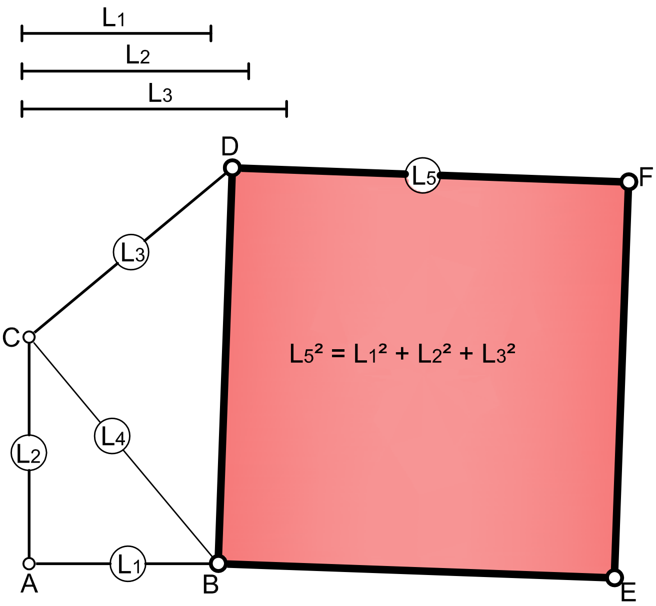


Cuadrados de lados distintos: suma y resta.

Podemos tener la situación de tres cuadrados de lados L_1, L_2 y L_3 y queramos obtener, por ejemplo, el cuadrado suma de estos tres.

El proceso es aplicar Pitágoras sucesivamente, tomando estos lados como catetos, como se indica:

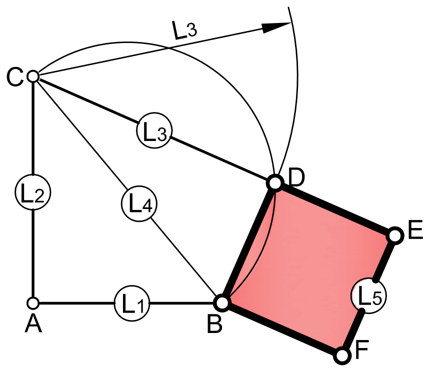
1. Se dibuja el triángulo rectángulo BAC de catetos L_1 y L_2 obteniendo el cuadrado (no dibujado) de lado L_4.
2. Se aplica nuevamente Pitágoras a los lados L_3 y L_4, dibujando el triángulo BCD, obteniendo el cuadrado solución, de lado L_5.

Se comprueba que: $L_5^2 = L_3^2 + L_4^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, es decir la suma de los tres.

Ahora supongamos que queremos obtener el cuadrado equivalente a la suma de los dos primeros menos el tercero. El proceso es:

Aplicar Pitágoras sucesivamente, tomando los lados L_1 y L_2 como catetos y él L_3 como hipotenusa, como se indica:

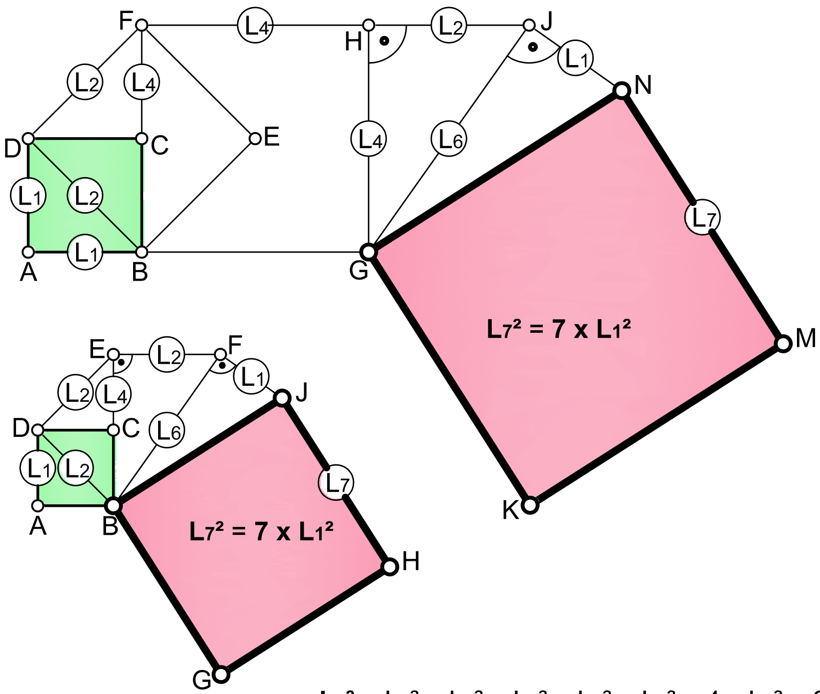
1. Se dibuja el triángulo rectángulo BAC de catetos L_1 y L_2 obteniendo el cuadrado (no dibujado) de lado L_4.
2. Se dibuja un semircunferencia de diámetro L_4.
3. Se toma L_3 como hipotenusa, llevandolo sobre la semicircunferencia, a partir del vértice C, por ejemplo, obteniendo el punto D. El segmento $\overline{BD}$ es el lado L_5, del cuadrado suma de L_1 y L_2 menos L_3. Así se ha obtenido el cuadrado BFED .



