5.5 Soluciones a los ejercicios del capítulo 5

Ejercicio 5.3.1

Dibujamos el recinto rectangular y la cabra, como máximo, trazará con la cuerda arcos de circunferencia. Sumamos las áreas de los sectores circulares (semicircuferencias o cuadrantes) obteniendo $\frac{113}{4}\pi\ m^2$

Ejercicio 5.3.2

El primer número es AA, así que A=1 pues cualquier otra cifra daría un múltiplo de 11. Debemos descartar las cifras pares ya que no tendríamos primos por acabar en cifra par y también descartamos el 5 por la misma razón, serían divisibles por cinco. Sólo nos quedan las cifras 3, 7, 9.

Nos fijamos ahora en el primo AAAC. Si C=3 tendríamos 1113 que es divisible por 3, si C=9 tendríamos 9993 que es divisible por 3, así que C=7.

Por ahora tenemos los primos 11, B1B, B17D, 1117 y las opciones:

- B=3, D=9
  Serían los ¿primos? 313 y 3179. Para comprobar si 313 es primo debemos dividirlo por todos los primos menores que $\sqrt{313} = 17.\cdots$. Es decir dividimos por 7, 11, 13 y 17 y no da división exacta, luego es primo. Pero el número 3179 no es primo pues según la regla del 11 $(9+1-7-3=0)$ es divisible por 11. Esta opción no sirve

- B=9, D=3
  Serán 919 y 9173, y haciendo la comprobación de dividir por todos los primos menores que sus raíces cuadradas no aparece ninguna división exacta.

Los números pedidos son **11, 919, 9173 y 1117**.

Ejercicio 5.3.3

Si tenemos x calles, cada calle se corta con $x-1$ calles, teniendo $\frac{x\,(x-1)}{2}$ intersecciones. Dividimos por dos pues contamos dos veces las intersecciones. Como en cada cruce-intersección hay una farola, debemos resolver la ecuación de 2^o grado

$$\frac{x\,(x-1)}{2} = 66$$

cuyas soluciones son $x = 12, x = -11$. Está claro que hay que descartar está última y el pueblo tendrá 12 calles.

Ejercicio 5.3.4

Este problema es equivalente al siguiente: ¿cuál es la base para poder expresar cualquier número del 1 al 40 mediante cuatro potencias de esa base?

- $1, 2, 2^2, 2^3$. Podríamos pesar como máximo $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15kg$
- $1, 3, 3^2, 3^3$. Podemos pesar como máximo $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40kg$. Ahora bien, ¿es posible expresar cualquier número del 1 al 40 como combinación, mediante sumas o restas, de esas potencias? Si:

$1 = 1$	$11 = 9 + 3 - 1$	$21 = 27 - 9 + 3$	$31 = 27 + 3 + 1$
$2 = 3 - 1$	$12 = 9 + 3$	$22 = 27 - 9 + 3 + 1$	$32 = 27 + 9 - 3 - 1$
$3 = 3$	$13 = 9 + 3 + 1$	$23 = 27 - 3 - 1$	$33 = 27 + 9 - 3$
$4 = 3 + 1$	$14 = 27 - 9. - 3 - 1$	$24 = 27 - 3$	$34 = 27 + 9 - 3 + 1$
$5 = 9 - 3 - 1$	$15 = 27 - 9 - 3$	$25 = 27 - 3 + 1$	$35 = 27 + 9 - 1$
$6 = 9 - 3$	$16 = 27 - 9 - 3 + 1$	$26 = 27 - 1$	$36 = 27 + 9$
$7 = 9 - 3 + 1$	$17 = 27 - 9 - 1$	$27 = 27$	$37 = 27 + 9 + 1$
$8 = 9 - 1$	$18 = 27 - 9$	$28 = 27 + 1$	$38 = 27 + 9 + 3 - 1$
$9 = 9$	$19 = 27 - 9 + 1$	$29 = 27 + 3 - 1$	$39 = 27 + 9 + 3$
$10 = 9 + 1$	$20 = 27 - 9 + 3 - 1$	$30 = 27 + 3$	$40 = 27 + 9 + 3 + 1$

