Capítulo 7

El número de oro.

7.1 Introducción.

Cuando en el capítulo 5, página 59, resolvíamos el ejercicio 5.3.14 encontramos

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

En el capítulo anterior, al construir el tangram pentagonal, hemos encontrado la relación entre la diagonal y el lado del pentágono obteniendo el mismo valor Φ. El descubrimiento de este valor se debe a los pitagóricos. Adoptaron la estrella de cinco puntos como símbolo de su escuela llegando a llevarla tatuada sobre la palma de la mano, en el lugar donde se reunían reinaba el lema "*No entre nadie sin saber geometría*".

Figura 7.1: Escuela Pitagórica

Lo curioso es la de veces que aparece el número áureo en la naturaleza, en la arquitectura, en la pintura, etc. El nombre de número de oro se debe a Leonardo da Vinci y Luca Pacioli lo llamó la Divina Proporción.

Si el número áureo, que lo hemos encontrado en la estrella de cinco puntas, representa la belleza y la armonía, en algunas civilizaciones, la estrella de cinco puntas invertida representa el mal, el demonio. Es creencia de ciertas personas que para echar el mal de ojo a alguien hay que pintar debajo de su cama una estrella de cinco puntas invertida. ¿Cuántas veces hemos visto en el cine ritos satánicos en torno a la estrella de cinco puntas?

7.2 Construcción de la sección áurea.

Un rectángulo muy especial es el rectángulo áureo, que es armonioso en sus dimensiones. Es muy sencillo construirlo. Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado puesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo. Si el lado del cuadrado vale 2 unidades el lado mayor del rectángulo vale $1+\sqrt{5}$ por lo que la proporción entre los dos lados es $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

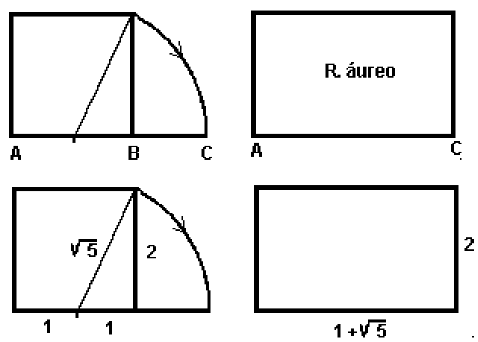

Figura 7.2: Construcción de rectángulos áureos

Otra propiedad de este rectángulo es que si se colocan dos iguales como en la figura 7.3, se forma otro rectángulo áureo más grande.

Ejercicio 7.2.1 *Demostrar la propiedad anterior.*

Los egipcios conocían esta proporción y la usaron en la Pirámide de Keops (2600 a.C.) Los griegos usaron esta proporción en la construcción, por ejemplo, de El Partenón, cuyas proporciones están relacionadas entre sí por medio de la razón áurea.

El símbolo Φ (letra griega phi) fue elegido por el matemático americano *Mark Barr* en honor del escultor *Phidias* que solía usar la relación áurea en sus esculturas.

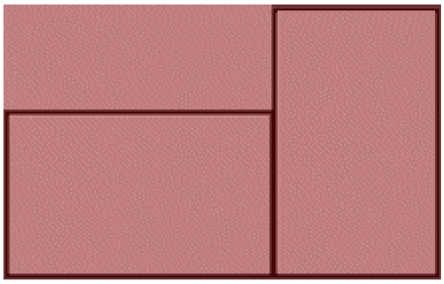

Figura 7.3: Áureo a partir de áureos

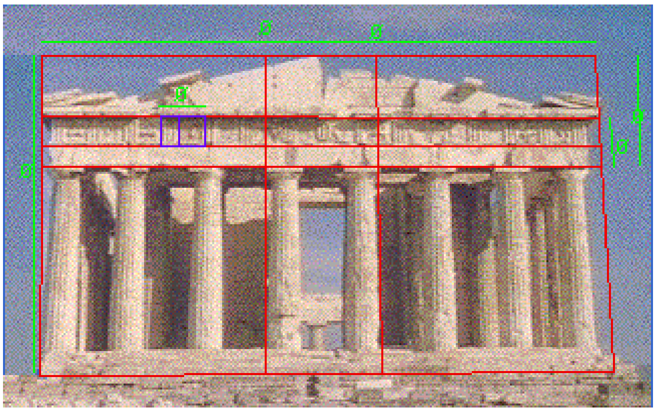

Figura 7.4: El Partenón

Aparece en pinturas de *Dalí*, en la *Venus* de *Boticelli*, en *Los Fusilamientos del 3 de Mayo* de *Goya.* La técnica pictórica basada en la sección áurea consiste en colocar los elementos a destacar en posiciones áureas. Una técnica similar se usa en el cine.