Se comprueba que: $L_5^2 = L_4^2 + L_3^2 = L_1^2 + L_2^2 - L_3^2$

En general podemos resumir lo último expuesto, diciendo que: cuando hay que sumar varios lados de cuadrados, estos se toman como catetos de triángulos rectángulos sucesivos y en caso de que haya que restarlos, el mayor, de la resultante (en caso de ser varios), se toma como hipotenusa y el menor como cateto.

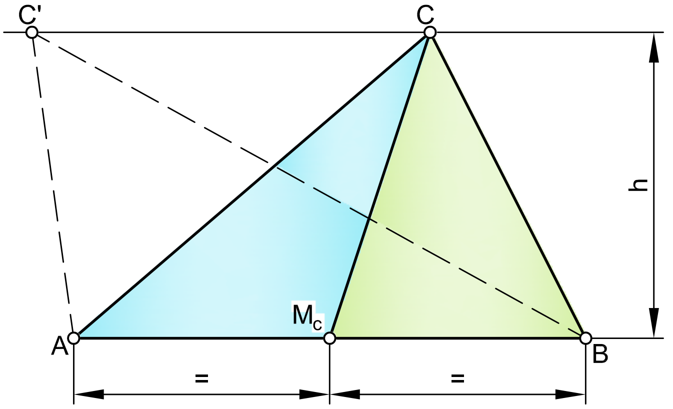
Para finalizar esta parte, veamos como obtener el **cuadrado de área siete veces mayor**, por ejemplo, que otro cuadrado de lado L_1. El proceso es el siguiente:

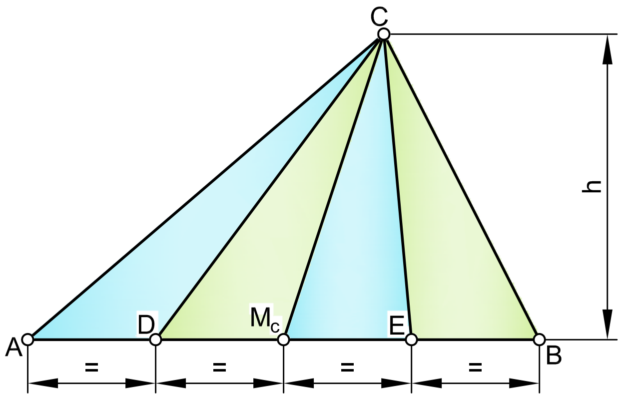


1. En este caso siguiendo los pasos descritos antes, se pasa del cuadrado de lado L_1, al cuadrado de lado L_4, de área cuatro veces mayor.
2. A este último lado, L_4, se le pueden añadir sucesivamente, en concreto tres lados L_1, hasta conseguir L_7; pero es más corto, añadir L_2 y después un L_1, como se muestra en la figura de la izquierda.

Realmente no hay que hacer lo de la figura de la izquierda, sólo mostrado así, para mejor visualización del proceso; si no que se hace como muestra el dibujo, a una escala inferior, mostrado debajo del anterior. El resultado es el mismo, por supuesto, pero se necesita menos espacio. Si hacemos algunos cálculos matemáticos, aplicando Pitágoras se tiene la "ristra" algebraica siguiente:

$$L_7^2 = L_6^2 + L_1^2 = L_4^2 + L_2^2 + L_1^2 = 4 \times L_1^2 + 2 \times L_1^2 + L_1^2 = \mathbf{7 \times L_1^2}$$





División de figuras en partes equivalentes, por líneas a partir desde un mismo vértice.

Comenzamos esta parte con el triángulo, pues es base de otras construcciones.

