Capítulo 9

Los códigos.

Durante el año 2000 se emitió por una cadena privada de TV un nuevo programa que causó gran sensación: *Gran Hermano*. Se encerraba a una serie de personajillos en una casa donde se les podía ver durante las 24 horas. Para algunos era un experimento antropológico-social, para otros basura televisiva. El programa se llamaba Gran Hermano parodiando un libro (de lectura obligada para todos nosotros) de George Orwell[1] "1984", en el que se detalla una sociedad totalmente vigilada por un gran dictador, el gran hermano, que vigilaba las vidas de todo el mundo. Muchas personas piensan que en determinadas sociedades democráticas hay comportamientos *orwelianos* cuando nos bombardean con códigos secretos. ¿Porqué en muchos países europeos no existe el DNI mientras que es España es obligatorio a partir de los 16 años?

Hace poco, en Francia, una noticia relacionada con las Matemáticas, llamó la atención del país. Un programador informático afirmaba conocer el algoritmo (conjunto de operaciones repetitivas) para generar los números de la tarjeta VISA y se ofrecía a los bancos para darles a conocer el fallo en sus sistemas de seguridad. Los grandes bancos, con su prepotencia habitual, contestaron que era imposible y nuestro programador, para demostrar su afirmación, comenzó a realizar operaciones con números de VISA ficticios. Obviamente tenía razón y enseguida los bancos tomaron cartas en el asunto denunciandolo por ladrón. Pero quién tiene razón, ¿los bancos que lo despreciaron? o ¿nuestro moderno Robin Hood?

Lamentablemente no conocemos el algoritmo para generar números de VISA, pero otros códigos si que son facilmente descifrables.

[1] George Orwell combatió en España durante la Guerra Civil con las Brigadas Internacionales, en el Ejercito Republicano. Fruto de estas vivencias es su libro "Homenaje a Cataluña"

9.1 El NIF

A finales de la década de los ochenta, la Hacienda Pública, para combatir el fraude fiscal, inventó el NIF: el número del DNI más una letra de control, es decir, un carácter relacionado con los siete números del DNI. Si el contribuyente a la hora de hacer la declaración escribía la letra incorrecta, automáticamente se debía detectar una incorrección.

Hacienda, con una ingenuidad propia de un niño, declaró secreto el algoritmo para calcular la letra de control del NIF. Nada más lejos de la realidad pues comenzó un bombardeo de cartas a los periódicos donde modernos defensores de la libertad dieron a conocer el algoritmo.

Dividimos nuestro DNI por 23 y nos quedamos con el resto de la división, será un número comprendido entre 0 y 22. A este número se le asigna una letra, la letra de control. En Matemáticas a esta operación se le llama *resto módulo 23.*

Resto	Letra	Resto	Letra	Resto	Letra
0	T	8	P	16	Q
1	R	9	D	17	V
2	W	10	X	18	H
3	A	11	B	19	L
4	G	12	N	20	C
5	M	13	J	21	K
6	Y	14	Z	22	E
7	F	15	S		

Por ejemplo: el DNI 22969553 lo dividimos por 23 obteniendo 5 de resto

$$22969553 \bmod 23 = 5$$

buscamos el 5 en nuestra tabla y la letra es la M. El NIF correspondiente es el 22969553M.

Lamentablemente la función u operación mod no viene en nuestras calculadoras. Una forma sencilla de calcular el resto es la siguiente: dividimos por 23 y al resultado le restamos la parte entera del cociente obtenido, multiplicamos por 23 y obtenemos el resto.

Ejemplo 9.1 *Estudiar si los siguientes NIF son correctos:* $42094683Z$ *y* $5080569D$.

Ejemplo 9.2 *Probar que dos NIF distintos no pueden diferir solamente en el quinto dígito, es decir, no puede darse la siguiente situación (con* $X_5 \neq Y_5$*):*

$$NIF_1 = x_1x_2x_3x_4X_5x_6x_7x_8\alpha \quad NIF_2 = x_1x_2x_3x_4Y_5x_6x_7x_8\alpha$$

Ejemplo 9.3 *Probar que dos NIF distintos no pueden diferir solamente en un dígito, ahora no tiene porque ser necesariamente el quinto.*

Ejemplo 9.4 *Probar que si en un NIF permutamos dos cifras obtenemos un NIF incorrecto.*

Ejemplo 9.5 *Del NIF 3120x8T hemos perdido la cifra de las decenas, ¿cuál es esta cifra?*

9.2 Los códigos de barras.

Figura 9.1: Códigos de barras

En la mayoría de los comercios es normal que tengan un lector óptico con el que se lee un código de barras que identifica la compra. A veces el código no se puede leer (está roto, húmedo, etc) y se teclea una serie de 13 números, asociados al código de barras, por ejemplo 8425536001086.