O también inscribiendo la escena a resaltar en pentágonos o dodecaedros como aparecen en las figuras 7.6, 7.7 y 7.8.

En edificios como el Escorial, la Universidad de Salamanca, en la Alhambra, en la sede de la ONU en Nueva York, en la catedral de Notre Dame de París, en el templo de las Cariátides, etc..

Hasta nosotros, en nuestra cartera, llevamos un rectángulo áureo.

Ejercicio 7.2.2 *Comprueba que las proporciones de tu DNI siguen las de la divina proporción.*

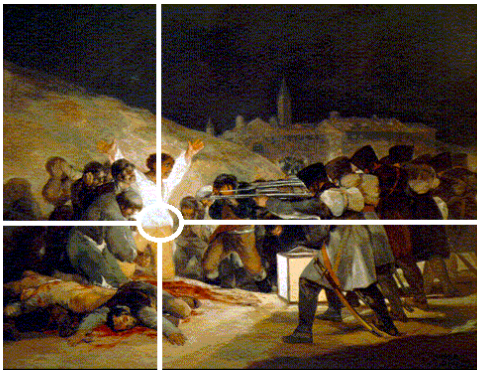

Figura 7.5: Los Fusilamientos de Goya

7.3 El número áureo y los cánones de belleza.

Los griegos utilizaban los números para buscar con ellos proporciones armoniosas en las esculturas humanas. A estas proporciones ideales las llamaban canon. Uno de los primeros cánones fue el del escultor griego *Lisipo* que consideraba que la estatura completa de un hombre era de ocho cabezas: la cabeza más el cuerpo que debía medir siete cabezas.

Las proporciones humanas fueron objeto sistemático de estudio por escultores, pintores, matemáticos y arquitectos. Es sobre todo en el Renacimiento, el hombre pretendía abarcar todas las disciplinas, cuando se incrementa este estudio sobre la belleza del cuerpo humano. El monje italiano *Luca Pacioli*, en su libro *Divina Proportione* (Venecia, 1509), establece el canon de belleza con la famosa figura de Leonardo da Vinci.

Leonardo decía: "si abres las piernas hasta reducir tu altura en una décimo cuarta parte, y si extiendes y levantas los brazos hasta que los dedos corazón lleguen al nivel de la cima de la cabeza, verás que el centro de los miembros extendidos se encuentra en el ombligo, y que el espacio entre las piernas formará un triángulo equilátero".

Según ilustración de la figura 7.10, si se coloca el compás en el ombligo de un hombre y se toma como radio la distancia a los pies, al extender los brazos hasta que los dedos lleguen al nivel de la cabeza, los pies y las manos tocarán la circunferencia obtenida.

En 1855 el científico alemán Zeysing comprobó que el ombligo divide al cuerpo humano en sección áurea: se puede inscribir el cuerpo humano en una circunferencia cuyo radio es la sección áurea de la altura. Toma ya.

Ejercicio 7.3.1 *¿Alguno de vosotros sigue el canon de Lisipo?*

Ejercicio 7.3.2 *¿Quién de nosotros es el de la figura 7.10? ¿Comprobar si podemos inscribirnos dentro de la circunferencia áurea? Siguiendo las*

