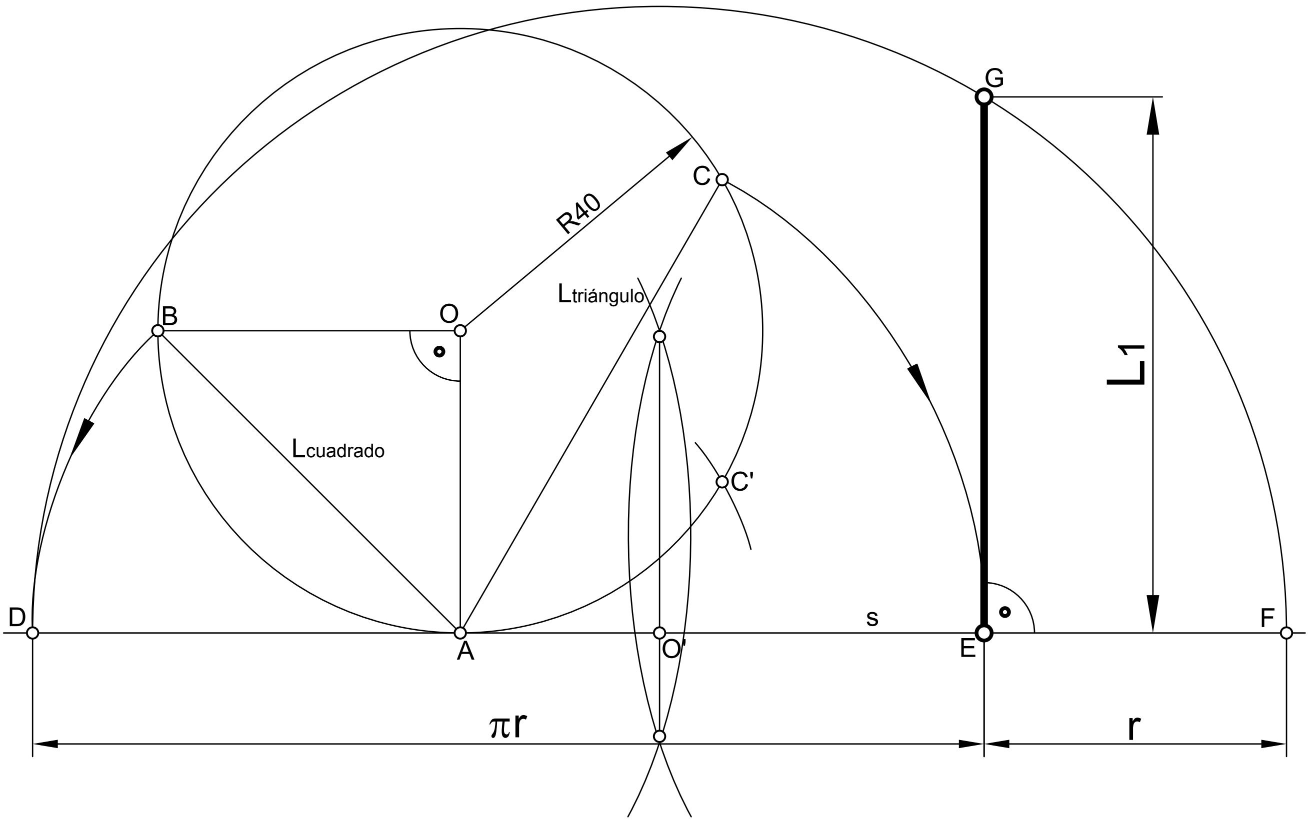
Cuadratura del círculo.

Este es uno de los tres famosos problemas de la antigüedad clásica griega , los otros dos son: duplicación del cubo y trisección del ángulo, irresolubles de manera exacta, debido a que en su construcción interviene el número π. En el siglo XIX (1882) el matemático alemán Ferdinand Lindemann probó que π es un número transcendente, lo que implica que es imposible cuadrar el círculo.

