

Se va a aplicar la inversión, siendo centro de inversión el punto P y la circunferencia O' inversa de sí misma, con potencia de inversión el valor  $k^2$ .

El problema ha quedado reducido a: 1 - determinar la circunferencia O''' inversa de la O'; 2 - dibujar las rectas tangentes a la circunferencia O' y O'''; 3 - deshacer la inversión, obteniendo las circunferencias tangentes buscadas.

Veamos los pasos a seguir:

1 - Se dibuja la recta tangente, t, a la circunferencia O' desde el punto P, cuyo radio es k. *Para determinar esta recta tangente, se ha dibujado la semicircunferencia de diámetro O'P, obteniendo el punto de tangencia, N.*

2 - Se dibuja la circunferencia, de puntos dobles, de centro P y radio  $PN = K$ .

3 - Hay que determinar la circunferencia inversa de la O', para ello:

- Se une el punto P (centro de inversión) con el centro O', hasta cortar a la circunferencia O' en el punto A.
- Se dibuja por A la recta tangente, s, a la circunferencia de puntos dobles, obteniendo el punto de tangencia A". *Solo se ha dibujado el arco necesario de la circunferencia de diámetro AP, para obtener el punto de tangencia A".*
- Por A" se dibuja la recta perpendicular a la recta AP, obteniendo, al cortarla, el punto A', inverso del A. *Esto es por el antiparalelismo entre las parejas de rectas AA"-A"P y AA'-A"A".*
- Se dibuja por P la recta tangente, t''', a la circunferencia O', obteniendo el punto T de tangencia. *Solo se ha dibujado el arco necesario de la circunferencia de diámetro O'P, para obtener el punto de tangencia T.*
- Se dibuja la circunferencia O, que pasa por los puntos A, A' y T, que corta a la recta t''' en el punto T', inverso del T. Cuatro puntos inversos, dos a dos, están en una circunferencia.
- Por T' se dibuja la perpendicular a la recta t''', que corta a la AP en el centro O''', de la circunferencia inversa de la O'.

4 - Se dibujan las rectas tangentes interiores t' y t'' a las circunferencias O'' y O''', obteniendo los puntos de tangencia B, C, D y E. *Para esto, se ha dilatado positivamente la circunferencia O''', en el valor del radio de la circunferencia O''.*

5 - Se unen estos puntos con el P, cortando a las circunferencias dato, en los puntos de tangencia, inversos de los anteriores, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>. *Pues en la inversión se conservan los puntos de tangencia.*

6 - Se unen los centros O' y O'' con sus respectivos puntos de tangencia T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>, cortandose las líneas en los centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, de las circunferencias tangentes buscadas, resultando que la circunferencia O<sub>2</sub> es inversa de la recta t'' y la circunferencia O<sub>1</sub> inversa de la t'. Basta para comprobar esto último, verificar la perpendicularidad entre las líneas O<sub>1</sub>P y O<sub>2</sub>P con las rectas t' y t'' respectivamente.

Si en el paso 4º se dibujan las rectas tangentes exteriores, se obtienen otras dos soluciones: una exterior a las circunferencias dadas y la otra que las contiene.

Este caso, mediante dilataciones (procedimiento de Vieta, siglo XVI) negativas, se transforma en el caso: circunferencias tangentes a otras dos y que pasen por un punto exterior, según el esquema del ejercicio.

El proceso es el siguiente:

1. Empleando dilatación negativa: se restan a los radios, r'' y r''', de las circunferencias mayores el de la menor, r', se obtienen dos circunferencias auxiliares (de líneas de trazos).
2. Se dibuja la recta tangente, t, exterior a las circunferencias auxiliares, obteniendo los puntos de tangencia T y T'. *Para este proceso, las circunferencias necesarias, se han dibujado con un trazo más corto.*
3. Se prolonga la tangente, t, que corta a la recta que une los centros O'' y O''', en el punto O+, centro de inversión positivo.
4. Se dibuja la circunferencia O'<sub>1</sub> que pasa por los puntos T, T' y O'.
5. La línea O+ O' corta a la circunferencia c. O'<sub>1</sub> en el punto O'<sub>2</sub>.

