

Tema 10

RELATIVIDAD GENERAL (II): Gravedad y espaciotiempo

10.1 Relatividad de las medidas del tiempo

Por la relatividad especial sabemos que cuando un reloj se mueve rápidamente respecto a un observador, a éste le parece que el intervalo entre cada "tic" es distinto (más largo) al medido cuando el reloj estaba en reposo. Ésta es la *dilatación temporal cinemática*. Es de esperar que ocurra algo parecido cuando el reloj se mueva a velocidad variable.

Por otro lado, según el principio de equivalencia, los efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración. Por tanto, la simple *presencia de materia en las proximidades de un reloj hará también que éste marche más despacio*, aunque el observador no se mueva respecto a él. Ésta es la *dilatación temporal gravitatoria*.

Einstein sugirió un experimento imaginario con el que puede calcularse, para un campo gravitatorio débil como el de la Tierra, el valor de la dilatación temporal gravitatoria (Fig. 10.1).

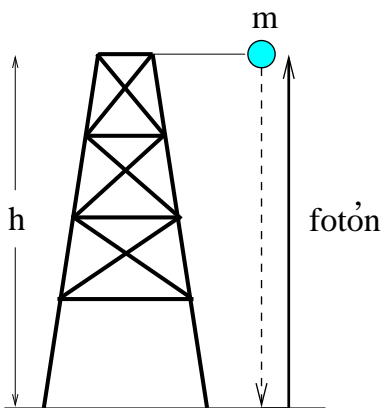


Figura 10.1: Experimento que muestra la dilatación temporal gravitatoria.

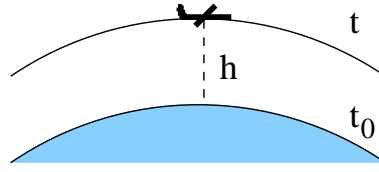


Figura 10.2: Dilatación temporal gravitatoria en el experimento de Hafele y Keating.

Se deja caer una masa m desde lo alto de una torre de altura h sobre la superficie de la Tierra. Al llegar al suelo su velocidad será $v = \sqrt{2gh}$ y por tanto su energía inicial, $E_1 = mc^2$, habrá aumentado en una cantidad igual a la energía cinética adquirida, de modo que en el suelo vale $E_2 = E_1 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + mgh$ (expresión aproximada, no relativista). Supongamos que toda esa energía se convierte en un fotón de energía $E_2 = h\nu_2$ que es emitido hacia arriba. Por conservación de la energía, la energía del fotón cuando alcanza la cima de la torre deberá ser $E_1 = h\nu_1$, es decir, su frecuencia ν habrá disminuido: *un fotón que escapa de un campo gravitatorio se desplaza al rojo*. Por tanto,¹

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{mc^2}{mc^2 + mgh} = \frac{1}{1 + gh/c^2} \approx 1 - \frac{gh}{c^2} \\ \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} &= 1 - \frac{gh}{c^2} \quad \text{o bien} \quad \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2} = \frac{gh}{c^2}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Este experimento es ideal, pero una versión práctica del mismo pudo llevarse a cabo por *Pound y Rebka* en 1960: la emisión γ de una transición atómica se debe desplazar al rojo una fracción 2.46×10^{-15} cuando se mide tras ascender los 22.6 m de altura de la torre del Jefferson Physical Laboratory en Harvard. Esta pequeñísima diferencia se pudo apreciar gracias al efecto Mossbauer, y la predicción fue verificada con una aproximación del 1%.

Este cambio en las frecuencias debe ser el mismo que experimentan los tics de un reloj. Recordemos que el tiempo entre dos tics (periodo) es el inverso de la frecuencia. Por tanto, deducimos que el tiempo transcurre más lentamente cuanto más intenso es el campo gravitatorio. Así, si t es el intervalo de tiempo entre dos sucesos medido a una altura h sobre la superficie de la Tierra y t_0 es el medido a nivel del suelo tenemos que:²

$$t = t_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right). \quad (10.2)$$

En el experimento de *Hafele y Keating* (1971), que hemos mencionado en un capítulo precedente, con el que se midieron los comportamientos de relojes abordo de aviones comerciales, se combinan la dilatación temporal cinemática y la gravitatoria (Fig. 10.2). La primera

¹Estamos asumiendo que $h \ll R_\oplus$, el radio de la Tierra. Podemos sin embargo conseguir un resultado más general cambiando gh por $\frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus} - \frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus + h}$. Recordemos que $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2$, donde M_\oplus es la masa de la Tierra.