La justificación que se va a describir a continuación está basada en lo siguiente:

El área del circulo vale $\pi \times r^2$ = (reagrupando términos) = $(\pi \times r) \times r = L^2$ es decir,

Tenemos la media proporcional entre la longitud de la **semicircunferencia**, $\pi \times r$, y el **radio**, r. Cuyo construcción gráfica se describe a continuación, para una circunferencia de radio r:



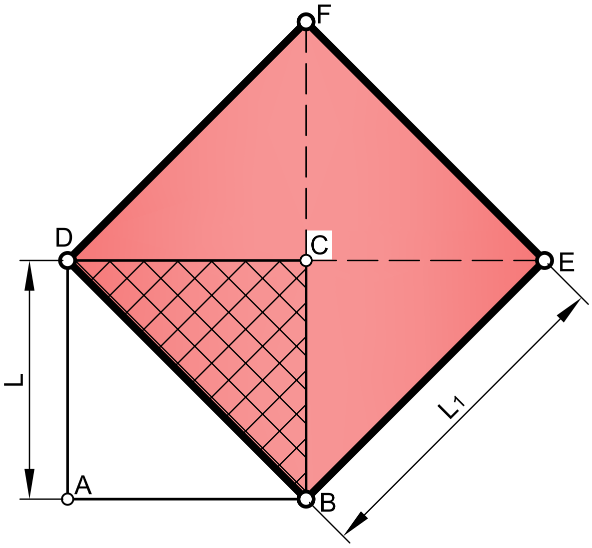
1. Se dibujan dos radios, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, perpendiculares, obteniendo el segmento $\overline{AB} = L_{cuadrado}$, inscrito en la circunferencia.
2. Se llevan sobre la circunferencia, a partir del punto A, dos radios consecutivos, obteniendo el punto C, resultando que el segmento $\overline{AC} = L_{triángulo}$, inscrito en la circunferencia.
3. Se dibuja una recta s perpendicular al radio $\overline{OA}$.
4. Estos lados se llevan sobre una recta s, haciendo centro en el punto A, obteniendo el segmento $\overline{DE} = \pi \times r$.
5. A continuación del punto E, hacia su derecha y sobre la recta s, se lleva el radio de la circunferencia, obteniendo el segmento total $\overline{DF}$.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{DF}$ y centro O', obtenido por el dibujo de la mediatriz del segmento $\overline{DF}$.
7. Por el punto E se dibuja una línea perpendicular a la recta s, que corta a la semicircunferencia en el punto G, obteniendo así el lado $L = \overline{EG}$ buscado.

Por razones de espacio no se ha dibujado el cuadrado completo.

NOTA: Hay otros procedimientos más exactos para rectificar la semicircunferencia, pero este es tal vez el más sencillo.

Multiplos y submultiplos de una figura determinada.

Nos podemos encontrar el caso de querer obtener multiplos de una determinada figura, por ejemplo el doble, cuadruple, etc. El proceso es sencillo y se describe a continuación.Supongamos que ya hemos obtenido el cuadrado de lado L, equivalente a una figura cualquiera, si queremos obtener el cuadrado doble se procedde de la siguiente manera:

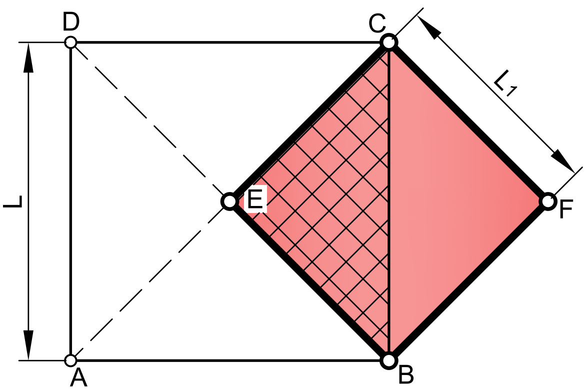


Sea el cuadrado ABCD de lado L:
Si se dibuja el cuadrado de lado la diagonal BD del anterior, se obtiene el cuadrado BEFD de lado L_1, cuya área es doble del ABCD.

