Parte II

Geometría.

Capítulo 6

El Tangram.

6.1 Tipos y reglas de uso.

Un antiguo pasatiempo chino conocido también como La Tabla de las Siete Sabidurías o Siete Vivezas. Rompecabezas cuyo carácter se diferencia de todos los demás en que su dificultad no reside en el aumento de piezas utilizadas, sino en las múltiples formas que podemos obtener. Napoleón lo usaba en su destierro en la isla de Santa Elena. No conocemos su antiguedad ni su inventor.

En chino se le denomina Ch'i Ch'ae pan o "Viveza de los siete". Ch'i Ch'ae es una costumbre china según la cual en el septimo día del séptimo mes uno debe pasar un hilo por una aguja de siete ojales. No lo olvideís para el siete de Julio.

Es fácil construirlo puesto que se obtiene dividiendo un polígono en cuadrados, triángulos, romboides, etc., todo ello dependiendo del modelo de tangram que queramos obtener. Hay varios tipos, pero cada uno puede inventarse su modelo de tangram siguiendo dos reglas:

- utilizar en cada figura todas las piezas
- no superponer las piezas

Además de para jugar lo vamos a usar para calcular áreas y perímetros, para utilizar el teorema de Pitágoras e incluso para relacionar el Arte con el cuerpo humano y las matemáticas: el número áureo o Φ.

6.2 Construcción de un tangram chino.

Vamos a construir en primer lugar el tangram más conocido y más usado: el chino. Lo vamos a realizar en cartulina siguiendo el siguiente proceso:

1. Construye un cuadrado de 12 cm de lado.

2. Obtén el punto medio de los lados AB, E, y AD, F, y traza un segmento que una E y F.

3. Sitúa la regla sobre la diagonal AC pero trazada sólo desde EF a C, GC.

4. Traza la diagonal BD.

5. Traza una paralela a GC desde E hasta que corte a la diagonal BD.

6. Traza una paralela a AD desde G hasta que corte a BD.

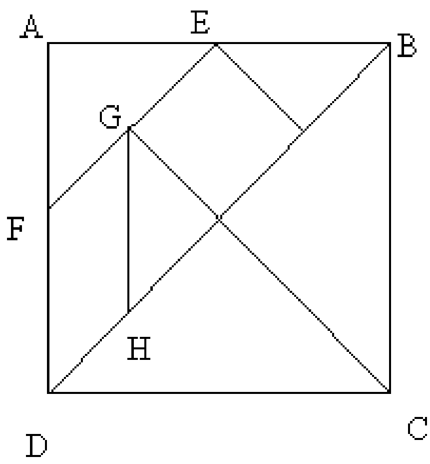


Figura 6.1: Construcción del tangram

Si todo ha ido bien hemos obtenido una división en siete piezas:

- 2 triángulos rectángulos grandes iguales.
- 1 triángulo rectángulo mediano.
- 2 triángulos rectángulos pequeños iguales.
- un cuadrado.
- un romboide.

Corta las piezas y ya tienes tu tangram

6.3 Las piezas de un tangram.

Ahora vamos a realizar una serie de actividades donde usaremos el teorema de Pitágoras y expresiones de áreas y perímetros.

Ejercicio 6.3.1 *Halla las longitudes de los segmentos BD, EF, FD, EG, GH, GC.*

Ejercicio 6.3.2 *Calcula el área de cada una de las piezas del tangram. ¿Cuál debe ser la suma de estas áreas?*

Ejercicio 6.3.3 *Imagina que para medir áreas usamos de unidad de medida el triángulo rectángulo pequeño. Obtén el área de cada pieza del tangram a partir de esa unidad de medida y exprésalo de la siguiente forma: 1 cuadrado=...triángulos pequeños.*

6.4 Construcción de figuras.

Vamos a usar este tangram para obtener figuras diferentes, recuerda que siguiendo dos reglas: usar todas las piezas y no superponerlas. Como comprobarás dentro de poco se pueden obtener infinidad de figuras, de hecho hay libros dedicados a este rompecabezas

Ejercicio 6.4.1 *¿Eres capaz de formar un barco o una casa con chimenea usando el tangram?*