²La expresión exacta, válida también cuando el campo gravitatorio es intenso, se puede deducir de las ecuaciones de campo de Einstein: $t = t_0 \left[1 - \frac{2G_N M}{(R+h)c^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{2G_N M}{Rc^2} \right]^{-1/2}$.

es debida al movimiento relativo entre los relojes en vuelo y el reloj de referencia en Washington, que a su vez se mueve respecto al centro de la Tierra (sistema localmente inercial por ser un sistema en caída libre hacia el Sol). Su efecto es el retraso de los relojes que vuelan hacia el este y el adelanto de los que vuelan hacia el oeste. La segunda se debe a que la intensidad del campo gravitatorio para los relojes abordo es menor que para el que se queda en tierra, lo que se traduce en un adelanto adicional, que ya estamos en situación de deducir explícitamente usando (10.2). El resultado confirma las predicciones con una precisión del 10%.

Ejercicio: Reproducir las predicciones del experimento de Hafele y Keating (tabla siguiente), sabiendo que los aviones en ruta hacia el este volaron durante 41.2 h a una altura media de 8900 m mientras que los que iban en ruta hacia el oeste volaron durante 48.6 h a una altura media de 9400 m. Suponer para simplificar que los vuelos eran ecuatoriales con velocidades medias respecto al suelo de 713 km/h hacia el este y 440 km/h hacia el oeste. Un cálculo más preciso exige conocer las hojas de ruta y las velocidades de los aviones en diferentes tramos en los que se subdividieron los vuelos [Hafele & Keating, *Science* **177** (1972) 166].

Diferencia de tiempos	Hacia el este	Hacia el oeste
Dilatación cinemática	-184 ± 18 ns	96 ± 10 ns
Dilatación gravitatoria	144 ± 14 ns	179 ± 18 ns
Efecto total	-40 ± 23 ns	275 ± 21 ns
Efecto observado	-59 ± 10 ns	273 ± 21 ns

En 1976 el *Smithsonian Astrophysical Observatory* lanzó un cohete Scout hasta una altura de 10000 km. A esa altura un reloj debe correr 4.25 partes en 10^{10} más rápido que a nivel del suelo.³ Durante dos horas de caída libre, el cohete estuvo transmitiendo pulsos de un oscilador maser que actuaba como reloj, los cuales se comparaban con los pulsos de otro reloj similar situado en tierra. El resultado confirmó la dilatación temporal gravitatoria al 0.02% [Vessot *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 2081], su mejor determinación hasta la fecha.

10.2 Relatividad de las medidas espaciales

Ya sabemos que el movimiento relativo entre dos observadores hace que no estén de acuerdo en las medidas de longitudes que realizan. Por tanto, según el principio de equivalencia hemos de esperar que las medidas de longitudes también deban alterarse cuando exista de una masa en las proximidades, aunque el observador se encuentre en reposo. Este hecho implica un *cambio en las reglas de la geometría*, que no son otra cosa que las reglas para definir distancias. Para comprender este cambio hemos de hacer un inciso con el fin de introducir el concepto de métrica. Hemos podido hablar de relatividad especial sin mencionar la métrica, pero en relatividad general este concepto es ineludible.

³Compruébese que $\Delta t/t = G_N M_{\oplus} h / (c^2 R_{\oplus} (R_{\oplus} + h))$.

10.3 Métrica, curvatura y geodésicas

10.3.1 El concepto de métrica

Los objetos físicos tienen significado independientemente del sistema de coordenadas que usemos. En cambio, las coordenadas cambian de un sistema de referencia a otro. Pues bien, el *tensor métrico* g_{ij} es un “objeto” que nos permite determinar longitudes a partir de las coordenadas de los puntos del espacio (matemáticamente, convierte vectores en escalares).⁴ Así, el cuadrado de la longitud del vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es

$$|\vec{a}|^2 = \sum_{i,j=1,n} g_{ij} a_i a_j, \quad (10.3)$$

donde los n es el número de dimensiones del espacio. La métrica es expresable en distintos sistemas de coordenadas, pero la longitud del objeto físico es siempre la misma (invariante). Ahora bien, tal longitud depende de cuál sea la geometría del espacio.

A continuación discutiremos distintas geometrías, es decir distintas métricas, y daremos ejemplos ilustrativos de una misma métrica expresada en sistemas de coordenadas diferentes.

10.3.2 La geometría euclídea

Es la geometría del *espacio plano*. Se caracteriza por cumplir los cinco postulados de Euclides, de los cuales el más representativo es el quinto: en el plano, por un punto exterior a una recta pasa *una y sólo una* recta paralela (nunca llega a cortarla) a la recta dada. En general llamaremos *geodésica* a la mínima distancia entre dos puntos, que es estrictamente “recta” en la geometría euclídea.