Se distinguen cuatro bloques en el número anterior:

- 84: código de país. EL 84 corresponde a España.
- 25536: código de fabricante.
- 00108: código de artículo.
- 6: dígito de control.

El dígito de control 6 está asociado a los otros doce y a su orden. Si se teclean mal o en orden cambiado, se producirá un error. Por ejemplo, imaginate que el fabricante 25536 fabrica bicicletas y sus accesorios. Una bicicleta tiene código de artículo 00118 y una bomba de inflar tiene código 00108. Si compramos la bomba y teclean 00118 nos cobrarán la bicicleta, para detectar este error se introduce el código de control.

El código de control se calcula de la siguiente forma:

1. Todos los dígitos (menos el de control), empezando por la izquierda, se multiplican sucesivamente por 1,3,1,3,...

$$\begin{array}{cccccc} 8\cdot 1=8 & 4\cdot 3=12 & 2\cdot 1=2 & 5\cdot 3=15 & 5\cdot 1=5 & 3\cdot 3=9 \\ 6\cdot 1=6 & 0\cdot 3=0 & 0\cdot 1=0 & 1\cdot 3=3 & 0\cdot 1=0 & 8\cdot 3=24 \end{array}$$

2. Se suman los productos obtenidos

$$8+12+2+15+5+9+6+0+0+3+0+24=84$$

3. Se calcula la decena siguiente a la suma. Como ha salido 84, la decena siguiente es 90. Si hubiera salido 80 la decena siguiente es 80.

4. El dígito de control es:

$$90-84=6$$

Ejemplo 9.6 *Calcular el dígito de control de los códigos*

1. 570186187462

2. 871215503296

Hemos visto códigos de barras de 13 dígitos, pero algunos comercios usan códigos de pocos dígitos. Además cada país tiene su propio código. España el 84, Suiza el 76, Holanda el 87, etc. Algunos países tienen varios códigos. Alemania del 40 al 44, Italia del 80 al 83. Los países pequeños tienen códigos de tres dígitos: Irlanda el 539, Islandia el 569, etc.

Algunos artículos, como los libros, pueden tener sus propios dígitos especiales que no corresponden a ningún país.

Ejemplo 9.7 *Busca códigos de barras que no empiecen por 84 e intenta averiguar de qué país es el código.*

Ejemplo 9.8 *Comprueba si tus libros de texto comienzan por 978 ó 979. Calcula el dígito de control para comprobar que está correctamente asignado.*

Ejemplo 9.9 *En los grandes supermercados las balanzas incorporan una pequeña impresora para escribir códigos de barras en etiquetas adhesivas. Este código de barras lleva el precio del articulo:*
** Un paquete de mortadela lleva el código* 2748818001328*, el precio está dado en las posiciones 10, 11 y 12, es decir, cuesta* 132 *ptas.*
** Un trozo de queso lleva el código* 2085098006293 *y cuesta* 629 *ptas.*
Consigue tres etiquetas generadas por estas impresoras y comprueba la propiedad anterior, comprueba también que el dígito de control está bien calculado.

Figura 9.2: I.S.B.N.

9.3 El ISBN

Actualmente los libros tienen asignados un código, el I.S.B.N., siglas de *International Standard Book Number*. Es un código de 10 dígitos que lleva intercalados unos guiones irrelevantes para el cálculo del ISBN. Consta de cuatro bloques de dígitos: $84 - 604 - 6814 - 3$

Se distinguen cuatro bloques en el número anterior:

- 84: código de país o lengua. EL 84 corresponde a España.
- 604: código de la editorial.
- 6814: código del libro.
- 3: dígito de control.

El cálculo del dígito de control es muy sencillo:

1. Empezando por la izquierda se multiplica cada dígito, excepto el de control, por la posición que ocupa, efectuando un total de nueve multiplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} 8 \cdot 1 = 8 & 4 \cdot 2 = 8 & 6 \cdot 3 = 18 & 0 \cdot 4 = 0 & 4 \cdot 5 = 20 \\ 6 \cdot 6 = 36 & 8 \cdot 7 = 56 & 1 \cdot 8 = 8 & 4 \cdot 9 = 36 & \end{array}$$

2. Se suman los productos anteriores

$$8 + 8 + 18 + 0 + 20 + 36 + 56 + 8 + 36 = 190$$

3. Se calcula el resto de la división por 11, es decir, $190 \bmod 11 = 3$

4. 3 es el dígito de control.