Ejercicio 5.3.5

Un capicúa de cuatro cifras es de la forma *abba* que en el sistema de numeración decimal significa

$$\begin{aligned} abba &= 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot b + a = 1001 \cdot a + 110 \cdot b = \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a + 10 \cdot 11 \cdot b = 11 \cdot (7 \cdot 13 \cdot a + 10 \cdot b) = \dot{11} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.6

Escribimos las siguientes inecuaciones

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &> 0 \\ (y-1)^2 &> 0 \\ (z-1)^2 &> 0 \end{aligned}$$

y las desarrollamos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &> 0 \\ y^2 - 2y + 1 &> 0 \\ z^2 - 2z + 1 &> 0 \end{aligned}$$

pasamos los términos $-2x, -2y, -2z$ al otro lado, quedando

$$\begin{aligned} x^2+1 &> 2x \\ y^2+1 &> 2y \\ z^2+1 &> 2z \end{aligned}$$

y multiplicándolas obtenemos

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) > 8xyz$$

Claro está que se puede hacer la multiplicación conservando el signo pues $x^2+1>0$

Ejercicio 5.3.7

Los k impares $1, 3, 5, 7, \ldots$ forman una sucesión aritmética de diferencia $d=2$. El término k será

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot d = 2k-1$$

y la suma de los k primeros términos era

$$S_k = \frac{(a_1+a_k)\,k}{2} = \frac{(1+2k-1)\,k}{2} = k^2$$

Ejercicio 5.3.8

Llamamos n =leche al día producida por una vaca negra y m =leche al día producida por una vaca marrón, y planteamos la igualdad

$$\begin{aligned} 4\cdot n\cdot 5 + 3\cdot m\cdot 5 &= 3\cdot n\cdot 4 + 5\cdot m\cdot 4 \\ 20\cdot n + 15\cdot m &= 12\cdot n + 20\cdot m \\ 8\cdot n &= 5.m \\ \frac{m}{n} &= \frac{8}{5} \\ \frac{m}{n} &> 1 \end{aligned}$$

las vacas marrones producen al día más leche que las negras.

Ejercicio 5.3.9

Las páginas de la 1 al 9 usan 9 dígitos, las páginas de la 10 al 99 (tenemos 90 páginas) usan $2\cdot 90 = 180$ dígitos, las páginas de la 100 a la 999 usan $3\cdot 900 = 2700$ dígitos. Llevamos usados $9+180+2700 = 2889$, nos faltan todavía 100 dígitos hasta los 2989 y estamos ya en las páginas que usan cuatro cifras. $\frac{100}{4} = 25$, las últimas páginas van de la 1000 a la 1024. El libro tiene 1024 páginas.

Ejercicio 5.3.10

Usamos las variables $\begin{array}{cc} \text{jarra} & j \\ \text{botella} & b \\ \text{vaso} & v \\ \text{plato} & p \end{array}$ y planteamos las igualdades

$$\begin{aligned} j &= b+v \\ b &= v+p \\ 2j &= 3p \end{aligned}$$

despejamos en la tercera $p = \frac{2}{3}j$ sustituimos en la segunda $b = v + \frac{2}{3}j$ y sustituimos el valor de $j = b + v$ quedándonos $b = v + \frac{2}{3}(b+v)$. Hacemos unas cuentas y tenemos $b = 5v$, es decir, cinco vasos pesan igual que una botella.

Ejercicio 5.3.11

Primero juegan 100 jugadores y 1 pasa a la siguiente ronda, juegan 50 partidos. En la segunda ronda hay 51 jugadores, juegan 50 y 1 pasa, juegan 25 partidos. En tercera ronda hay 26 jugadores, juegan 13 partidos. En cuarta ronda hay 13, juegan 12 y 1 pasa, juegan 6 partidos. En quinta ronda hay 7 jugadores, juegan 6 y una pasa, juegan 3 partidos. Quedan 4 jugadores que juegan 2 partidos, se clasifican 2 jugadores a la final jugando el último partido.

