3.14 Soluciones a los ejercicios del capítulo 3

Ejercicio 3.5.1

MMCLXXXVII es 2187, DCCXCIV es 794, CXCCXC no tiene sentido, CDXCIX es 499

Ejercicio 3.5.2

325	CCCXXV
1.252	MCCLII
3.999	MMMCMXCIX
954.321	$\overline{\mathrm{CMLIV}}$CCCXXI
123.456	$\overline{\mathrm{CXXIII}}$CDLVI
1.000.000	$\overline{\mathrm{M}}$

Ejercicio 3.7.1

Para que sea fácil la notación lo hacemos con un número de tres cifras que escribimos en forma polinómica.

$$abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

Toda la demostración consiste en saber que si dos números son divisibles por otro también lo es la suma y la diferencia.

- Por 2 y 5:

$$abc = a \cdot 2 \cdot 50 + b \cdot 2 \cdot 5 + c \Rightarrow c = abc - a \cdot 2 \cdot 50 + b \cdot 2 \cdot 5$$

- Por 3 y 9:

$$\begin{aligned} abc &= a \cdot (99+1) + b \cdot (9+1) + c = \\ &= a \cdot 99 + b \cdot 9 + a + b + c \Rightarrow \\ c &= abc - a \cdot 99 - b \cdot 9 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7.2

1.107.421 es divisible por 7 pues

$$(1 + 3.2 + 2.4) - (7 + 3.0 + 2.1) + 1 = 7$$

Ejercicio 3.7.3

Escribiendo el número en forma polinómica y sacando factor común

$$abcabc = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c =$$

$$= 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c =$$

$$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) =$$

$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c)$$

Ejercicio 3.7.4

Un número de tres cifras se escribe abc, si es divisible por 11 se tendrá

$$c + a - b = \overset{\circ}{11}$$

si la suma de las cifras es 10

$$a + b + c = 10$$

y la diferencia entre el número y el que resulta...

$$abc - cba = 297$$

que se puede poner como

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) &= 297 \\ 99a - 99c &= 297 \\ a - c &= 3 \end{aligned}$$

Nos quedaría el sistema $\left.\begin{aligned} a - b + c &= \overset{\circ}{11} \\ a + b + c &= 10 \\ a - c &= 3 \end{aligned}\right\}$ la primera ecuación es en realidad dos ecuaciones $a - b + c = 0$ ó $a - b + c = 11$ por lo que tenemos dos sistemas (sólo ponemos $0, 11$ pues el siguiente múltiplo de 11 es 22 y a, b, c toman valores del 0 al 10). Resolvemos cada uno

$$\left.\begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ a + b + c &= 10 \\ a - c &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 4, b = 5, c = 1 \Rightarrow abc = 451$$

$$\left.\begin{aligned} a - b + c &= 11 \\ a + b + c &= 10 \\ a - c &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{la solución no tiene sentido}$$

Ejercicio 3.7.5

Como un primo es 2 y otro es el 5 la multiplicación de todos ellos será múltiplo de 10 y por tanto acabará en 0. Si la penúltima fuera un 6, al acabar en 60 sería múltiplo de 4 lo que es imposible pues este no es primo. La única solución es que acabe en 90.

Ejercicio 3.8.2

$$11101010_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 234_{10}$$

$$\begin{aligned} 100101100 &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \\ +1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 &= 300_{10} \end{aligned}$$

$$10101010 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 170_{10}$$

Ejercicio 3.8.3

Tras hacer las correspondientes divisiones obtenemos:

$$\begin{aligned} 173_{10} &= 10101101_2 \\ 215_{10} &= 11010111_2 \\ 250_{10} &= 11111010_2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.8.5

$$1010101_2 + 111010_2 = 10001111_2$$

Si pasamos a decimal

$$1010101_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 85_{10}$$

$$111010 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 58_{10}$$

$$10001111 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 143_{10}$$

y efectívamente

$$85 + 58 = 143$$

Ejercicio 3.8.7

Ya hemos visto el bit, unidad mínima de almacenamiento que toma los valores 0 ó 1, y el byte, que es la unión de 8 bites. A partir de esta unidad se multiplica de $1024 = 2^{10}$ en 1024.

1 kilobyte = 1024 byte
1 megabyte = 1024 kilobyte = 1024×1024 byte
1 gigabyte = 1024 megabyte

Ejercicio 3.10.1

$$1999_{10} = 7CF_{16} = 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 15 = 1999$$

Ejercicio 3.10.2

Con los ejercicios que hemos hecho podemos entenderlo facilmente. En el sistema decimal usamos más cifras que en el hexadecimal y a la hora de almacenar en memoria es fundamental disponer de esta. 1999 tiene cuatro cifras, mientras que su equivalente hexadecimal $7CF$ tiene tres cifras.

Ejercicio 3.11.1

SOS se transmite $\bullet\bullet\bullet \quad - - - \quad \bullet\bullet\bullet$

Ejercicio 3.11.4

Este ejercicio es precioso. De lo mejor para que nuestros alumnos comprueben que tras un enunciado raro o monstruoso se esconde una nimiedad. Pasamos 11_k y 1331_k a decimal y operamos

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{49} \frac{11_k}{\sqrt[3]{1331_k}} &= \sum_{k=5}^{49} \frac{1 \cdot k + 1}{\sqrt[3]{1 \cdot k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1}} = \\ &= \sum_{k=5}^{49} \frac{k+1}{\sqrt[3]{(k+1)^3}} = \sum_{k=5}^{49} \frac{k+1}{k+1} = \sum_{k=5}^{49} 1 = 1 + \overset{45}{\ldots} + 1 = 45\end{aligned}$$