Expresar esto en Matemáticas es muy sencillo: el dígito de control del ISBN $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$ es un número x_{10} que satisface

$$x_{10} = \left(\sum_{i=1}^{9} i \cdot x_i\right) \bmod 11$$

Ejemplo 9.10 *Decid si los siguientes códigos son ISBN:*

1. $0 - 13165332 - 6$
2. $0 - 1392 - 4101 - 4$
3. $07 - 028761 - 4$

Ejemplo 9.11 *Reconstruid el siguiente ISBN:* $0 - 201 - 1\alpha - 502 - 7$

9.4 George Orwell

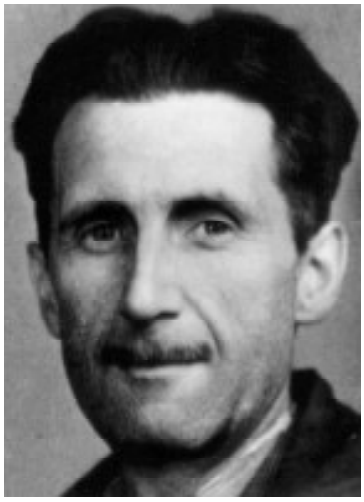

Figura 9.3: George Orwell

La vida de George Orwell es apasionante.

De origen escocés, Eric Blair, verdadero nombre del escritor, nació en Bengala en 1903. Concluidos sus estudios en la metrópoli vuelve a la India para incorporarse a la policía de aquel país destacada en Birmania. Enemigo del imperialismo británico, cuando regresa a Europa en 1928 se instala en Francia, donde desempeñará los más variados empleos. De nuevo en Inglaterra, será maestro y dependiente en una librería.

Su primer texto, Sin blanca en París y Londres, en el que recuerda las dificultades padecidas desde su marcha de la policía, sale de la imprenta en

1933. En la obra ya se registran las inquietudes políticas de Orwell. Sus primeras novelas datan de 1934. En aquel año aparecen Días en Birmania, considerada por algunos su pieza más lograda, y La hija del cura, un fresco sobre la vida inglesa. El mismo tema le ocupará en Que no caiga la aspidistra (1936) y el ensayo El camino del muelle de Wigan, también del 36, donde, a raíz de los efectos de la depresión en una ciudad inglesa, analiza las posibilidades del socialismo en Inglaterra.

«Los anarquistas aún dominaban virtualmente Cataluña y la revolución se encontraba en su apogeo», escribe sobre su llegada a Barcelona. Enviado a nuestro país como corresponsal de guerra, al igual que tantos otros periodistas George Orwell acabaría combatiendo. Ya crítico con el comunismo ortodoxo, se alistará en la milicia trotskista del POUM -Partido Obrero de Unificación Marxista-. Gravemente herido, al igual que Simone Weil, quien se encuentra junto a los anarquistas, durante la convalecencia escribe el emotivo Homenaje a Cataluña (1938).

Otra vez en Inglaterra, lo que ha visto en España le ha convertido en un encendido antisoviético que, pese a un cierto pacifismo por el que postula, apoya decididamente el combate contra Hitler. Con anterioridad ha publicado una obra menor: Subir en busca del aire (1939). Si bien su precaria salud le impide volver a tomar las armas contra el fascismo, cuando se declara la guerra Orwell forma parte de Home Guard. Sus arengas de aquellos días, a través de los micrófonos de la BBC, aún se recuerdan. Así, José María Valverde apunta que el inglés «creía tanto en el lenguaje que pensaba que para engañar políticamente con él había que volverlo del revés de un modo visible».

Ello no le quita tiempo para entrar en la redacción del Tribune (1943). Posteriormente se convertirá en colaborador habitual de The Observer y cultivará con tino el ensayo.

«El punto del que siempre parto es un sentimiento de compañerismo, la sensación de injusticia», apunta en Por qué escribo. De ahí que sus personajes sólo cuenten en función del ambiente -eternamente opresivo- en que se encuentran inmersos. Ahora bien, Orwell, más humanista que político, más romántico que naturalista, como estima Jordi Lamarca, supera con la hermosura de su verbo la denuncia panfletaria; de hecho, nuestro autor reconoce: «Yo no podría realizar la labor de escribir un libro, ni siquiera la de escribir un artículo periodístico si, por otro lado, ello no constituyera también una experiencia estética».