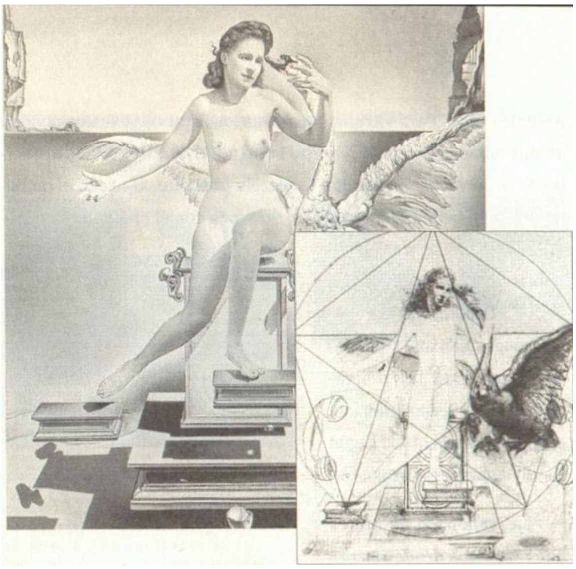

Figura 7.6: Leda Atómica de Dalí

indicaciones de Leonardo hacer una clasificación de perfección según este canon.

Hay quien sostiene que las proporciones del rostro humano siguen la divina proporción, es decir, si logramos inscribir nuestra cabeza dentro de un rectángulo este es áureo. Aunque el del dibujo es bastante feo, sería la figura 7.11

Ejercicio 7.3.3 *Comprobad la propiedad anterior.*

Y el colmo es cuando nos dicen que en la acupuntura china aparece el número áureo, la disposición de las agujas sobre el cuerpo es siguiendo la sección áurea. Mejor no hacer ningún ejercicio para comprobarlo.

Para terminar esta interminable relación de apariciones de Φ, decir que también aparece en la determinación del día de Pascua de Resurreción en nuestro calendario. Así que las vacaciones de Semana Santa se las debemos al número áureo.

7.4 Fibonacci.

Leonardo de Pisa (1170-1240), más conocido como *Fibonacci (filius Bonacci,* hijo de Bonacci), nació en Pisa, ciudad que por entonces era una gran centro comercial. Como su padre era empleado de una factoría comercial italiana en Argelia allí se trasladó hacia 1192 y recibió su primera formación

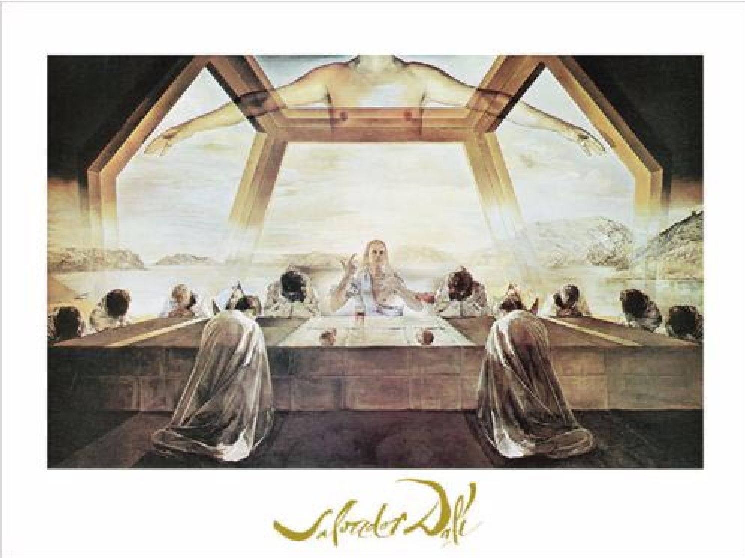

Figura 7.7: La Última Cena de Dalí

matemática, a cargo de maestros musulmanes. Esto despierta la pasión de Leonardo por las matemáticas, pasión que le acompañará toda la vida.

Desde esta fecha hasta 1200 recorre Provenza, Sicilia, Grecia, Berbería, Siria y Egipto, comparando la forma de calcular de las gentes de su tiempo, el ábaco, y la nueva forma transmitida por Al-Jwarizmi del sistema de numeración árabe de las nueve cifras y el cero.

En 1200 vuelve a Pisa y durante veinticinco años trabaja en sus composiciones matemáticas. Así en 1202 publica el *Liber abaci,* una colección de problemas aritméticos y algebraícos, que constituye una apasionada defensa de la superioridad de los métodos de numeración de los árabes (las nueve cifras más el cero, el céfiro de los arabes, de donde provienen cero y cifra) frente al sistema romano de numeración.