Ejemplo A: Espacio euclídeo bidimensional

Se trata de una superficie bidimensional plana.

Coordenadas cartesianas:

Las coordenadas cartesianas de un vector en 2D son $\vec{a} = (a_x, a_y)$ Para determinar la métrica lo más sencillo en general es considerar el vector elemento de línea $d\vec{\ell} = (dx, dy)$,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad g_{xx} = g_{yy} = 1, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad (10.4)$$

⁴Un tensor de rango n es, en general, un objeto con n índices (cada uno de los cuales abarca las D dimensiones del espacio vectorial correspondiente) con propiedades bien definidas bajo un grupo de transformaciones. Así, en el espaciotiempo de 4D (índices $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$), y bajo las transformaciones de Lorentz, un *escalar* es un tensor de rango cero (invariante); un *vector* como $x^\mu = (ct, \vec{x})$ o $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ tiene rango uno; la métrica $g^{\mu\nu}$ y otros tensores de dos índices tienen rango dos; etc.

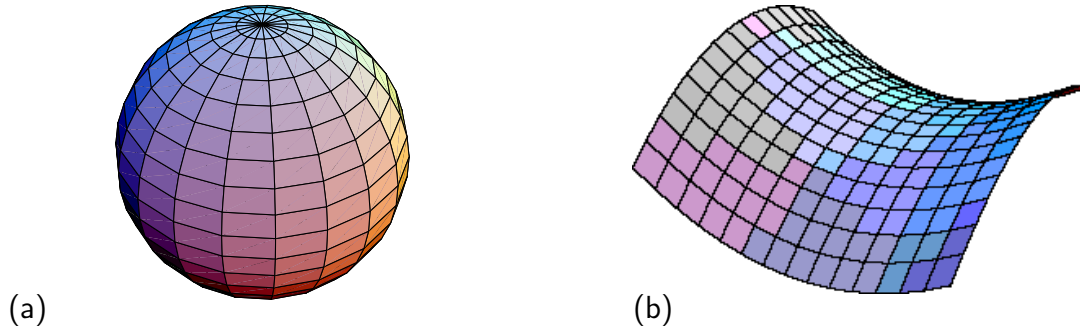


Figura 10.3: Espacios bidimensionales con curvatura constante positiva (a) y negativa (b).

o en forma matricial,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Coordenadas polares:

Las coordenadas polares de un vector en 2D son $\vec{a} = (a_r, a_\varphi)$, donde $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Usando de nuevo el vector elemento de línea,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \Rightarrow g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = 0. \quad (10.6)$$

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \Rightarrow C = 2\pi r. \quad (10.7)$$

Ejemplo B: Superficie de una esfera en 3D (geometría no euclídea)

Véase Fig. 10.3a. Lo más cómodo es usar coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) . Como la superficie de la esfera tiene dos dimensiones, sólo dos coordenadas serán suficientes para determinar un punto en este espacio (el radio $r \equiv R_c$ es constante).

Coordenadas esféricas:

Recordemos que en 3D, $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$. Por tanto, usando que $r = R_c$ y $dr = 0$, tenemos

$$d\ell^2 = R_c^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \Rightarrow g_{\varphi\varphi} = R_c^2, \quad g_{\vartheta\vartheta} = R_c^2 \sin^2 \vartheta, \quad g_{\vartheta\varphi} = g_{\varphi\vartheta} = 0. \quad (10.8)$$

Coordenadas polares:

Conviene hacer el cambio de variables:

$$r = R_c \vartheta \quad \Rightarrow \quad d\ell^2 = dr^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R_c} \right) d\varphi^2 \quad (10.9)$$

que podemos comparar con la métrica del espacio euclídeo: $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi R_c \sin \left(\frac{r}{R_c} \right) \quad [C \rightarrow 2\pi r \text{ cuando } r \ll R_c]. \quad (10.10)$$

Vemos que el cociente de la longitud de la circunferencia y su diámetro $d = 2r$ es $C/d < \pi$.