De esta manera hemos transformado este caso en el *trazado de circunferencias tangentes a otra circunferencia (las dilatadas O'' u O''')* y que pasen por dos puntos exteriores O' y O'<sub>2</sub>, que se resuelve, tomando la circunferencia dilatada O''' por ejemplo, por el proceso ...

6. Se dibuja la mediatriz, s, del segmento O'O'<sub>2</sub>.
7. Aprovechamos la circunferencia O'<sub>1</sub> auxiliar que pase por los puntos O' y O'<sub>2</sub>, cortando a la circunferencia O''' en los puntos T' y A.
8. Las líneas AT' y O'O'<sub>2</sub> se cortan en el punto Cr (centro radical).
9. Desde Cr se dibujan las rectas tangentes, t'' y t''', a la circunferencia dilatada O''', siendo los puntos de tangencia T'' y T''', los buscados realmente. *Para determinar T' y T'', se ha dibujado solo parte del arco de circunferencia de diámetro CrO''' y centro O'.*
10. Los centros O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, de las circunferencias buscadas, se determinan al cortar a la mediatriz, s, las líneas que unen los puntos de tangencia T'' y T''' con el centro O'''.
11. Las líneas anteriores cortan a la circunferencia dato O''', en los puntos de tangencia T'''<sub>1</sub> y T'''<sub>2</sub>. Los otros puntos de tangencia: T''<sub>1</sub>, T''<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>, se obtienen al unir los centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, con los otros centros datos, O' y O'' y cortar a las circunferencias datos. Solo queda dibujar las circunferencias solución de centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, y radios O<sub>1</sub>T'<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>T'<sub>2</sub>.

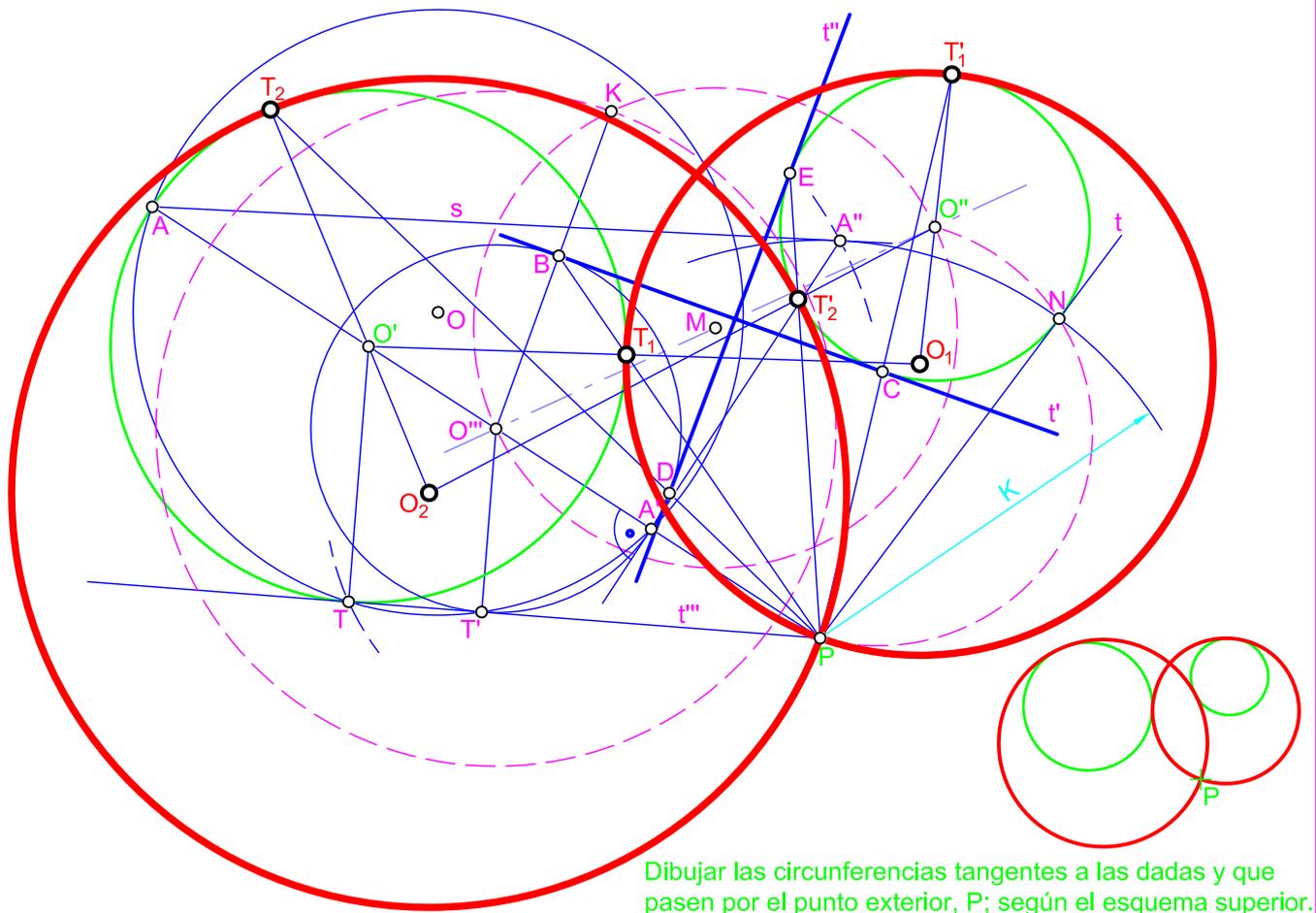
Lo que se ha hecho en este último paso es deshacer la dilatación de las dos circunferencias dilatadas-solución (dibujadas de trazos).