Sea el triángulo ABC; manteniendo la misma base, por ejemplo AB, y altura, h, el área de todos los triángulos vale lo mismo, aunque variemos el vértice, C. En la figura se ha tomado otro vértice, C', siendo el área del triángulo ABC' igual a la del triángulo ABC.

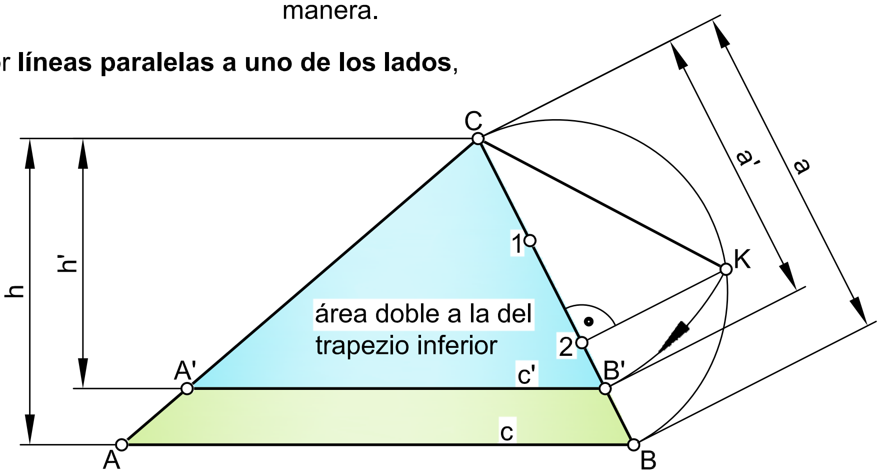
Si la base la dividimos en partes iguales, por ejemplo dos, el área de cada parte vale lo mismo, pues las bases son iguales y mantenemos la misma altura. En nuestro ejemplo los triángulos ADC y DBC son equivalentes, por lo dicho antes, pero tienen distinta forma.

Este proceso de dividir la base en partes iguales, se puede repetir, con un número de partes cualesquiera, por ejemplo, con tres, cuatro, etc. En la figura se ha dividido en cuatro partes, resultando que los cuatro triángulos son equivalentes, pero distintos.

Lo descrito aquí es respecto de **divisiones** realizadas **a partir de un vértice**; la cuestión, que no se va a abordar aquí, se complica cuando se quiere hacer esta descomposición de cualquier manera.

Ahora veamos la **división** por **líneas paralelas a uno de los lados**, por ejemplo a la base.

Antes de hacer divisiones iguales, veamos el caso de dividirla en partes proporcionales a una determinada cantidad, por ejemplo, veamos el caso de que el área del triángulo A'B'C sea doble que la del trapecio ABB'A', es decir la proporción entre el triángulo A'B'C y el ABC es de 2/3.



Realicemos los siguientes cálculos, que justifican la construcción:

Si el área del triángulo A'B'C es doble que la del trapecio ABB'A', tenemos la siguiente expresión:

área $_{\text{triángulo A'B'C}}$ = 2 x área $_{\text{trapecio ABB'A'}}$ = 2 x (área $_{\text{triángulo ABC}}$ - área $_{\text{triángulo A'B'C}}$), es decir, ...

$$\frac{c' \times h'}{2} = 2 \times \left(\frac{c \times h}{2} - \frac{c' \times h'}{2} \right)$$

Eliminando los 2, del denominador se tiene...

c' x h' = 2 x c x h - 2 x c' x h' (reordenando terminos) ... 3 x c'xh' = 2 x cxh, resultando después de operar que

$$\frac{c'}{c} = \frac{2}{3} \times \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

Estableciendo ahora la proporcionalidad entre las bases, c y c' y las alturas, h y h', con los lados a' y a, por ejemplo, se tiene ... $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ y $\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$ expresiones que sustituidas en (1) nos dan

$\frac{a'}{a} = \frac{2}{3} \times \frac{a}{a'}$ que reordenando de nuevo ... $a'^2 = \frac{2}{3} \times a^2 = (\frac{2}{3} \times a) \times a$, es decir,

tenemos la media proporcional entre el lado, a y 2/3 del mismo; la proporción entre los triángulos.

Construcción mostrada en la figura, dividiendo el lado, a, en tres partes iguales y cogiendo 2, para realizar la media proporcional. Si el triángulo hubiera sido de área la mitad del trapecio, se hubiera cogido una marca en la división del lado a, pues ahora la proporción es de 1/3.