Su talento como matemático se extendió por la Corte, siendo invitado por el Emperador Federico II a participar en un torneo organizado por el emperador. Leonardo resolvió con éxito todos los problemas que le fueron propuestos.

Otras obras de Fibonacci son: Practica Geometriœ, colección de problemas de geometría y trigonometría, Liber Quadratorum, aproxima hasta nueve cifras las raíces cúbicas.

Después de 1228 apenas se sabe de él. Murió en Pisa en 1240.

Figura 7.8: La Transfiguración de Rafael

Figura 7.9: DNI

7.5 La sucesión de Fibonacci.

Es irónico que *Leonardo de Pisa* sea más conocido por un problema de aritmética que propone en su libro *Liber Abaci* que por ser el introductor del sistema de numeración decimal en la Europa de su tiempo. El cambio de sistema de numeración supuso una revolución comparable con la revolución industrial. Además un problema de aritmética que ni siquiera resuelve.

En el siglo pasado, el matemático francés *Edouard Lucas*, interesado en la teoría de números encadenó el nombre de *Fibonacci* al siguiente problema:

En una granja hay, al principio del año, una pareja de conejos que acaban de nacer. Al cabo de dos meses, esta pareja está preparada para reproducirse. Produce cada mes una pareja de conejos que, al cabo de dos meses, está a

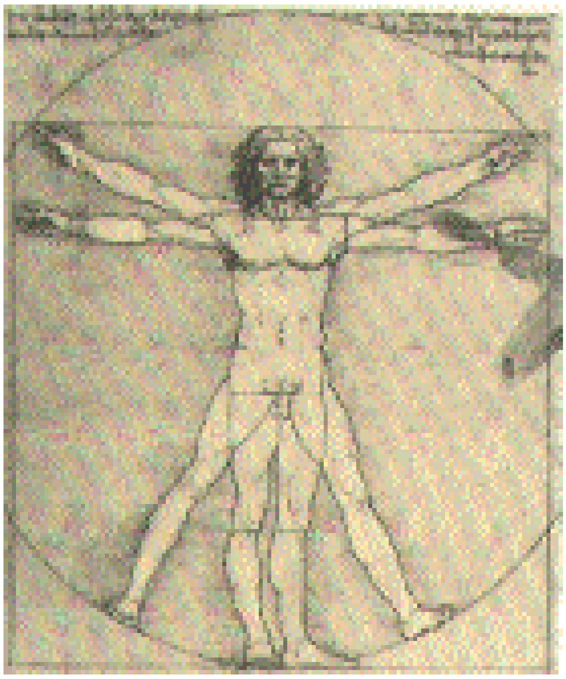

Figura 7.10: El hombre perfecto

su vez, preparada para empezar a reproducirse, dando una pareja cada mes. Las parejas que nacen siempre están formadas por macho-hembra. ¿Cuál es el número de parejas de conejos que hay cada mes? (suponemos que los conejos son inmortales y que no hay problemas de consanguinidad)

Sea F_n las parejas de conejos en el mes n

Mes n	n^o parejas	F_n
1	1	$F_1 = 1$
2	1	$F_2 = 1$
3	**1** 1	$F_3 = 2$
4	**1** 1 **1**	$F_4 = 3$
5	**1** 1 **1** **1** 1	$F_5 = 5$
$\vdots$	$\dots \quad \dots$	$\vdots \quad \vdots$

en negrita aparecen las parejas fértiles y en letra normal las "estériles". Podemos afirmar que

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

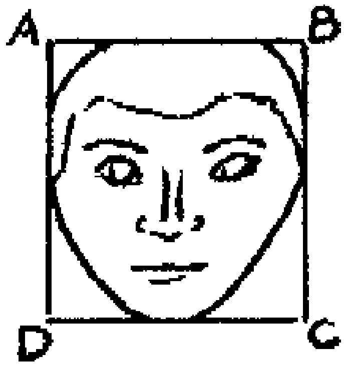

Figura 7.11: La cabeza áurea

si comprobamos en la tabla:

$$parejas\ mes\ n = parejas\ mes\ (n-1) + parejas\ mes\ (n-2)$$

A esta sucesión se le conoce con el nombre de sucesión de Fibonacci. La sucesión así formada está compuesta, en sus primeros términos, por los números

$$1, 1, 2, 3, 5, , 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

Fibonacci no investigó la sucesión, que tampoco recibió ningún estudio serio hasta comienzos del siglo pasado. A partir de esa fecha los artículos dedicados a ella empezaron a proliferar "como los conejitos de *Fibonacci*".