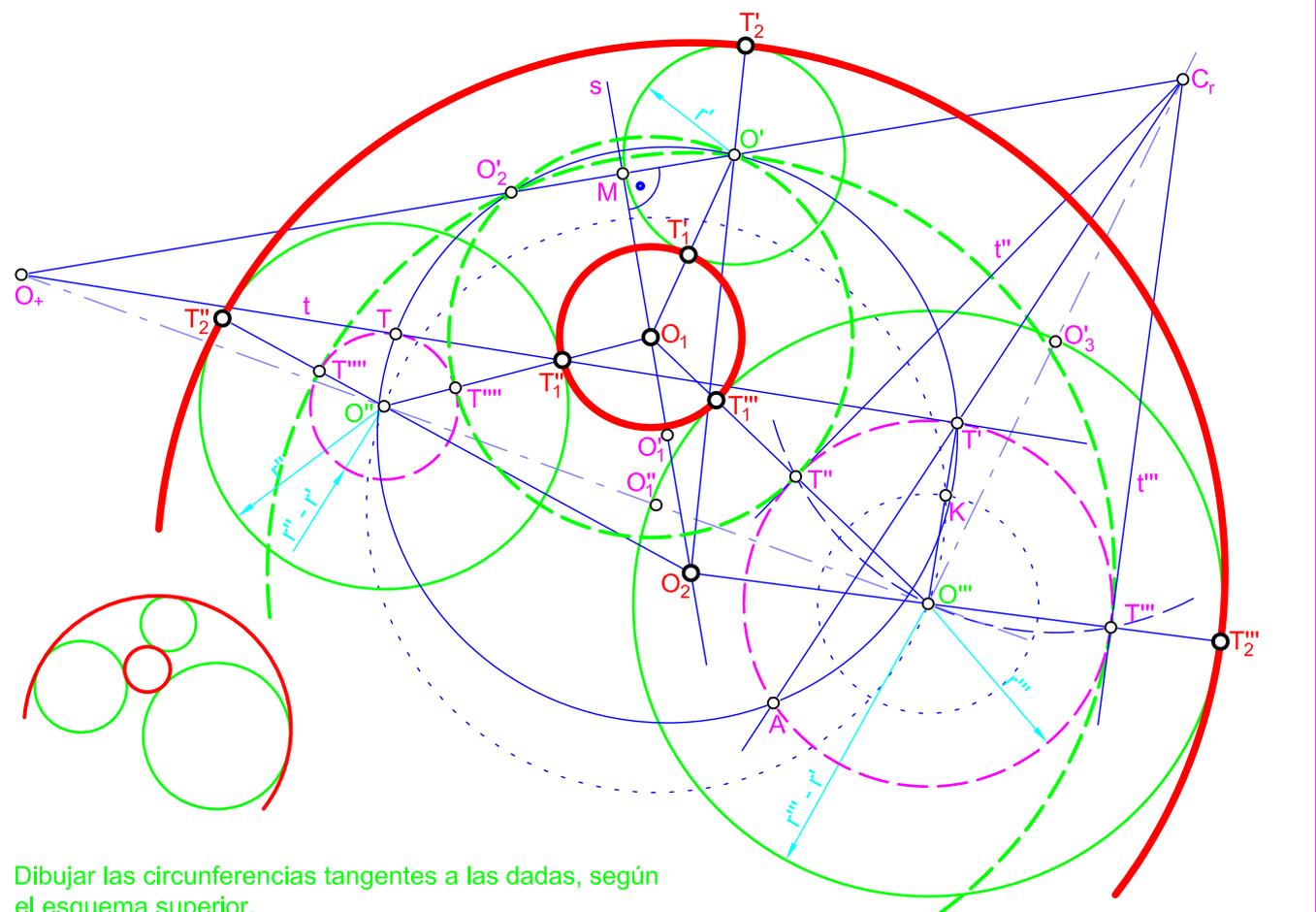
## Tangencias 3

CENTRO

1.16 BT II



Dibujar las circunferencias tangentes a las dadas y que pasen por el punto exterior, P; según el esquema superior.



Dibujar las circunferencias tangentes a las dadas, según el esquema superior.

Se va a aplicar la inversión, siendo centro de inversión el punto P y la circunferencia O' inversa de sí misma, con potencia de inversión el valor  $k^2$ .

El problema ha quedado reducido a: 1 - determinar la circunferencia O''' inversa de la O'; 2 - dibujar las rectas tangentes a la circunferencia O' y O''; 3 - deshacer la inversión, obteniendo las circunferencias tangentes buscadas.

Veamos los pasos a seguir:

1 - Se dibuja la recta tangente, t, a la circunferencia O' desde el punto P, cuyo radio es k. *Para determinar esta recta tangente, se ha dibujado la semicircunferencia de diámetro O'P, obteniendo el punto de tangencia, N.*

2 - Se dibuja la circunferencia, de puntos dobles, de centro P y radio  $PN = K$ .

3 - Hay que determinar la circunferencia inversa de la O', para ello:

- Se une el punto P (centro de inversión) con el centro O', hasta cortar a la circunferencia O' en el punto A.
- Se dibuja por A la recta tangente, s, a la circunferencia de puntos dobles, obteniendo el punto de tangencia A". *Solo se ha dibujado el arco necesario de la circunferencia de diámetro AP, para obtener el punto de tangencia A".*
- Por A" se dibuja la recta perpendicular a la recta AP, obteniendo, al cortarla, el punto A', inverso del A. *Esto es por el antiparalelismo entre las parejas de rectas AA"-A"P y AA'-A"A".*
- Se dibuja por P la recta tangente, t''', a la circunferencia O', obteniendo el punto T de tangencia. *Solo se ha dibujado el arco necesario de la circunferencia de diámetro O'P, para obtener el punto de tangencia T.*
- Se dibuja la circunferencia O, que pasa por los puntos A, A' y T, que corta a la recta t''' en el punto T', inverso del T. Cuatro puntos inversos, dos a dos, están en una circunferencia.
- Por T' se dibuja la perpendicular a la recta t''', que corta a la AP en el centro O''', de la circunferencia inversa de la O'.