Ejercicio 6.4.2 *Construye todos los "chinos" del dibujo 6.2*

Ejercicio 6.4.3 *¿Cómo se llaman los siguientes animales? Constrúyelos.*

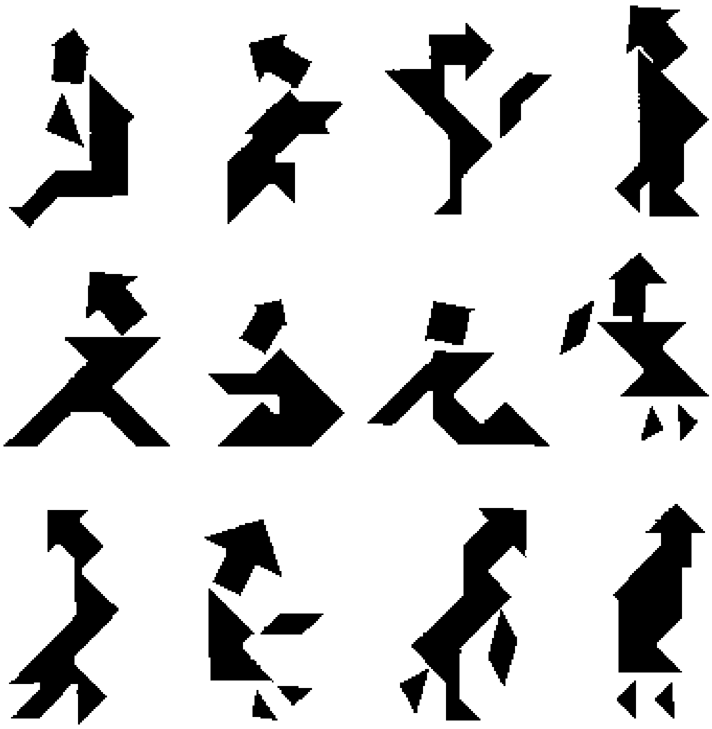


Figura 6.2: Los chinos y el tangram

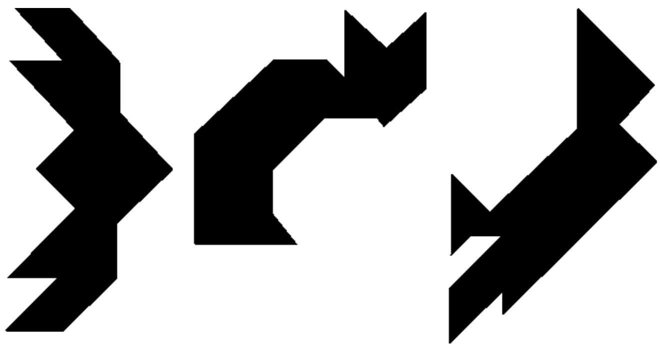


Figura 6.3: Animales

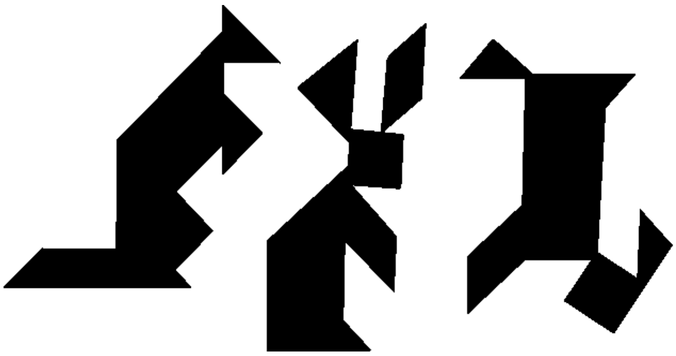


Figura 6.4: Animales

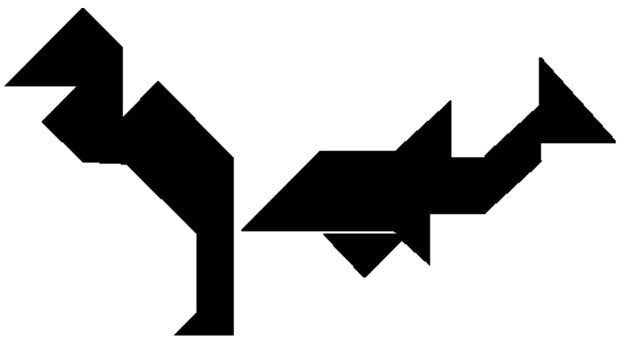
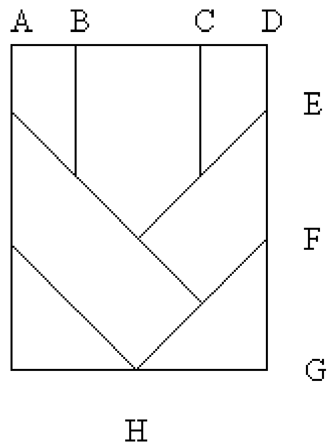
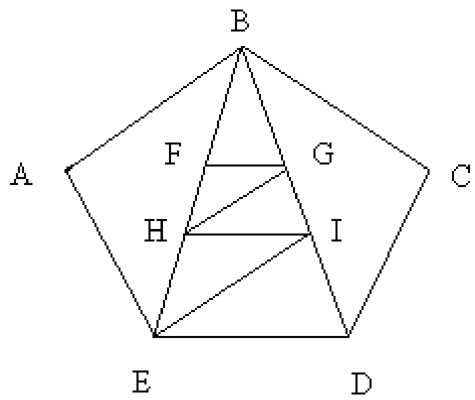


Figura 6.5: Animales

6.5 Otros tangram

Te proponemos ahora la construcción de dos tangram, primero el pitagórico y luego el pentagonal. Sigue el siguiente dibujo.





Para construir el pitagórico debes tener en cuenta que:

$$AB = CD = DE \qquad BC = 2 \cdot AB \qquad BC = EF = FG = GH$$

y para construir el pentagonal:

$$GF \parallel HI \parallel ED \qquad GH \parallel EI \parallel AB$$

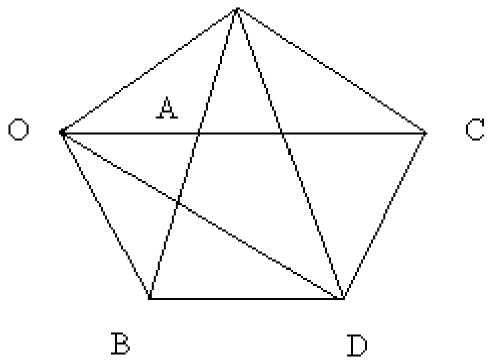
en el caso del pitagórico $AB = 12cm$ y en el pentagonal $AB = 6cm$.

Ejercicio 6.5.1 *Escribe en la libreta cómo explicarías a tus compañeros la construcción de estos tangram.*

Ejercicio 6.5.2 *Crea una figura, con sentido, con estos tangram.*

6.6 El número de oro en el tangram.

Aunque vamos a dedicar un capítulo específico al número de oro, ya que hemos construido el tangram pentagonal vamos a relacionarlo con el número de oro. En el dibujo siguiente vamos a llamar al lado del pentágono l y d a la diagonal.



En el churro-pentágono de la figura los triángulos $O\overset{\triangle}{A}B$ y $O\overset{\triangle}{C}D$ son semejantes, se cumplirá por tanto

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OB}{OA} \qquad \frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \qquad \frac{d}{l} = \frac{1}{\frac{d}{l}-1}$$

si llamamos $\Phi = \dfrac{d}{l}$ obtenemos la ecuación de 2^o grado

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

que resuelta nos da

$$\Phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

como no tiene sentido que Φ sea negativo tendremos que

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

es decir, nuestro famoso número de oro o número áureo o divina proporción que trataremos en capítulos venideros.