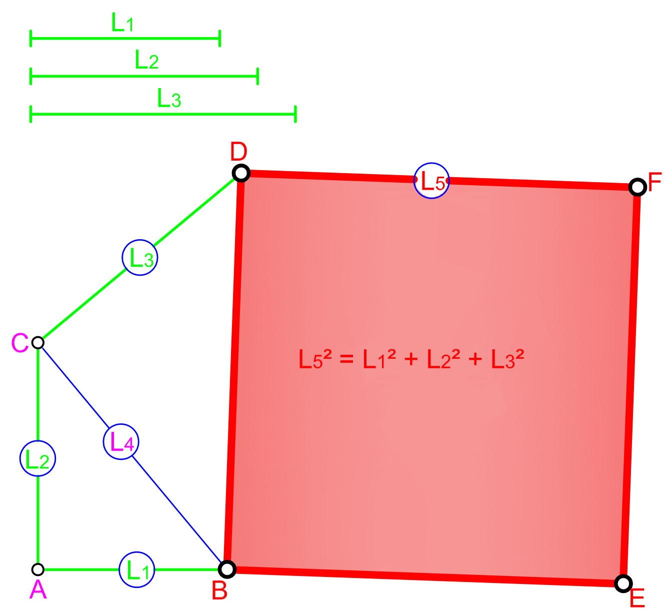
Cuadrados de lados distintos: suma y resta.

Podemos tener la situación de tres cuadrados de lados L_1, L_2 y L_3 y queramos obtener, por ejemplo, el cuadrado suma de estos tres.

El proceso es aplicar Pitágoras sucesivamente, tomando estos lados como catetos, como se indica:

1. Se dibuja el triángulo rectángulo BAC de catetos L_1 y L_2 obteniendo el cuadrado (no dibujado) de lado L_4.
2. Se aplica nuevamente Pitágoras a los lados L_3 y L_4, dibujando el triángulo BCD, obteniendo el cuadrado solución, de lado L_5.

Se comprueba que: $L_5^2 = L_3^2 + L_4^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, es decir la suma de los tres.

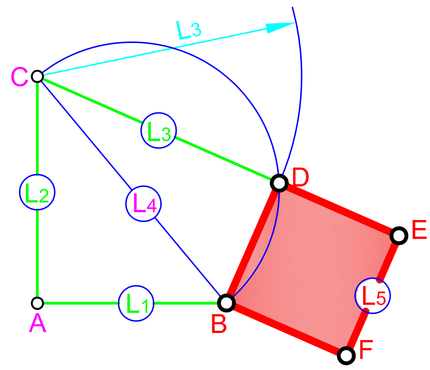


Ahora supongamos que queremos obtener el cuadrado equivalente a la suma de los dos primeros menos el tercero. El proceso es:

Aplicar Pitágoras sucesivamente, tomando los lados L_1 y L_2 como catetos y él L_3 como hipotenusa, como se indica:

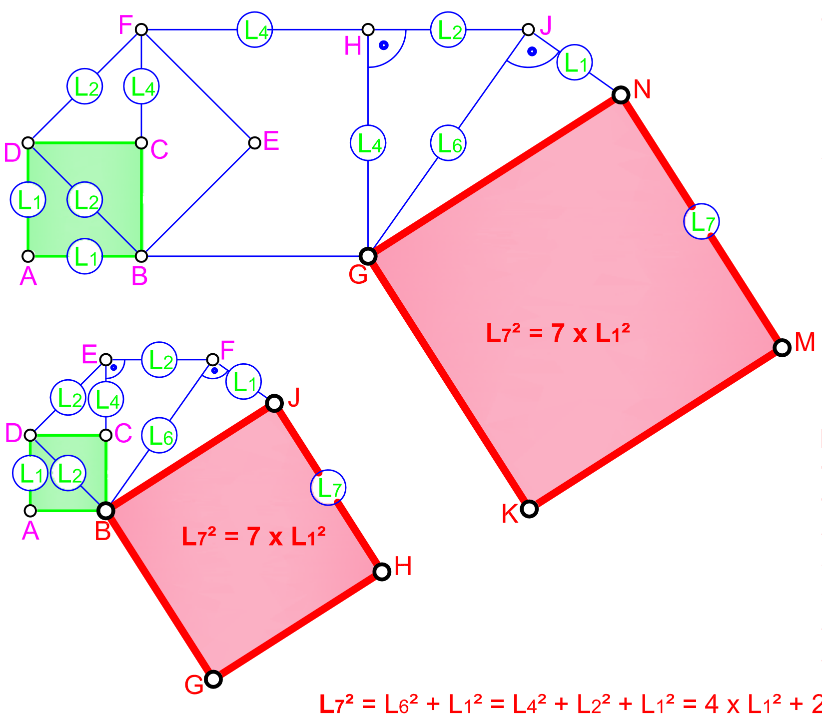
1. Se dibuja el triángulo rectángulo BAC de catetos L_1 y L_2 obteniendo el cuadrado (no dibujado) de lado L_4.
2. Se dibuja un semircunferencia de diámetro L_4.
3. Se toma L_3 como hipotenusa, llevandolo sobre la semicircunferencia, a partir del vértice C, por ejemplo, obteniendo el punto D. El segmento $\overline{BD}$ es el lado L_5, del cuadrado suma de L_1 y L_2 menos L_3. Así se ha obtenido el cuadrado BFED .

