando una simple división. Consiste en dividir 70 entre el porcentaje y, por consiguiente, el tiempo no va a depender del valor de la vivienda o del capital. Así en el primer caso, para que se duplique el valor de la vivienda sería necesario que transcurriesen $70/10 = 7$ años, mientras que en el segundo caso para que se duplique el capital del fondo de pensiones harían falta $70/3,5 = 20$ años.

Pasemos ahora a justificar todo esto. Se sabe que una cantidad de dinero C a la que se le aplica una subida fija anual de un $r\%$ se convierte al cabo de t años en:

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

En el caso que nos ocupa tendremos:

$$2C = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 2 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow \ln 2 = t \cdot \ln \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{r}{100}\right)}$$

Por lo que de momento se observa que el tiempo no depende de C. Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

podemos decir que en las proximidades de cero $\ln(1+x) \cong x$, por lo que el caso que estamos tratando se verificará que $\ln\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cong \frac{r}{100}$. Cuanto menor sea $r/100$ y por lo tanto r , tanto más precisa será la aproximación.

Sustituyendo arriba nos queda:
$$t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)} \cong \frac{\ln 2}{\frac{r}{100}} = \frac{100 \cdot \ln 2}{r} \cong \frac{70}{r}$$

Análogamente, para calcular rápidamente cuándo se triplicará, cuadruplicará,... el capital inicial invertido a interés compuesto anual, se realizará el mismo proceso y quedará en general:

$$t = \frac{100 \cdot \ln k}{r}$$

siendo k la constante de multiplicación del capital. Así, en el caso de que queramos calcular t con objeto de que se triplique el capital, tendremos:

$$t = \frac{100 \cdot \ln 3}{r} \cong \frac{110}{r}$$

Para que el capital se cuadriplique: $t = \frac{100 \cdot \ln 4}{r} \cong \frac{140}{r}$. Y así sucesivamente.

Finalmente, haremos la observación de que con las revalorizaciones anuales de la vivienda en los últimos años y utilizando estas simples divisiones es fácil percibir el considerable aumento del valor de la misma.