En total tenemos $50 + 25 + 13 + 6 + 3 + 2 + 1 = 100$ partidos.

Ejercicio 5.3.12

Sería encontrar a, b, c, d $(a \neq b, c \neq d)$, tales que $ab \times cd = dc \times ba$, al estar en un sistema de numeración decimal

$$\begin{aligned} (10a+b)(10c+d) &= (10d+c)(10b+a) \\ 100a \cdot c + 10a \cdot d + 10b \cdot c + b \cdot d &= 100b \cdot d + 10a \cdot d + 10b \cdot c + a \cdot c \\ a \cdot c &= b \cdot d \end{aligned}$$

y con esta última igualdad vamos encontrando parejas especulares

$$\begin{aligned} 21 \times 24 &= 42 \times 12 \\ 21 \times 36 &= 63 \times 12 \\ 26 \times 31 &= 13 \times 62 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.13

Observando la serie de números todo se reduce a comprobar la igualdad

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=[n\cdot(n+1)-1]^2-1$$

desarrollando aparece la igualdad

$$n^4+2n^3-n^2-2n=n^4+2n^3-n^2-2n$$

Ejercicio 5.3.14

Llamamos $\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ y planteamos la igualdad

$$\Phi=\sqrt{1+\Phi}$$

elevamos al cuadrado y obtenemos la ecuación de 2^o grado

$$\Phi^2-\Phi-1=0$$

con soluciones

$$\Phi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\Phi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Descartamos la segunda por ser negativa y entonces

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

nuestro querido número aureo.

Ejercicio 5.3.15

Calculamos sólo el primero, el otro se hace exactamente igual. Elevamos al cuadrado

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = \\
&= \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \\
&= 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)} = \\
&= 14+2\cdot\sqrt{49-16\cdot 3}=14+2\cdot\sqrt{1}=16
\end{aligned}$$

si $x^2=16\Rightarrow x=4$ pues la solución negativa no sirve.

Ejercicio 5.3.16

Hay que entender que mientras la aguja de las horas en una hora recorre $\frac{360}{12} = 30$ grados, la aguja de los minutos recorre 360^o, es decir la velocidad angular del minutero es doce veces mayor que la horaria. Usando que $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$ o su equivalente $t = \dfrac{\alpha}{\omega}$ y que coincidirán a x^o de la una del mediodía, planteamos

$$\frac{30+x}{30} = \frac{390+x}{360}$$

con solución

$$x = \frac{30}{11} = 2.7273^o$$

y a hacer una regla de tres

$$\left.\begin{array}{ccc} 30^o & \rightarrow & 1h \\ 2.7273^o & \rightarrow & xh \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2.7273}{30} = 0.09091h$$

$$x = 0.09091 \cdot 60m = 5.4546m = 5m + 0.4546 \cdot 60seg = 5m27.276seg$$

así que coinciden a la

$$1^h 5^m 27^{seg}$$

Ejercicio 5.3.17

Observando la regularidad que aparece en las expresiones y llamando n, m a los números con los que empezamos, sería comprobar la igualdad

$$\begin{array}{l} n + m + (n+m) + [m + (n+m)] + [(n+m) + [m + (n+m)]] + \ldots \\ \ldots + [[m + (n+m)] + [(n+m) + [m + (n+m)]]] \end{array}$$

$$= 4\,[(n+m) + [m + (n+m)]]$$

y desarrollando los dos miembros obtenemos la igualdad

$$8n + 12m = 8n + 12m$$

Ejercicio 5.3.18

Es comprobar la trivialidad $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$

Ejercicio 5.3.19

Reordenamos de dos en dos

$$1^2 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \left(7^2 - 6^2\right) + \cdots + \left(1999^2 - 1998^2\right) =$$

$$= 1 + (3+2)(3-2) + (5+4)(5-4) + (7+6)(7-6) + \cdots + (1999+1998)(1999-1998) =$$

$$= 1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 3997 =$$

$$= (1+3997) + (5+3993) + (5+3989) + \cdots =$$

$$= \frac{3998 \cdot \frac{2000}{2}}{2} = 1999000$$

Ejercicio 5.3.20

Desarrollamos las potencias

$$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

simplificamos

$$3a^4b^2 + 3a^2b^4 = 2a^3b^3$$

y dividimos por $a^3b^3 \neq 0$

$$3\frac{a}{b} + 3\frac{b}{a} = 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 5.3.21