10.3.3 La geometría de Minkowski

Es la geometría de la relatividad especial, la geometría del *espaciotiempo plano*. Como sabemos, un punto en el espaciotiempo (suceso) queda determinado por cuatro coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ en un sistema de referencia dado. Las coordenadas de un suceso en distintos sistemas de referencia (es decir, según distintos observadores inerciales) están relacionadas mediante las transformaciones de Lorentz. Ya hemos visto que estas transformaciones dejan invariante el *intervalo* entre dos sucesos:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (10.11)$$

Por tanto la métrica de Minkowski, es (en coordenadas cartesianas):

$$g = \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

En coordenadas esféricas es fácil ver que:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (10.13)$$

Recordemos que la *distancia propia* viene dada por el intervalo (tipo espacial) entre dos sucesos según un observador para el que éstos son simultáneos ($dt = 0$): $d\ell = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Por otro lado, el *tiempo propio* viene dado por el intervalo (tipo temporal) entre dos sucesos que tienen lugar en el mismo lugar para un observador ($dx = dy = dz = 0$): $cd\tau = \sqrt{ds^2} = cdt$.

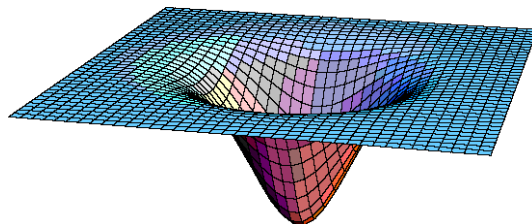


Figura 10.4: Espacio bidimensional con curvatura variable.

10.3.4 Geometrías no euclídeas

Son aquellas en las que el postulado de las rectas paralelas se sustituye por otro postulado distinto. Existen además otras formas de caracterizar las geometrías:

(1) Es un teorema de Euclides bien conocido que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° . Esto no es cierto en geometrías no euclídeas.

(2) El cociente la longitud de una circunferencia y su diámetro es π sólo en geometrías euclídeas.

Elíptica

En el plano, por un punto exterior a una recta no se puede trazar *ninguna* recta paralela a la recta dada. Un ejemplo de esta geometría es la superficie de una esfera (Fig. 10.3a), siendo las líneas rectas (geodésicas) los círculos máximos. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre menor que π . Se dice que su *curvatura es siempre positiva*.

Hiperbólica

En el plano, por un punto exterior a una recta se pueden trazar *infinitas* rectas paralelas a la recta dada. Se trata de la geometría de la superficie de una silla de montar (Fig. 10.3b). La suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre mayor que π . Se dice que su *curvatura es siempre negativa*.

General: geometría de Riemann

Tanto la geometría elíptica como la hiperbólica tienen curvatura constante: un objeto no sufre distorsiones al moverse de un punto a otro. La geometría de Riemann es la más general posible y por tanto, en cuatro dimensiones, es la geometría del espaciotiempo. En ella la *curvatura varía de un punto a otro*. Un ejemplo ilustrativo en 2D aparece en la Fig. 10.4.

10.4 Las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein (ECE) *determinan* la métrica del espaciotiempo a partir de la distribución de materia. Se trata de igualdades que involucran las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ (tensor curvatura que se construye a partir de segundas derivadas del tensor métrico), la curvatura escalar \mathcal{R} (que se obtiene a partir del tensor curvatura) y el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ que describe la configuración de masa y energía en un punto del espaciotiempo:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (10.14)$$

donde los índices μ y ν van de 0 a 3 (las cuatro dimensiones del espaciotiempo) y G_N es la constante de Newton. La constante Λ es la llamada constante cosmológica que introdujo Einstein en un principio para obtener un universo estático y que luego retiró ante la evidencia experimental de un universo en expansión. Curiosamente y desde hace pocos años los datos experimentales parecen favorecer una constante cosmológica no nula.

Atendiendo a la simetría del campo gravitatorio que se pretenda describir puede anticiparse la forma del tensor métrico que lo representa, antes de resolver las ECE. Dos casos son de especial relevancia: el campo estático e isótropo (el creado por un planeta o una estrella, por ejemplo) y el campo homogéneo e isótropo (el universo a gran escala, de acuerdo con el principio cosmológico). La primera se conoce como métrica general estática e isótropa, que conduce a la *métrica de Schwarzschild* cuando se aplican las ECE:⁵

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (10.15)$$

(Nótese que se reduce a la métrica de Minkowski lejos de la masa M). La segunda es la *métrica de Robertson-Walker*, que conduce a los diferentes modelos de universo (los estudiaremos en un próximo capítulo) cuando se aplican las ECE:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right). \quad (10.16)$$

Otros ejemplos de configuraciones del espaciotiempo para las que se conoce la solución de las ECE son la métrica de Kerr (campo creado por masas en rotación), las cuerdas cósmicas (campos creados por hilos de materia) y las paredes de dominio (campos creados por planos de materia).

⁵Nótese que de la métrica de Schwarzschild se deduce la expresión de la dilatación temporal que habíamos adelantado.