La sucesión ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos por su tendencia a aparecer en los lugares más inopinados. Pero, ¿y qué tiene que ver con el número de oro?.

Tenemos algunos conocimientos sobre sucesiones: progresiones aritméticas y geométricas. Pertenecen a un conjunto de objetos matemáticos llamados sucesiones, que no son más que ordenaciones de números. Como en la sucesión de *Fibonacci* el primer término es 1, el segundo es 1, el tercero 2, podemos escribir:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \ldots$$

lo interesante y a la vez dificil es encontrar el término general F_n, es decir, el que está en la posición n. Con unos pocos conocimientos matemáticos, que se escapan a los de un alumno de 4^o ESO, podemos demostrar que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(\frac{-1}{\Phi}\right)^n\right]$$

el colmo de los colmos, también sale el número áureo con los conejitos de *Fibonacci.*

Tanto llamó la atención a los matemáticos esta sucesión que existe hasta una revista de investigación llamada *The Fibonacci Quarterly.* En esta revista se publican propiedades que cumplen estos números mágicos, hay miles y miles, algunas sin resolver. Una relación entre los términos de la sucesión y las potencias sucesivas del número áureo aparece en las igualdades siguientes, la construcción de esas igualdades es una preciosidad:

$$\Phi^0 = 0 + 1 = 1 + 0$$

$$\Phi^1 = 0 + \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi^2 = 1 + \Phi = 2 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi^3 = 1 + 2\Phi = 3 + \frac{2}{\Phi}$$

$$\Phi^4 = 2 + 3\Phi = 5 + \frac{3}{\Phi}$$

$$\Phi^5 = 3 + 5\Phi = 8 + \frac{5}{\Phi}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Te proponemos que demuestres las siguientes.

Ejercicio 7.5.1 $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

Ejercicio 7.5.2 *Si A, B, C, D son cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, demostrar que*

$$C^2 - B^2 = A \cdot D$$

Ejercicio 7.5.3 *Con ayuda de la calculadora calcula los cocientes entre un término de la sucesión y el anterior. Hazlo por lo menos para los 20 primeros. ¿Este cociente tiende a algún número que "no aparece por ningún sitio"?*

7.6 Fracción continua de Φ.

Puesto que Φ es la solución de la ecuación de 2^o grado $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, podemos poner

$$1 = \Phi^2 - \Phi \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Leftrightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}$$

si seguimos el proceso indefinidamente

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

obtenemos lo que se conoce como fracción continua de Φ, es una buena herramienta para calcular aproximaciones decimales de Φ o fracciones que se aproximan a Φ

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 1 \\
\Phi_2 &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\
\Phi_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \\
\Phi_4 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

y, que casualidad, las fracciones que aparecen son cocientes entre términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.

7.7 Sucesiones en la naturaleza.

Si vas por un pinar, coge una piña en tus manos. Mírala por el lado por donde estaba sujeta al árbol y observarás dos conjuntos de espiras: unas giran en el sentido de las agujas del reloj y otras en sentido contrario. Cuéntalas, verás que el número de espiras en una dirección y el número de espiras en la otra, son dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. En algunas especies de pinos son 5 y 8, en otras 8 y 13...

Lo mismo sucede con las espiras de la flor de girasol, de la margarita y de otras muchas plantas.

7.8 Ornamentación.

También aparece el número de oro en la arquitectura, ya lo hemos dicho antes. Y más concretamente en la ornamentación.

Una espiral es una curva plana descrita por un punto que se desplaza alrededor de otro punto y alejándose de él en cada vuelta. Algunas de las más sencillas son la espiral de los números de Fibonacci y la espiral áurea o de Durero. La forma de construirlas es muy sencilla siguiendo las figuras 7.12 y 7.13.