Se comprueba que: $L_5^2 = L_4^2 + L_3^2 = L_1^2 + L_2^2 - L_3^2$



En general podemos resumir lo último expuesto, diciendo que: cuando hay que sumar varios lados de cuadrados, estos se toman como catetos de triángulos rectángulos sucesivos y en caso de que haya que restarlos, el mayor, de la resultante (en caso de ser varios), se toma como hipotenusa y el menor como cateto.

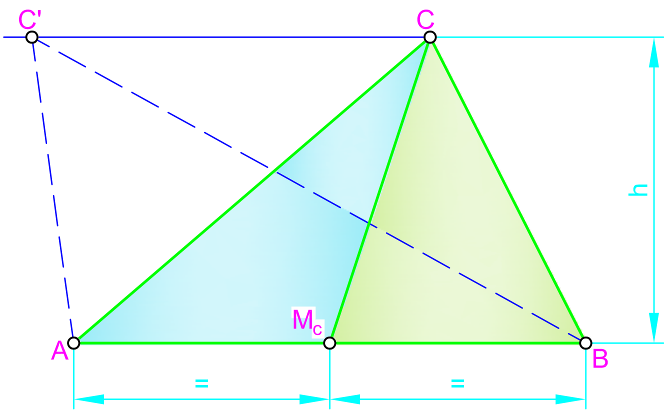
Para finalizar esta parte, veamos como obtener el **cuadrado de área siete veces mayor**, por ejemplo, que otro cuadrado de lado L_1. El proceso es el siguiente:



1. En este caso siguiendo los pasos descritos antes, se pasa del cuadrado de lado L_1, al cuadrado de lado L_4, de área cuatro veces mayor.
2. A este último lado, L_4, se le pueden añadir sucesivamente, en concreto tres lados L_1, hasta conseguir L_7; pero es más corto, añadir L_2 y después un L_1, como se muestra en la figura de la izquierda.

Realmente no hay que hacer lo de la figura de la izquierda, sólo mostrado así, para mejor visualización del proceso; si no que se hace como muestra el dibujo, a una escala inferior, mostrado debajo del anterior. El resultado es el mismo, por supuesto, pero se necesita menos espacio. Si hacemos algunos cálculos matemáticos, aplicando Pitágoras se tiene la "ristra" algebraica siguiente:

$$L_7^2 = L_6^2 + L_1^2 = L_4^2 + L_2^2 + L_1^2 = 4 \times L_1^2 + 2 \times L_1^2 + L_1^2 = \mathbf{7 \times L_1^2}$$

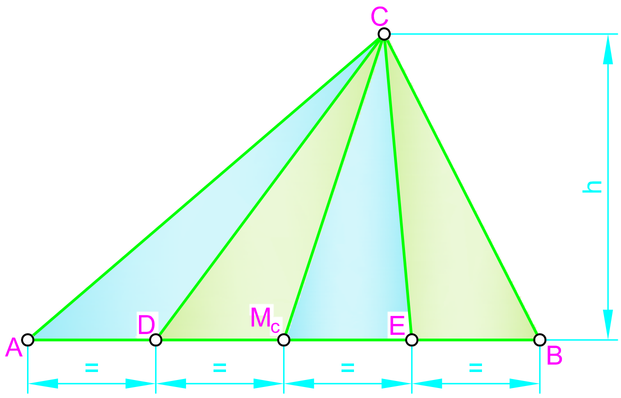


División de figuras en partes equivalentes, por líneas a partir desde un mismo vértice.

Comenzamos esta parte con el triángulo, pues es base de otras construcciones.