Ejercicio 6.6.1 *En un pentágono regular se trazan las diagonales que forman en su interior otro pentágono regular. Hallar la proporción entre sus áreas.*

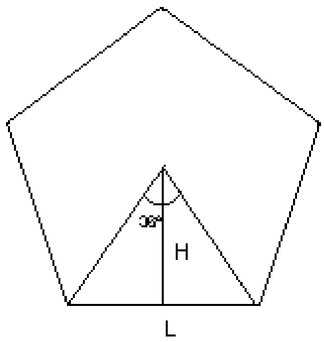
Ejercicio 6.6.2 *A partir del pentágono, encontrar las razones trigonométricas de 108^o y de 36^o*

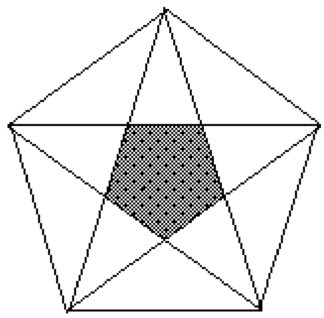
6.7 Soluciones a los ejercicios del capítulo 6

Ejercicio 6.6.1

Para calcular el área de cualquier polígono regular de n lados lo dividimos en n triángulos isósceles. El ángulo central queda dividido en n partes y valdrá $\frac{360^o}{n}$.

En el caso del pentágono el ángulo central será de 72^o y partiendo en triángulo en dos triángulos rectángulos iguales podemos hallar la altura en función del lado





$tg36^o = \frac{H}{L/2} \Rightarrow H = \frac{L}{2}\frac{1}{tg36}$

$$Pentágono = 5Triángulo = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot H = \frac{5}{4}L^2\frac{1}{tg36}$$

Centrándonos en el ejercicio que tenemos, hay que ver como se relacionan lado L del pentágono grande y lado l del pentágono pequeño. Es sencillo

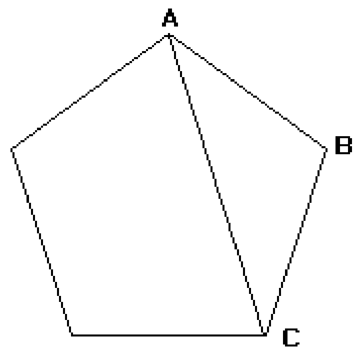
$$l = D - 2\left(D - L\right) = 2L - D = 2L - \Phi L = \left(2 - \Phi\right)L$$

La proporción entre áreas sería

$$\frac{grande}{pequeño} = \frac{\frac{5}{4}L^2\frac{1}{tg36}}{\frac{5}{4}l^2\frac{1}{tg36}} = \frac{\frac{5}{4}L^2\frac{1}{tg36}}{\frac{5}{4}\left(\left(2-\Phi\right)L\right)^2\frac{1}{tg36}} = \frac{1}{\left(2-\Phi\right)^2} = \frac{2}{7-3\sqrt{5}}$$

Ejercicio 6.6.2

En el pentágono trazamos la diagonal y tenemos un triángulo ABC con ángulos $B = 108^o$, $A = 36^o$ y $C = 36^o$ y lados opuestos $b = D$ y $a = c = L$.



usando el teorema del coseno

$$D^2 = L^2 + L^2 - 2 \cdot L \cdot L \cdot \cos 108$$

$$\cos 108 = \frac{2L^2 - D^2}{2L^2} = \frac{2L^2 - \Phi^2 L^2}{2L^2} = \frac{2 - \Phi^2}{2}$$

$$\operatorname{sen} 108 = \sqrt{1 - \cos^2 108} = \sqrt{1 - \left(\frac{2 - \Phi^2}{2}\right)^2} = \sqrt{\Phi^2 - \frac{1}{4}\Phi^4} = \Phi\sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}}$$

$$\operatorname{tg} 108 = \frac{\operatorname{sen} 108}{\cos 108} = \frac{\Phi\sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}}}{\frac{2-\Phi^2}{2}} = \frac{\Phi\sqrt{4 - \Phi^2}}{2 - \Phi^2}$$

Aplicando el teorema del seno

$$\frac{L}{\operatorname{sen} 36} = \frac{D}{\operatorname{sen} 108}$$

$$\operatorname{sen} 36 = \frac{L}{D} \operatorname{sen} 108 = \frac{L}{\Phi L}\Phi\sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}}$$

$$\cos 36 = \sqrt{1 - \overset{2}{\operatorname{sen}} 36} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Phi^2}{4}\right)} = \frac{\Phi}{2}$$

$$\operatorname{tg} 36 = \frac{\operatorname{sen} 36}{\cos 36} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}}}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{\sqrt{4 - \Phi^2}}{\Phi}$$