4 - Se dibujan las rectas tangentes interiores t' y t'' a las circunferencias O'' y O''', obteniendo los puntos de tangencia B, C, D y E. Para esto, se ha dilatado positivamente la circunferencia O''', en el valor del radio de la circunferencia O''.

5 - Se unen estos puntos con el P, cortando a las circunferencias dato, en los puntos de tangencia, inversos de los anteriores, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>. Pues en la inversión se conservan los puntos de tangencia.

6 - Se unen los centros O' y O'' con sus respectivos puntos de tangencia T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>, cortandose las líneas en los centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, de las circunferencias tangentes buscadas, resultando que la circunferencia O<sub>2</sub> es inversa de la recta t'' y la circunferencia O<sub>1</sub> inversa de la t'. Basta para comprobar esto último, verificar la perpendicularidad entre las líneas O<sub>1</sub>P y O<sub>2</sub>P con las rectas t' y t'' respectivamente.

Si en el paso 4º se dibujan las rectas tangentes exteriores, se obtienen otras dos soluciones: una exterior a las circunferencias dadas y la otra que las contiene.

Este caso, mediante dilataciones (procedimiento de Vieta, siglo XVI) negativas, se transforma en el caso: circunferencias tangentes a otras dos y que pasen por un punto exterior, según el esquema del ejercicio.

El proceso es el siguiente:

1. Empleando dilatación negativa: se restan a los radios, r'' y r''', de las circunferencias mayores el de la menor, r', se obtienen dos circunferencias auxiliares (de líneas de trazos).
2. Se dibuja la recta tangente, t, exterior a las circunferencias auxiliares, obteniendo los puntos de tangencia T y T'. Para este proceso, las circunferencias necesarias, se han dibujado con un trazo más corto.
3. Se prolonga la tangente, t, que corta a la recta que une los centros O'' y O''', en el punto O+, centro de inversión positivo.
4. Se dibuja la circunferencia O' que pasa por los puntos T, T' y O'.
5. La línea O+ O' corta a la circunferencia c. O' en el punto O'2.

De esta manera hemos transformado este caso en el *trazado de circunferencias tangentes a otra circunferencia (las dilatadas O'' u O''')* y que pasen por dos puntos exteriores O' y O'2, que se resuelve, tomando la circunferencia dilatada O''' por ejemplo, por el proceso ...

6. Se dibuja la mediatriz, s, del segmento O'O'2.
7. Aprovechamos la circunferencia O'1 auxiliar que pase por los puntos O' y O'2, cortando a la circunferencia O''' en los puntos T' y A.
8. Las líneas AT' y O'O'2 se cortan en el punto Cr (centro radical).
9. Desde Cr se dibujan las rectas tangentes, t'' y t''', a la circunferencia dilatada O''', siendo los puntos de tangencia T'' y T''', los buscados realmente. Para determinar T' y T'', se ha dibujado solo parte del arco de circunferencia de diámetro CrO''' y centro O'3.
10. Los centros O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, de las circunferencias buscadas, se determinan al cortar a la mediatriz, s, las líneas que unen los puntos de tangencia T'' y T''' con el centro O'''.
11. Las líneas anteriores cortan a la circunferencia dato O''', en los puntos de tangencia T'''<sub>1</sub> y T'''<sub>2</sub>. Los otros puntos de tangencia: T''<sub>1</sub>, T''<sub>2</sub>, T'<sub>1</sub> y T'<sub>2</sub>, se obtienen al unir los centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, con los otros centros datos, O' y O'' y cortar a las circunferencias datos. Solo queda dibujar las circunferencias solución de centros, O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, y radios O<sub>1</sub>T'<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>T'<sub>2</sub>.

Lo que se ha hecho en este último paso es deshacer la dilatación de las dos circunferencias dilatadas-solución (dibujadas de trazos).