Sea el triángulo ABC; manteniendo la misma base, por ejemplo AB, y altura, h, el área de todos los triángulos vale lo mismo, aunque variemos el vértice, C. En la figura se ha tomado otro vértice, C', siendo el área del triángulo ABC' igual a la del triángulo ABC.

Si la base la dividimos en partes iguales, por ejemplo dos, el área de cada parte vale lo mismo, pues las bases son iguales y mantenemos la misma altura. En nuestro ejemplo los triángulos ADC y DBC son equivalentes, por lo dicho antes, pero tienen distinta forma.

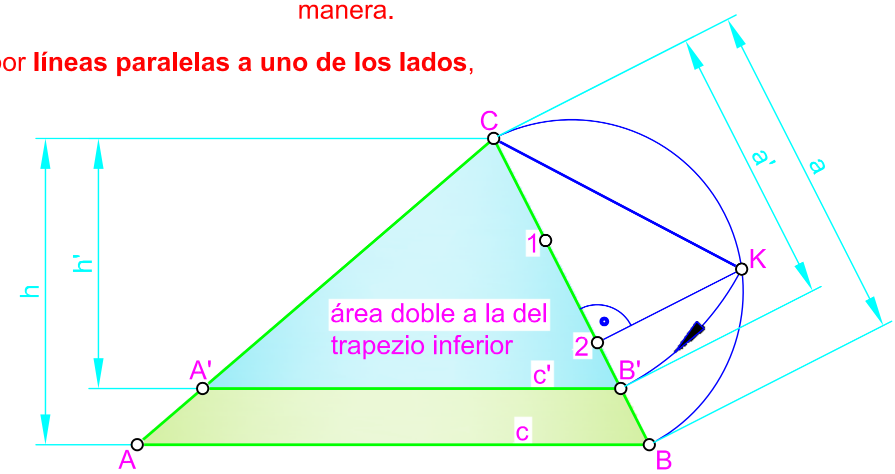


Este proceso de dividir la base en partes iguales, se puede repetir, con un número de partes cualesquiera, por ejemplo, con tres, cuatro, etc. En la figura se ha dividido en cuatro partes, resultando que los cuatro triángulos son equivalentes, pero distintos.

Lo descrito aquí es respecto de **divisiones** realizadas **a partir de un vértice**; la cuestión, que no se va a abordar aquí, se complica cuando se quiere hacer esta descomposición de cualquier manera.

Ahora veamos la **división** por **líneas paralelas a uno de los lados**, por ejemplo a la base.

Antes de hacer divisiones iguales, veamos el caso de dividirla en partes proporcionales a una determinada cantidad, por ejemplo, veamos el caso de que el área del triángulo A'B'C sea doble que la del trapecio ABB'A', es decir <u>la proporción entre el triángulo A'B'C y el ABC es de 2/3</u>.



Realicemos los siguientes cálculos, que justifican la construcción:

Si el área del triángulo A'B'C es doble que la del trapecio ABB'A', tenemos la siguiente expresión:

área $_{\text{triángulo A'B'C}}$ = 2 x área $_{\text{trapecio ABB'A'}}$ = 2 x (área $_{\text{triángulo ABC}}$ - área $_{\text{triángulo A'B'C}}$), es decir, ...

$$\frac{c' \times h'}{2} = 2 \times \left(\frac{c \times h}{2} - \frac{c' \times h'}{2} \right)$$

Eliminando los 2, del denominador se tiene...

c' x h' = 2 x c x h - 2 x c' x h' (reordenando terminos) ... 3 x c'xh' = 2 x cxh, resultando después de operar que

$$\frac{c'}{c} = \frac{2}{3} \times \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

Estableciendo ahora la proporcionalidad entre las bases, c y c' y las alturas, h y h', con los lados a' y a, por ejemplo, se tiene ... $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ y $\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$ expresiones que sustituidas en (1) nos dan

$\frac{a'}{a} = \frac{2}{3} \times \frac{a}{a'}$ que reordenando de nuevo ... $a'^2 = \frac{2}{3} \times a^2 = (\frac{2}{3} \times a) \times a$, es decir,

tenemos la media proporcional entre el lado, a y 2/3 del mismo; la proporción entre los triángulos.

Construcción mostrada en la figura, dividiendo el lado, a, en tres partes iguales y cogiendo 2, para realizar la media proporcional. Si el triángulo hubiera sido de área la mitad del trapecio, se hubiera cogido una marca en la división del lado a, pues ahora la proporción es de 1/3.