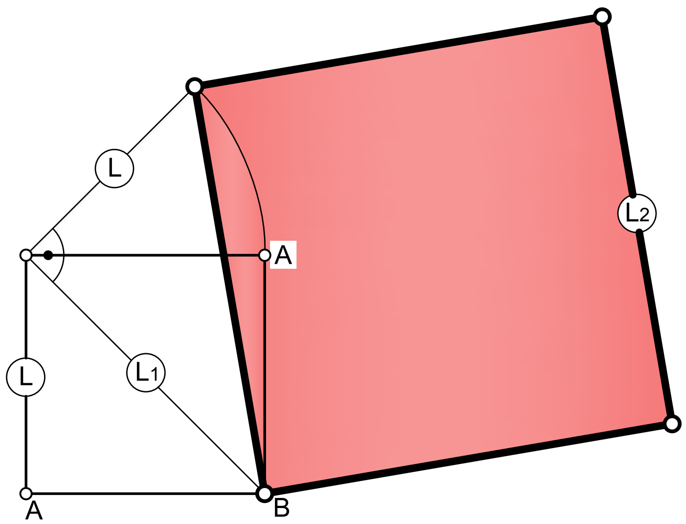
Las diagonal de un cuadrado lo dividen en dos triángulos iguales; así tenemos que el cuadrado ABCD tiene dos triángulos BCD y el cuadrado BEFD tiene cuatro, luego el cuadrado BEFD es el doble del ABCD, es decir: $L_1^2 = 2 \times L^2$.

El proceso se puede repetir, las veces que se quiera, si se dibuja (no realizado) el cuadrado de lado la diagonal BF, se obtendria un cuadrado doble de BEFD y por tanto, $4 = 2^2$, veces el original, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, y así sucesivamente, 2^n, siendo, n, una cantidad entera.

También podemos dividir el área por la mitad, haciendo un proceso inverso al descrito antes, es decir, dibujar el cuadrado de diagonal el lado, L, del cuadrado ABCD de partida, obteniendo así el cuadrado BFCE.
En este caso el triángulo BEF es la cuarta parte del cuadrado ABCD, y como es la mitad del BFCE, éste tiene que ser la mitad del cuadrado original ABCD: $L_1^2 = L^2/2$.
Al igual que en el caso anterior, el proceso es reiterativo, pudiendo obtener cuadrados, la cuarta parte, optava, ..., $1/2^n$ ava parte.
Lo dicho aquí es una aplicación sucesiva del teorema de Pitágoras.



Multiplos y submultiplos distintos de la forma 2^n ò $1/2^n$



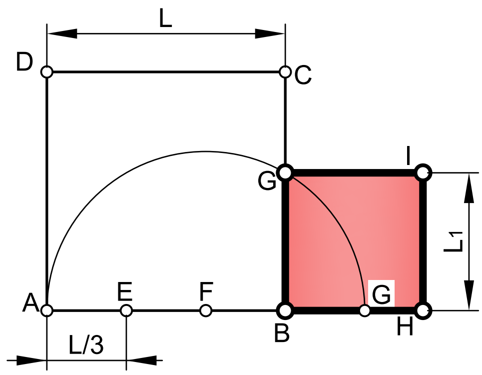
Si se quiere obtener el cuadrado de área triple de otro ABCD, se procede así:

1. Se duplica, pasando del cuadrado de lado L al de lado $L_1 = 2 \times L^2$. No se ha dibujado el cuadrado.
2. Se suma al cuadrado de lado L_1 el de lado L, por Pitágoras, obteniendo el lado L_2, verificandose: $L_2^2 = L_1^2 + L^2 = 2 \times L^2 + L^2 = 3 \times L^2$ c.s.q.d.

El proceso se puede repetir, con otras combinaciones, pero conviene estudiar antes las sumas que se van a hacer, buscando siempre aquellas donde intervengan valores de la serie 2^n.