Usamos que diferencia de cuadrados es suma por diferencia y

$$\left(10^{12} + 25 + 10^{12} - 25\right)\left(10^{12} + 25 - 10^{12} + 25\right) =$$

$$2 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 25 = 10^{12} \cdot 10^2 = 10^{14} \Rightarrow n = 14$$

Ejercicio 5.3.22

Lo normal sería decir peso 4 en un plato y cuatro en el otro. El plato que sube nos indica donde está la que menos pesa. Ahora ponemos 2 en cada plato, pesamos por segunda vez y el que sube nos dice donde está la moneda, pero ¿cuál es?

Hay que poner 3 en un plato, 3 en el otro y dejar fuera las dos restantes. Pueden ocurrir dos casos:

1. Los dos platos se quedan a nivel. La moneda mala se ha dejado fuera y tenemos dos monedas, ponemos cada una en un plato y pesamos obteniendo la mala

2. Sube uno de los platos. Ahí está la moneda mala y tenemos tres monedas. Ponemos una en cada plato y dejamos fuera la restante, ocurriendo dos casos.

   (a) Se quedan nivelados los platos. La moneda mala es la de fuera.

   (b) Uno de los platos sube. Ahí está la mala

En total hemos invertido dos pesadas.

El segundo apartado se resuelve pesando ocho en un plato, ocho en el otro y dejando fuera ocho, y estamos en el apartado anterior

Ejercicio 5.3.23

Es idéntico al anterior, pesando tres, tres y tres.

Ejercicio 5.3.24

Primero cruzan el río los dos hijos. Uno se queda en una orilla y el otro vuelve. Pasa el padre a la otra orilla y el que se quedó vuelve a por el otro hermano, cruzando los dos juntos el río.

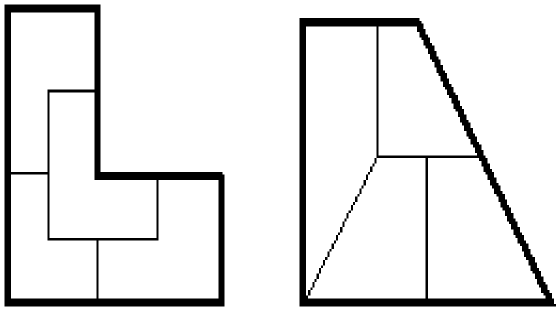
Ejercicio 5.3.25

Hay que tener en cuenta que las cajas se pueden abrir. Numeramos las cajas, de la 1^a cogemos 1 bombón, de la 2^a cogemos 2 bombones y así sucesivamente hasta coger 10 bombones de la décima. Si todos pesaran los mismo, los bombones que hemos cogido pesarían

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + \ldots + 10 \cdot 10 = 550gr$$

pero nuestros bombones pesarán otra cantidad. A esta cantidad le restamos 550 y obtenemos la posición de la caja donde están los bombones que pesan $11gr$.

Ejercicio 5.3.26



Solución a la herencia

Ejercicio 5.3.27

Como $x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow$

$$x^3=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{c} x+\frac{1}{x}=x+x^2=-1 \\ x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+x=-1 \\ x^3+\frac{1}{x^3}=1+1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=6$$

$$\left.\begin{array}{c} x^4+\frac{1}{x^4}=x^3\cdot x+\frac{1}{x^3}\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}=-1 \\ x^5+\frac{1}{x^5}=x^3\cdot x^2+\frac{1}{x^3}\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=-1 \\ x^6+\frac{1}{x^6}=x^3\cdot x^3+\frac{1}{x^3}\frac{1}{x^3}=1+1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)^2+\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)^2 = 6$$

como $27=9\cdot 3$ se repite 9 veces esta secuencia, así que

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots+\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2=9\cdot 6=54$$