La fama como novelista le llega en 1945 con la publicación de Rebelión en la granja. Pero será con su siguiente utopía, 1984, cuando su obra se convierta en proverbial. Desde entonces se puede oír el adjetivo orwelliano incluso en boca de quienes no han leído a Orwell, honor que comparte con Kafka. Muere en Londres, el 23 de enero de 1950. Treinta y cuatro años después pudimos comprobar la certeza de todos sus malos presagios. Sí señor, todavía es ahora cuando, puestos a imaginarnos el futuro, como nos anuncia

O'Brien, el terrible servidor del Gran Hermano, no podemos imaginar más que una gran bota aplastando incesantemente un rostro humano.[13]

9.5 Soluciones a los ejercicios del capítulo 9

Ejercicio 9.1

$42094683 \bmod 23 = 14$, buscamos la letra correspondiente a 14 y si es la Z, correcto

$5080569 \bmod 23 = 7$, la letra correspondiente al 7 es F, no es correcto.

Ejercicio 9.2

Si los dos NIF tienen la misma letra es porque tienen el mismo resto al dividir por 23, y por lo tanto la diferencia de esos dos números tendrá resto 0 al dividirla por 23. Escritos los números en notación potencial y restándolos, quedaría

$$x_1x_2x_3x_4X_5x_6x_7x_8 - x_1x_2x_3x_4Y_5x_6x_7x_8 =$$

$$= (X_5 - Y_5) \cdot 10^3$$

y esta expresión -recordando que X_5, Y_5 toman valores entre $0, \ldots, 9$- no es divisible por 23

Ejercicio 9.3

Después de ver el ejercicio anterior sería comprobar que la expresión $(X_5 - Y_5) \cdot 10^n$ no es divisible por 23.

Ejercicio 9.4

Si en el NIF $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\alpha$ permutamos, por ejemplo, segunda y séptima cifra obtendríamos el NIF $x_1x_7x_3x_4x_5x_6x_2x_8\alpha$. Con los razonamientos anteriores si tienen la misma letra su diferencia será divisible por 23. Al restarlos y escribirlos en notación potencial obtenemos

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 - x_1x_7x_3x_4x_5x_6x_2x_8 =$$

$$= (x_2 - x_7) \cdot 10^6 + (x_7 - x_2) \cdot 10 = (x_2 - x_7) \cdot 10 \cdot \left(10^5 - 1\right)$$

y esta última expresión no es divisible por 23. El caso general sería demostrar que la expresión

$$(x_i - x_j) \cdot \left(10^{j-1} - 10^{i-1}\right)$$

no es divisible por 23.

Ejercicio 9.5

Si la letra es la T entonces $3120x8 \bmod 23 = 0$, vamos probando haciendo las divisiones de $312008, 312018, \ldots, 312098$ por 23 y quien tiene resto 0 es 312018.

Ejercicio 9.6

Lo vamos a ver para el primer código de barras, el otro se hace de forma análoga.

Multiplicamos sucesivamente por $1, 3, 1, 3, \ldots$ todos los dígitos empezando por la izquierda

$$\begin{array}{lllll} 5 \cdot 1 = 5 & 7 \cdot 3 = 21 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 3 = 3 & 8 \cdot 1 = 8 \quad 6 \cdot 3 = 18 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 8 \cdot 3 = 24 & 7 \cdot 1 = 7 & 4 \cdot 3 = 12 & 6 \cdot 1 = 6 \quad 2 \cdot 3 = 6 \end{array}$$

y sumamos los productos $5 + 21 + 0 + 3 + 8 + 18 + 1 + 24 + 7 + 12 + 6 + 6 = 111$, la decena siguiente es 120. $120 - 111 = 9$ luego el dígito de control es 9.

Ejercicio 9.10

1. Empezando por la izquierda multiplicamos cada dígito por la posición que ocupa

   $$0 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 6 \times 5 + 5 \times 6 + 3 \times 7 + 3 \times 8 + 2 \times 9 = 138$$

   el resto de la división por 11 es $138 \bmod 11 = 6$ luego el dígito de control es 6 y el ISBN era correcto.

2. $$0 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 + 9 \times 4 + 2 \times 5 + 4 \times 6 + 1 \times 7 + 0 \times 8 + 1 \times 9 = 97$$

   el resto por 11 es $97 \bmod 11 = 9$ el auténtico dígito de control es 9 y el ISBN es incorrecto.

3. no es un ISBN correcto pues si quitamos el dígito de control sólo quedan ocho cifras y hacen falta nueve.

Ejercicio 9.11

$$0 \times 1 + 2 \times 2 + 0 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5 + \alpha \times 6 + 5 \times 7 + 0 \times 8 + 2 \times 9 = 66 + 6\alpha$$

por lo tanto debe cumplirse que

$$(66 + 6\alpha) \bmod 11 = 7$$

que es equivalente a

$$6\alpha \bmod 11 = 7$$

cuya solución es $\alpha = 3$ pues $18 \bmod 11 = 7$