Si lo que se buscan son fracciones distintas de la $1/2^n$, entonces se procede, por ejemplo, como se muestra en la figura de la izquierda, donde queremos, por ejemplo, el cuadrado de área 1/3 de la del cuadrado, ABCD, de lado L, donde haciendo cálculos:

$L^2 = 3 \times L_1^2$; despejando L_1^2 tenemos, $L_1^2 = L^2/3 = (L/3) \times L$, es decir, la media proporcional entre 1/3 de L y L.



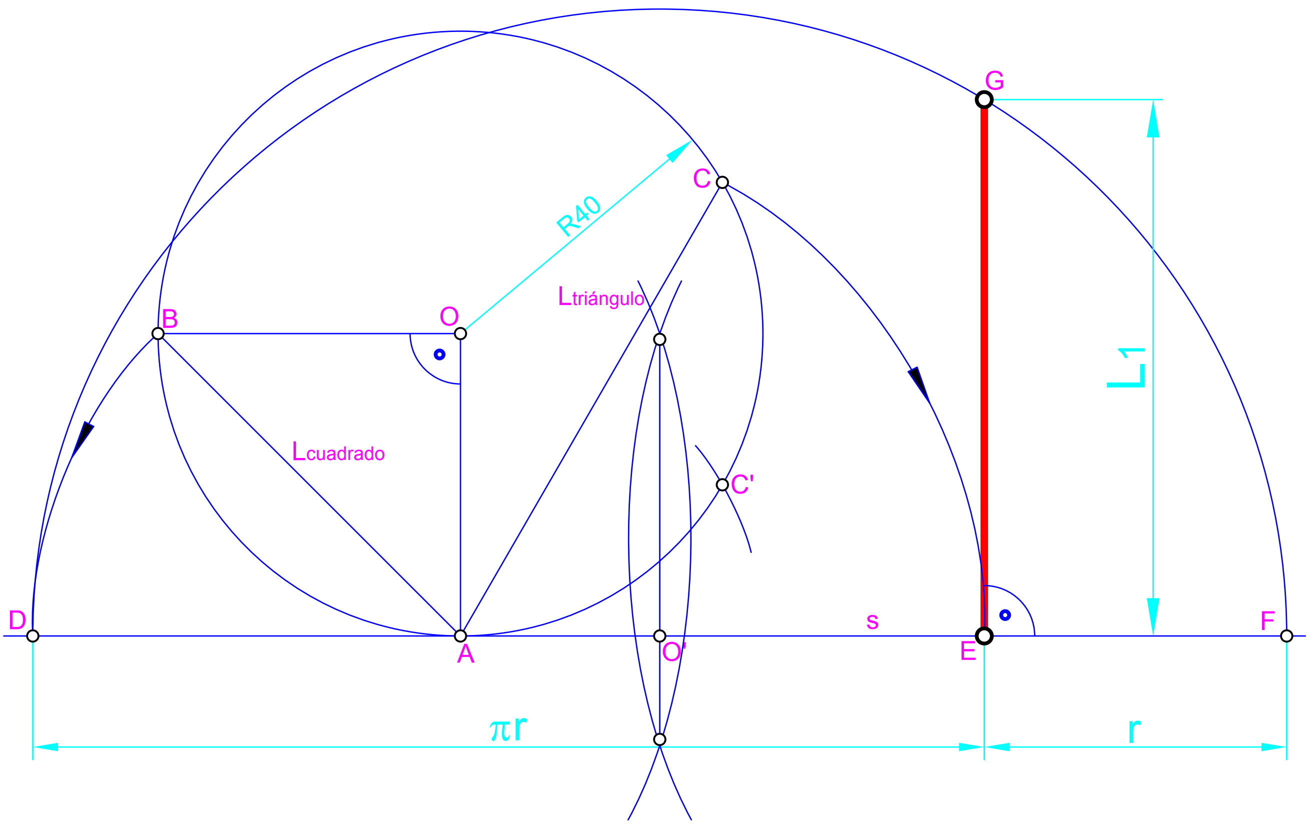
Cuadratura del círculo.