Ejercicio 7.8.1 *Explica en tu cuaderno el proceso de construcción de las espirales anteriores (en la segunda se parte de un rectángulo áureo)*

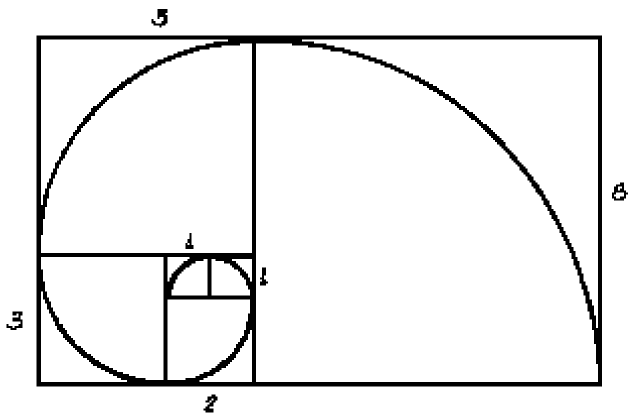

Figura 7.12: Espiral de Fibonacci

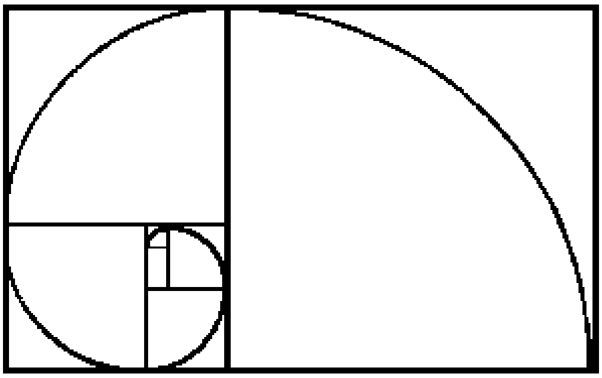

Figura 7.13: Espiral áurea o de Durero

7.9 A la Divina Proporción.

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en malla de tu ley divina.

A tí, cárcel feliz de la retina
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

Ejercicio 7.9.1 *El poema anterior de **Rafael Alberti**, ¿en qué métrica está escrito?. ¿Por qué hace referencia a un dodecaedro?*

Una conclusión podemos obtener de la vida de *Leonardo de Pisa*: "*Una apertura sin prejuicios a otras culturas y otras formas de ver las cosas, puede aportarnos un gran enriquecimiento y profundización en nuestro saber".*

7.10 La proporción cordobesa

En la mezquita de Córdoba aparecen unos rectángulos que no están en la proporción áurea sino en la relación $c = 1'3065\ldots$ Dicha proporción es conocida como el número cordobés o proporción cordobesa. Es la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular y el lado de éste.

Ejercicio 7.10.1 *Demostrar que*

$$c = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Ejercicio 7.10.2 *Calcular las razones trigonométricas de* $22^o 30'$

7.11 Soluciones a los ejercicios del capítulo 7

Ejercicio 7.2.1

El lado horizontal mide $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1$ y el vertical $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, y hay que comprobar la igualdad

$$\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\Phi$$

$$\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=\Phi$$

Ejercicio 7.5.1

$$\begin{array}{ll}
 & F_1=F_1\\
F_3=F_2+F_1\Rightarrow & F_2=F_3-F_1\\
F_4=F_3+F_2\Rightarrow & F_3=F_4-F_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & F_4=F_5-F_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & F_5=F_6-F_4\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & F_n=F_{n+1}-F_{n-1}\\
F_{n+2}=F_{n+1}-F_n\Rightarrow & F_{n+1}=F_{n+2}-F_n
\end{array}$$

y si sumamos la 2^a columna y simplificamos

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n+F_{n+1}=F_{n+1}+F_{n+2}-F_2$$

obtenemos la expresión

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$$

Ejercicio 7.5.2

Si son cuatro términos $C=B+A$ y $D=C+B=2B+A$ y sustituyendo en la expresión

$$\begin{aligned}
C^2-B^2 &= A\cdot D\\
(B+A)^2-B^2 &= A\cdot(2B+A)\\
B^2+A^2+2AB-B^2 &= 2AB+A^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.1

Es un soneto: 4-4-3-3, y hace referencia a un dodecaedro porque es un poliedro que tiene por caras pentágonos, donde aparece el número de oro.