Este es uno de los tres famosos problemas de la antigüedad clásica griega , los otros dos son: duplicación del cubo y trisección del ángulo, irresolubles de manera exacta, debido a que en su construcción interviene el número π. En el siglo XIX (1882) el matemático alemán Ferdinand Lindemann probó que π es un número transcendente, lo que implica que es imposible cuadrar el círculo.

La justificación que se va a describir a continuación está basada en lo siguiente:

El área del circulo vale $\pi \times r^2$ = (reagrupando términos) = $(\pi \times r) \times r = L^2$ es decir,

Tenemos la media proporcional entre la longitud de la **semicircunferencia**, $\pi \times r$, y el **radio**, r. Cuyo construcción gráfica se describe a continuación, para una circunferencia de radio r:



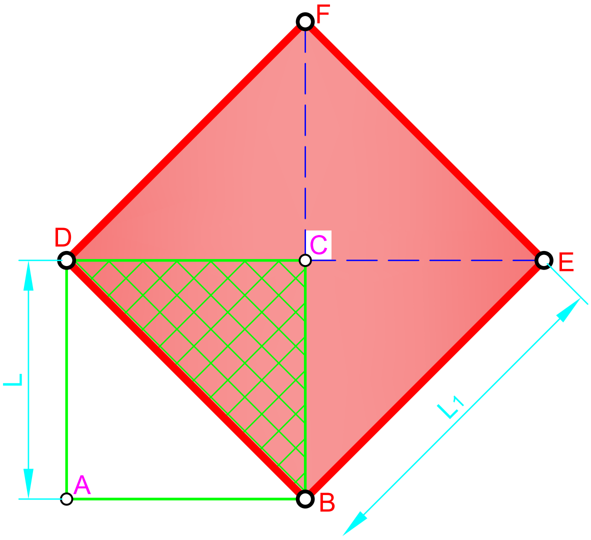
1. Se dibujan dos radios, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, perpendiculares, obteniendo el segmento $\overline{AB}$ = $L_{cuadrado}$, inscrito en la circunferencia.
2. Se llevan sobre la circunferencia, a partir del punto A, dos radios consecutivos, obteniendo el punto C, resultando que el segmento $\overline{AC}$ = $L_{triángulo}$, inscrito en la circunferencia.
3. Se dibuja una recta s perpendicular al radio $\overline{OA}$.
4. Estos lados se llevan sobre una recta s, haciendo centro en el punto A, obteniendo el segmento $\overline{DE} = \pi \times r$.
5. A continuación del punto E, hacia su derecha y sobre la recta s, se lleva el radio de la circunferencia, obteniendo el segmento total $\overline{DF}$.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{DF}$ y centro O', obtenido por el dibujo de la mediatriz del segmento $\overline{DF}$.
7. Por el punto E se dibuja una línea perpendicular a la recta s, que corta a la semicircunferencia en el punto G, obteniendo así el lado L = $\overline{EG}$ buscado.

Por razones de espacio no se ha dibujado el cuadrado completo.

NOTA: Hay otros procedimientos más exactos para rectificar la semicircunferencia, pero este es tal vez el más sencillo.

Multiplos y submultiplos de una figura determinada.

Nos podemos encontrar el caso de querer obtener multiplos de una determinada figura, por ejemplo el doble, cuadruple, etc. El proceso es sencillo y se describe a continuación.Supongamos que ya hemos obtenido el cuadrado de lado L, equivalente a una figura cualquiera, si queremos obtener el cuadrado doble se procedde de la siguiente manera:



Sea el cuadrado ABCD de lado L:

Si se dibuja el cuadrado de lado la diagonal BD del anterior, se obtiene el cuadrado BEFD de lado L_1, cuya área es doble del ABCD.

Las diagonal de un cuadrado lo dividen en dos triángulos iguales; así tenemos que el cuadrado ABCD tiene dos triángulos BCD y el cuadrado BEFD tiene cuatro, luego el cuadrado BEFD es el doble del ABCD, es decir: $L_1^2 = 2 \times L^2$.

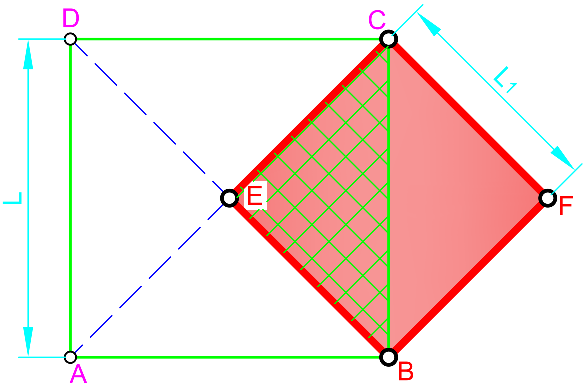
El proceso se puede repetir, las veces que se quiera, si se dibuja (no realizado) el cuadrado de lado la diagonal BF, se obtendria un cuadrado doble de BEFD y por tanto, $4 = 2^2$, veces el original, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, y así sucesivamente, 2^n, siendo, n, una cantidad entera.

También podemos dividir el área por la mitad, haciendo un proceso inverso al descrito antes, es decir, dibujar el cuadrado de diagonal el lado, L, del cuadrado ABCD de partida, obteniendo así el cuadrado BFCE.

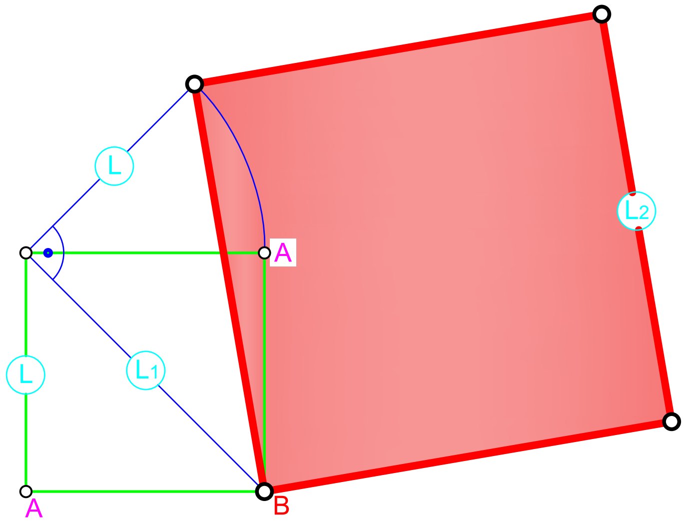
En este caso el triángulo BEF es la cuarta parte del cuadrado ABCD, y como es la mitad del BFCE, éste tiene que ser la mitad del cuadrado original ABCD: $L_1^2 = L^2/2$.

Al igual que en el caso anterior, el proceso es reiterativo, pudiendo obtener cuadrados, la cuarta parte, optava, ..., $1/2^n$ ava parte.

Lo dicho aquí es una aplicación sucesiva del teorema de Pitágoras.



Multiplos y submultiplos distintos de la forma 2^n ò $1/2^n$



Si se quiere obtener el cuadrado de área triple de otro ABCD, se procede así:

1. Se duplica, pasando del cuadrado de lado L al de lado $L_1 = 2 \times L^2$. No se ha dibujado el cuadrado.
2. Se suma al cuadrado de lado L_1 el de lado L, por Pitágoras, obteniendo el lado L_2, verificandose:
   $L_2^2 = L_1^2 + L^2 = 2 \times L^2 + L^2 = 3 \times L^2$ c.s.q.d.

El proceso se puede repetir, con otras combinaciones, pero conviene estudiar antes las sumas que se van a hacer, buscando siempre aquellas donde intervengan valores de la serie 2^n.

Si lo que se buscan son fracciones distintas de la $1/2^n$, entonces se procede, por ejemplo, como se muestra en la figura de la izquierda, donde queremos, por ejemplo, el cuadrado de área 1/3 de la del cuadrado, ABCD, de lado L, donde haciendo cálculos:

$L^2 = 3 \times L_1^2$; despejando L_1^2 tenemos, $L_1^2 = L^2/3 = (L/3) \times L$, es decir, la media proporcional entre 1/3 de L y L.